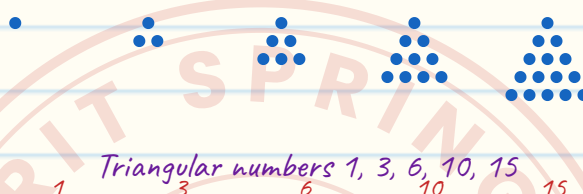


8.1 What is a sequence?

Patterns are everywhere: in nature, music, money. A **sequence** is an **ordered list of numbers**. Each number is a **term**. Natural numbers: 1, 2, 3, 4, ... Odd numbers: 1, 3, 5, 7, ... Triangular numbers: 1, 3, 6, 10, 15, ... Square numbers: 1, 4, 9, 16, 25, ... The dots "..." mean it goes on forever (**infinite** sequence). A sequence like 6, 12, 24, 48, 96 that stops is **finite** (5 terms).



Triangular numbers: differences are 2, 3, 4, 5, 6. Each is a sum of natural numbers: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. Square numbers: differences 3, 5, 7, 9, 11, and each square is a **sum of odd numbers**: $16 = 1 + 3 + 5 + 7$.



are = 1 sum of odd numbers (each L-shape adds the next 1)

Notation: t_1 is the first term, t_2 the second, ..., t_n the **n th term**. For odd numbers $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$, $t_4 = 7$. The small number matches the **position**. We can use other letters (s_1 , s_2 , u_1 , ...) for other sequences. Terms can be fractions or negative, e.g. $1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots$ or $-7, -3, 1, 5, 9, \dots$

Practice: 1, 4, 7, 10, 13, ...

Step 1: Next four terms: 16, 19, 22, 25.

Step 2: Adding up to each term: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145.

Step 3: Triangular $t_5, t_6, t_7, t_8 = 15, 21, 28, 36$.

8.2 Explicit rule

An **explicit rule** gives t_n directly from the position n . Odd numbers: $u_n = 2n - 1$ ($u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5$). Great because we can find the 300th term **without** knowing earlier terms, and we can check whether a number is in the sequence.

Using $u_n = 2n - 1$

Step 1: 53rd term = 105. 108th = 215. 1170th = 2339.

Step 2: Which position is 137? $2n - 1 = 137$, so $n = 69$.

Example 2: $s_n = 5n - 2$

Step 1: First six: 3, 8, 13, 18, 23, 28. 100th term = 498. 1000th = 4998.

Step 2: 308: $5n - 2 = 308$, $n = 62$, so **308 is the 62nd term**.

Step 3: 471: $5n = 473$, $n = 94.6$, not a whole number, so **471 is not a term**.
 n must be a natural number because positions are 1st, 2nd, 3rd, ...
 (The book prints 473 in one line but solves for 471.)

Practice: $t_n = 3n - 7$

Step 1: $t_1 = -4, t_2 = -1, t_3 = 2, t_{12} = 29, t_{18} = 47, t_{50} = 143$.

Step 2: 332: $3n = 339$, $n = 113$.

Step 3: 557: $3n = 564$, $n = 188$. Whole number, so **yes, 557 is the 188th term**.

Think! Square numbers have the rule $t_n = n^2$. There is no simple rule for the prime numbers 2, 3, 5, 7, 11, ... so we cannot predict the next prime from a formula.

8.3 Recursive rule

A **recursive rule** gives a term using the **previous** term(s). For 1, 4, 7, 10, ... each term is 3 more than the one before: $t_1 = 1$, $t_n = t_{n-1} + 3$ ($n \geq 2$). You need the earlier terms to use it.

Example 3: $u_1 = 1$, $u_n = 2u_{n-1} + 3$. Is 133 a term?

Step 1: $u_2 = 2(1) + 3 = 5$. $u_3 = 2(5) + 3 = 13$. $u_4 = 29$. $u_5 = 61$. $u_6 = 125$. $u_7 = 253$.

Step 2: The sequence jumps from 125 to 253, so **133 is not a term**.

Example 4: $s_1 = 3$, $s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1)$

Step 1: $s_2 = 3 \times 2 = 6$. $s_3 = 6 \times 5 = 30$. $s_4 = 30 \times 29 = 870$. Terms: **3, 6, 30, 870**.

Virahāṅka-Fibonacci sequence: $V_1 = 1$, $V_2 = 2$, $V_n = V_{n-1} + V_{n-2}$. Terms: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, **55, 89**, ... It was first studied by **Virahāṅka** (7th century) in Prakrit poetry metres, then by Gopāla and Hemachandra, and later by Fibonacci.

Exercise Set 8.1 (solved)

Q.1 First five terms

Ans. (i) $t_n = 3n - 4$: **-1, 2, 5, 8, 11**.

(ii) $t_n = 2 - 5n$: **-3, -8, -13, -18, -23**.

(iii) $t_n = n^2 - 2n + 3$: **2, 3, 6, 11, 18**.

Q.2 $t_n = 5n - 3$: 10th and 15th terms

Ans. $t_{10} = 50 - 3 = \mathbf{47}$. $t_{15} = 75 - 3 = \mathbf{72}$.

Q.3 Are 97 and 172 terms of $t_n = 5n - 3$?

Ans. 97: $5n = 100$, $n = 20$. **Yes**, 20th term.

172: $5n = 175$, $n = 35$. **Yes**, 35th term.

Q.4 Which term is 607?

Ans. $5n - 3 = 607$, $5n = 610$, $n = 122$.

Q.5 $t_1 = -5$, $t_{n+1} = t_n + 3$. Is 52 a term?

Ans. Terms: -5, -2, 1, 4, 7. Explicit rule: $t_n = -5 + 3(n - 1) = 3n - 8$.

$3n - 8 = 52$, $n = 20$. Yes, 52 is the 20th term.

Q.6 $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $T_3 = 4$, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$

Ans. $T_4 = 4 + 2 + 1 = 7$. $T_5 = 7 + 4 + 2 = 13$. $T_6 = 13 + 7 + 4 = 24$. $T_7 = 24 + 13 + 7 = 44$. $T_8 = 44 + 24 + 13 = 81$.

8.4 Arithmetic Progression (AP)

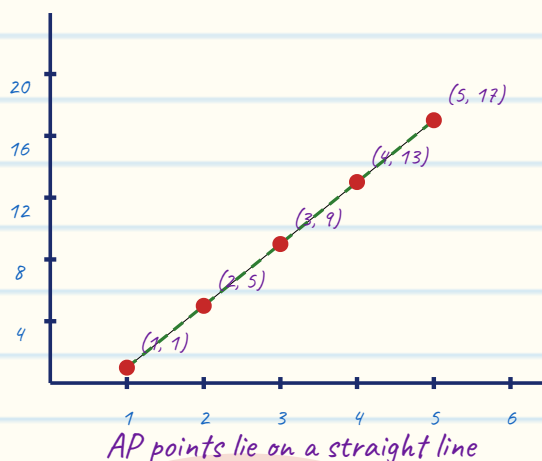
A growing pattern of squares has 1, 5, 9, 13, 17, 21 squares: each stage adds 4. A sequence with a **constant difference** between consecutive terms is an **arithmetic progression (AP)**. The fixed number is the **common difference** d , the first term is a .

AP: $a, a + d, a + 2d, \dots$ nth term $t_n = a + (n - 1)d$

Recursive rule: $t_1 = a$, $t_n = t_{n-1} + d$. Examples: 1, 4, 7, 10 ($a = 1$, $d = 3$).

11, 7, 3, -1, -5 ($a = 11$, $d = -4$). For 1, 5, 9, 13: $t_n = 1 + (n - 1)4 = 4n - 3$, so stages 5, 6, 10, 20 have 17, 21, 37, 77 squares.

Think! Which sequences so far are APs? **Yes:** natural numbers ($d = 1$), odd numbers ($d = 2$), 1, 4, 7, ... ($d = 3$), -7, -3, 1, 5 ($d = 4$). **No:** triangular, square, primes, Fibonacci, and 1, $1/2$, $1/3$, ... (the differences are not constant).



Plot (stage, squares): $(1, 1)$, $(2, 5)$, $(3, 9)$, $(4, 13)$, $(5, 17)$. They lie on a **straight line**. This is true for every AP.

Practice: find n th terms

Step 1: (i) 2, 5, 8, 11: $a = 2$, $d = 3$, $t_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$.

Step 2: (ii) -5, -1, 3, 7: $a = -5$, $d = 4$, $t_n = 4n - 9$.

Step 3: (iii) $1/2$, $5/2$, $9/2$, $13/2$: $a = 1/2$, $d = 2$, $t_n = 2n - 3/2$.

Step 4: (iv) 1.5, 3.5, 5.5, 7.5: $a = 1.5$, $d = 2$, $t_n = 2n - 0.5$.

Step 5: Recursive rule for (i): $t_1 = 2$, $t_n = t_{n-1} + 3$.

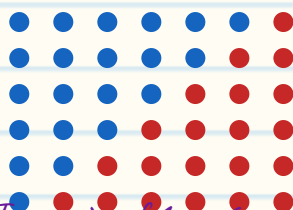
Example 5: Taxi: booking fee ₹200 plus ₹40 per km

Step 1: Fares after 1, 2, 3 km: 240, 280, 320: an AP with $a = 240$, $d = 40$.

Step 2: $t_n = 240 + 40(n - 1) = 200 + 40n$. For 10 km: $200 + 400 = ₹600$.

8.5 Sum of the first n natural numbers

Gauss's trick. Let $S = 1 + 2 + \dots + 10$. Write it backwards below it and add: every pair adds to 11, and there are 10 pairs, so $2S = 110$ and $S = 55$.



Two copies of $1+...+6$ make a 6×7 rectangle

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

This is the same as $(\text{first} + \text{last}) \div 2 \times (\text{number of terms})$, which is **Āryabhaṭa's** way (Āryabhaṭīya 2.19). Examples: $S_{20} = 210$, $S_{50} = 1275$, $S_{100} = 5050$, $S_{1000} = 500,500$.

Sum 25 + 26 + ... + 58

Step 1: $= S_{58} - S_{24} = 58 \times 59/2 - 24 \times 25/2 = 1711 - 300 = 1411$.

Triangular numbers are $t_n = n(n+1)/2$. The 10th, 17th and 80th are **55, 153, 3240**.

Exercise Set 8.2 (solved)

Q.1 AP: 3, 8, 13, 18, ... 10th and 26th terms

Ans. $a = 3$, $d = 5$, $t_n = 5n - 2$. $t_{10} = 48$. $t_{26} = 128$.

Q.2 AP: 21, 18, 15, ... which term is -81? Is 0 a term?

Ans. $a = 21$, $d = -3$, $t_n = 24 - 3n$.

$$24 - 3n = -81, 3n = 105, n = 35.$$

$$24 - 3n = 0, n = 8. \text{ Yes, } 0 \text{ is the 8th term.}$$

Q.3 AP: 11, 8, 5, 2, ... n th term and recursive rule

Ans. $a = 11$, $d = -3$. $t_n = 11 - 3(n-1) = 14 - 3n$.

Recursive: $t_1 = 11$, $t_n = t_{n-1} - 3$.

Q.4 50-term AP, 3rd term 12, last term 106. Find the 29th term

Ans. $a + 2d = 12$ and $a + 49d = 106$. Subtract: $47d = 94$, $d = 2$. Then $a = 12 - 4 = 8$.

$$t_{29} = 8 + 28 \times 2 = 64.$$

Q.5 2-digit numbers divisible by 3: how many, and their sum

Ans. They are 12, 15, 18, ..., 99 (an AP with $d = 3$). $99 = 12 + 3(n - 1)$, $n - 1 = 29$, $n = 30$.

$$\text{Sum} = (\text{first} + \text{last})/2 \times \text{number} = (12 + 99)/2 \times 30 = 55.5 \times 30 = 1665.$$

Q.6 Harish: ₹5,00,000 with ₹20,000 yearly increment. When ₹7,00,000?

Ans. Salary in year $n = 5,00,000 + 20,000(n - 1) = 7,00,000$, so $n - 1 = 10$, $n = 11$.

He reaches ₹7,00,000 in the 11th year, that is, after 10 years (10 increments).

Q.7 Marbles: 1, 2, 3, ... up to 25 rows

Ans. Total = $S_{25} = 25 \times 26/2 = 325$ marbles.

8.6 Geometric Progression (GP)

A pattern of green squares has 3, 6, 12, 24 squares: each stage **doubles**.

Written as 3, 3×2 , 3×2^2 , 3×2^3 . A sequence in which each term is the previous term **multiplied by a fixed number** is a **geometric progression (GP)**.

The fixed number is the **common ratio r** .

$$\text{GP: } a, ar, ar^2, ar^3, \dots \text{ nth term } t_n = a r^{n-1}$$

Recursive rule: $t_1 = a$, $t_n = r \times t_{n-1}$. For 3, 6, 12, 24: $t_n = 3 \times 2^{n-1}$ and $t_1 = 3$, $t_n = 2t_{n-1}$. Test for a GP: **ratio of consecutive terms is the same**.

Examples 6, 7, 8

Step 1: 1, 2, 4, 8, 16: GP, $r = 2$.

Step 2: 1, 3, 9, 27, 81: GP, $r = 3$.

Step 3: 1, -1, 1, -1, 1: GP, $r = -1$.

Example 9: 5, 15/4, 45/16, 135/64

Step 1: $t_2/t_1 = (15/4) \div 5 = 3/4$. $t_3/t_2 = (45/16) \div (15/4) = 3/4$. $t_4/t_3 = 3/4$.

Step 2: Constant ratio, so it is a GP with $a = 5$, $r = 3/4$. $t_n = 5(3/4)^{n-1}$.

Practice: GP or not? nth term

Step 1: (i) 2, 10, 50, 250: $r = 5$. $t_n = 2 \times 5^{n-1}$.

Step 2: (ii) 4, 8/3, 16/9, 32/27: $r = 2/3$. $t_n = 4(2/3)^{n-1}$.

Step 3: (iii) 3, -3/2, 3/4, -3/8: $r = -1/2$. $t_n = 3(-1/2)^{n-1}$.

Step 4: Recursive rule for $t_n = 3 \times 10^{n-1}$: $t_1 = 3$, $t_n = 10 t_{n-1}$.

Fractals: the Sierpiński triangle

Start with a triangle (Stage 0). Join the midpoints of the sides, and remove the middle triangle. Repeat on every remaining triangle. This never-ending pattern is a **fractal**: zoom in and a small part looks like the whole.



Stage 0 Stage 1 Stage 2 Stage 3
Sierpiński triangle: 1, 3, 9, 27 triangles

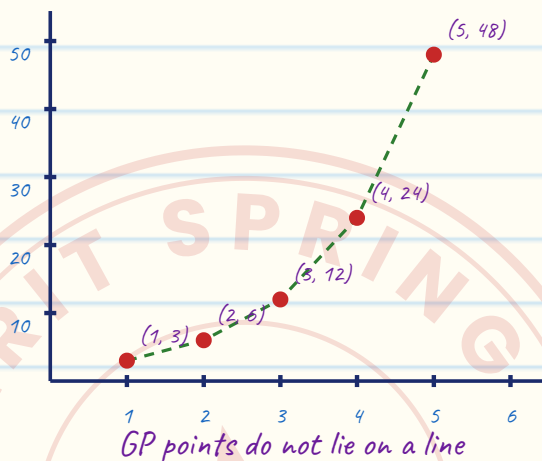
Stage n	0	1	2	3	4	5	n
Black triangles	1	3	9	27	81	243	3^n
Black area	1	$3/4$	$9/16$	$27/64$	$81/256$	$243/1024$	$(3/4)^n$

Number of triangles: GP with $r = 3$, $t_n = 3^n$, recursive $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n-1}$.

Area: each stage keeps $3/4$ of the previous area, GP with $r = 3/4$: $s_n = (3/4)^n$.

. The number of triangles grows very fast, but the **area shrinks towards 0**.

Visualising a GP

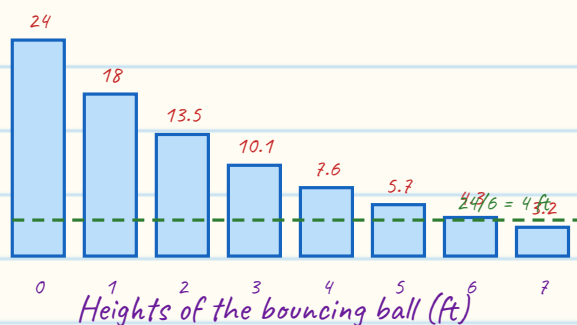


Points $(1, 3)$, $(2, 6)$, $(3, 12)$, $(4, 24)$, $(5, 48)$ curve **upwards**: not a straight line. For the triangle count the graph shoots up. For the area it goes down and gets closer and closer to 0.

Example 10: Ball dropped from 24 ft, bounces to $3/4$ of the last height

Step 1: Heights: 18, 13.5, 10.125, 7.594, 5.695, 4.271, 3.203 ($a = 18$, $r = 0.75$).

Step 2: $1/6$ of 24 = 4 ft. The 6th bounce is 4.27 (still above 4), the **7th bounce is 3.2** (below 4). So **7 bounces**.



Exercise Set 8.3 (solved)

Q.1 GP with $r = 2$ and $t_8 = 192$. Find t_{12}

Ans. $t_{12} = t_8 \times r^4 = 192 \times 16 = 3072$.

Q.2 GP 5, 25, 125, ...

Ans. $a = 5$, $r = 5$, $t_n = 5 \times 5^{n-1} = 5^n$. $t_{10} = 5^{10} = 9,765,625$.

Q.3 $t_1 = 2$, $t_{n+1} = 3t_n - 2$. Which term is 730?

Ans. $t_2 = 4$, $t_3 = 10$, $t_4 = 28$, $t_5 = 82$, $t_6 = 244$, $t_7 = 730$.

So 730 is the 7th term. (Shortcut: $t_n - 1 = 3^{n-1}$, and $729 = 3^6$.)

Q.4 GP 2, 6, 18, ... which term is 4374?

Ans. $a = 2$, $r = 3$. $2 \times 3^{n-1} = 4374$, $3^{n-1} = 2187 = 3^7$, so $n - 1 = 7$, $n = 8$.

Explicit: $t_n = 2 \times 3^{n-1}$. Recursive: $t_1 = 2$, $t_n = 3t_{n-1}$.

Q.5 Ball from 80 m, bounces to 60% each time

Ans. Heights after bounces: 48, 28.8, 17.28, 10.368, 6.2208.

(i) After the 5th bounce: $80 \times 0.6^5 = 6.22$ m.

(ii) The 6th time it hits the ground is after the 5th bounce. Distance = first fall $80 + 2 \times (48 + 28.8 + 17.28 + 10.368 + 6.2208) = 80 + 2 \times 110.6688 = 301.34$ m.

Q.6 Which term of 2, $2\sqrt{2}$, 4, ... is 128?

Ans. $a = 2$, $r = \sqrt{2}$. $t_n = 2(\sqrt{2})^{n-1} = 2^{(n+1)/2}$.

$128 = 2^7$, so $(n+1)/2 = 7$, $n = 13$.

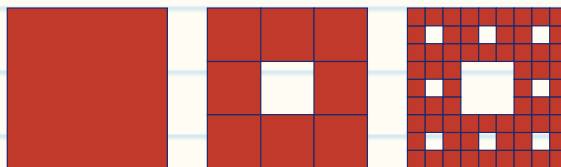
Q.7 Sierpiński square carpet

Ans. (i) Red squares Stage 0 to 3: 1, 8, 64, 512.

(ii) Stage 4: 4096. Stage 5: 32768.

(iii) GP with $r = 8$: $t_n = 8^n$. Recursive: $t_0 = 1$, $t_n = 8t_{n-1}$.

(iv) Each stage keeps $\frac{8}{9}$ of the area: Stage 1: $\frac{8}{9}$, Stage 2: $\frac{64}{81}$, Stage 3: $\frac{512}{729}$, Stage 4: $\frac{4096}{6561}$, Stage 5: $\frac{32768}{59049}$.
Explicit: $s_n = (\frac{8}{9})^n$. Recursive: $s_0 = 1, s_n = (\frac{8}{9})s_{n-1}$. As n grows the area gets closer and closer to 0.



Stage 0, Stage 1, Stage 2
Sierpinski carpet: 1, 8, 64 squares

End-of-Chapter Exercises (solved)

Q.1 AP: 11th term 38, 16th term 73. Find the 31st term

Ans. $5d = 73 - 38 = 35, d = 7. a + 10 \times 7 = 38, a = -32.$

$$t_{31} = -32 + 30 \times 7 = 178.$$

Q.2 AP: 3rd term 16, and 7th term exceeds 5th by 12

Ans. $t_7 - t_5 = 2d = 12, d = 6. a + 2 \times 6 = 16, a = 4.$

AP: 4, 10, 16, 22, 28, ...

Q.3 Three-digit numbers divisible by 7

Ans. Smallest 105, largest 994. $994 = 105 + 7(n - 1), 7(n - 1) = 889, n -$

$$1 = 127, n = 128.$$

Q.4 Multiples of 4 between 10 and 250

Ans. Smallest 12, largest 248. $248 = 12 + 4(n - 1), n - 1 = 59, n = 60.$

Q.5 GP: sum of first two terms -4, 5th term = $4 \times$ 3rd term

Ans. $ar^4 = 4ar^2, \text{ so } r^2 = 4, r = 2 \text{ or } -2.$

$a + ar = -4.$ If $r = 2: 3a = -4, a = -4/3.$ GP: $-4/3, -8/3, -16/3, \dots$

If $r = -2: -a = -4, a = 4.$ GP: 4, -8, 16, -32, ...

Q.6 100 as a sum of consecutive natural numbers

Ans. If n terms start at a : $n(2a + n - 1)/2 = 100$, so $n(2a + n - 1) = 200$.
The two factors have opposite parity (one odd, one even), and $200 = 8 \times 25$.

$$n = 5: 2a + 4 = 40, a = 18: 18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100.$$

$$n = 8: 2a + 7 = 25, a = 9: 9 + 10 + \dots + 16 = 100.$$

So there are exactly **two** ways (other than 100 alone).

Q.7 Bacteria: 30 now, doubling every hour

Ans. After 2nd hour: $30 \times 4 = 120$. 4th hour: $30 \times 16 = 480$. n th hour: 30×2^n .

Q.8 AP: $t_4 + t_8 = 24$ and $t_6 + t_{10} = 44$

Ans. $2a + 10d = 24$, so $a + 5d = 12$. And $2a + 14d = 44$, so $a + 7d = 22$.

$$\text{Subtract: } 2d = 10, d = 5, a = 12 - 25 = -13.$$

$$\text{First three terms: } -13, -8, -3. \text{ Check: } t_4 + t_8 = 2 + 22 = 24 \checkmark.$$

Q.9 Smallest n with $1 + 2 + \dots + n > 1000$

Ans. $n(n + 1)/2$: $n = 44$ gives 990 (not enough). $n = 45$ gives 1035. So **$n = 45$** .

Q.10 GP: 2, 8, 32, ... which term is 131072?

Ans. $a = 2, r = 4$. $2 \times 4^{n-1} = 131072$, $4^{n-1} = 65536 = 4^8$, so **$n = 9$** .

$$\text{Explicit: } t_n = 2 \times 4^{n-1}. \text{ Recursive: } t_1 = 2, t_n = 4t_{n-1}.$$

Q.11 GP: sum of first three terms $13/12$, product -1

Ans. Take the terms as $a/r, a, ar$. Product $= a^3 = -1$, so **$a = -1$** .

$$\text{Sum: } -1/r - 1 - r = 13/12, \text{ so } r + 1/r = -25/12, \text{ i.e. } 12r^2 + 25r + 12 = 0, (4r + 3)(3r + 4) = 0.$$

$$r = -3/4 \text{ or } -4/3. \text{ Terms: } 4/3, -1, 3/4 \text{ (or the same three in reverse order: } 3/4, -1, 4/3).$$

Q.12 4th, 10th, 16th terms x, y, z . Prove x, y, z are in GP

Ans. $x = ar^3, y = ar^9, z = ar^{15}$. $y/x = r^6$ and $z/y = r^6$. The ratios are equal, so x, y, z form a GP (with ratio r^6).

Q.13 GP: sum of first three terms 26, sum of squares 364

Ans. Terms a, ar, ar^2 . $a(1 + r + r^2) = 26$ and $a^2(1 + r^2 + r^4) = 364$.

Use $1 + r^2 + r^4 = (1 + r + r^2)(1 - r + r^2)$. Dividing the second by the first: $a(1 - r + r^2) = 364/26 = 14$.

Subtract from 26: $2ar = 12$, $ar = 6$. Add: $2a(1 + r^2) = 40$, $a(1 + r^2) = 20$. With $a = 6/r$: $6 + 6r^2 = 20r$, $3r^2 - 10r + 3 = 0$, $r = 3$ or $1/3$.

GP: **2, 6, 18** ($r = 3$) or **18, 6, 2** ($r = 1/3$). Check: $4 + 36 + 324 = 364$ ✓.

Q.14 $P_1 = 1, P_2 = 2, P_n = P_1 + \dots + P_{n-1} + 1$

Ans. $P_3 = 1 + 2 + 1 = 4$. $P_4 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$. $P_5 = 16, P_6 = 32, P_7 = 64, P_8 = 128$.

Terms: **1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128**. Simpler recursive rule: $P_n = 2P_{n-1}$.

Explicit: $P_n = 2^{n-1}$.

Q.15 $W_1 = 1, W_2 = 2, W_n = W_1 + \dots + W_{n-2} + 2$

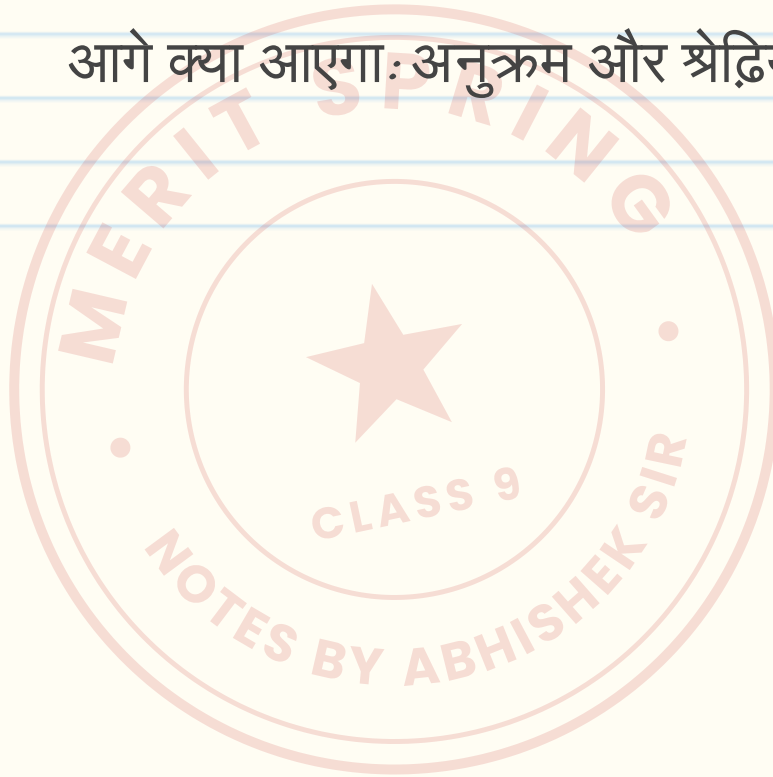
Ans. $W_3 = 1 + 2 = 3$. $W_4 = 1 + 2 + 2 = 5$. $W_5 = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$. $W_6 = 1 + 2 + 3 + 5 + 2 = 13$. $W_7 = 21$. $W_8 = 34$.

Sequence: **1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34**. It is the **Virahāṅka-Fibonacci sequence**!

Teacher's Note: Chapter summary: AP: $t_n = a + (n - 1)d$, constant difference, graph is a straight line. GP: $t_n = ar^{n-1}$, constant ratio, graph curves. $S_n = n(n + 1)/2$. Explicit rule uses n ; recursive rule uses earlier terms. Fractals like the Sierpiński triangle give GPs.

हिंदी संस्करण

आगे क्या आएगा: अनुक्रम और श्रेणियाँ



8.1 अनुक्रम क्या हैं?

पैटर्न हर जगह हैं: प्रकृति, संगीत, पैसे में। **अनुक्रम (sequence)** संख्याओं की **क्रमबद्ध सूची** है। हर संख्या एक **पद** है। प्राकृत संख्याएँ: 1, 2, 3, 4, ... विषम संख्याएँ: 1, 3, 5, 7, ... त्रिकोणीय संख्याएँ: 1, 3, 6, 10, 15, ... वर्ग संख्याएँ: 1, 4, 9, 16, 25, ... बिंदु "..." का मतलब यह हमेशा चलता रहता है (**अनंत** अनुक्रम)। 6, 12, 24, 48, 96 जैसा जो रुक जाए वह **परिमित** है (5 पद)।



त्रिकोणीय संख्याओं में अंतर 2, 3, 4, 5, 6 हैं। हर एक प्राकृत संख्याओं का योग है: $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ । वर्ग संख्याओं में अंतर 3, 5, 7, 9, 11 हैं, और हर वर्ग **विषम संख्याओं का योग** है: $16 = 1 + 3 + 5 + 7$ ।



संख्याओं का योग हर L-आकार अगली विषम संख्या

संकेतन: t_1 पहला पद, t_2 दूसरा, ..., t_n **nवाँ पद**। विषम संख्याओं के लिए $t_1 = 1, t_2 = 3, t_3 = 5, t_4 = 7$ । छोटी संख्या **स्थान** बताती है। दूसरे अनुक्रमों के लिए दूसरे अक्षर ($s_1, s_2, u_1, \dots$) ले सकते हैं। पद भिन्न या ऋणात्मक भी हो सकते हैं, जैसे 1, $1/2, 1/3, 1/4, \dots$ या $-7, -3, 1, 5, 9, \dots$ ।

अभ्यास: 1, 4, 7, 10, 13, ...

चरण 1: अगले चार पद: 16, 19, 22, 25।

चरण 2: हर पद तक का योग: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145।

चरण 3: त्रिकोणीय $t_5, t_6, t_7, t_8 = 15, 21, 28, 36$ ।

8.2 सुस्पष्ट नियम

सुस्पष्ट (explicit) नियम स्थान n से सीधे t_n देता है। विषम संख्याएँ: $u_n = 2n - 1$ ($u_1 = 1, u_2 = 3, u_3 = 5$)। इससे 300वाँ पद **बिना** पिछले पद जाने निकल जाता है, और जाँच सकते हैं कि कोई संख्या अनुक्रम में है या नहीं।

$u_n = 2n - 1$ से

चरण 1: 53वाँ पद = 105। 108वाँ = 215। 1170वाँ = 2339।

चरण 2: 137 किस स्थान पर है? $2n - 1 = 137$, इसलिए $n = 69$ ।

उदाहरण 2: $s_n = 5n - 2$

चरण 1: पहले छह: 3, 8, 13, 18, 23, 28। 100वाँ पद = 498। 1000वाँ = 4998।

चरण 2: 308: $5n - 2 = 308$, $n = 62$, इसलिए **308, 62वाँ पद है** ।

चरण 3: 471: $5n = 473$, $n = 94.6$, पूर्ण संख्या नहीं, इसलिए **471 पद नहीं है** । n प्राकृत संख्या होनी चाहिए क्योंकि स्थान पहला, दूसरा, तीसरा ... होते हैं। (किताब एक जगह 473 छापती है पर हल 471 का करती है।)

अभ्यास: $t_n = 3n - 7$

चरण 1: $t_1 = -4, t_2 = -1, t_3 = 2, t_{12} = 29, t_{18} = 47, t_{50} = 143$

चरण 2: 332: $3n = 339$, $n = 113$ ।

चरण 3: 557: $3n = 564$, $n = 188$ । पूर्ण संख्या है, इसलिए **हाँ, 557, 188वाँ पद है** ।

सोचो! वर्ग संख्याओं का नियम $t_n = n^2$ है। अभाव्य संख्याओं 2, 3, 5, 7, 11, ... का कोई सरल नियम नहीं, इसलिए सूत्र से अगली अभाव्य संख्या नहीं बता सकते।

8.3 पुनरावर्ती नियम

पुनरावर्ती (recursive) नियम किसी पद को **पिछले** पद(पदों) से देता है। 1, 4, 7, 10, ... में हर पद पिछले से 3 ज़्यादा है: $t_1 = 1, t_n = t_{n-1} + 3$ ($n \geq 2$)। इसे चलाने के लिए पिछले पद पता होने चाहिए।

उदाहरण 3: $u_1 = 1, u_n = 2u_{n-1} + 3$ क्या 133 पद है?

चरण 1: $u_2 = 2(1) + 3 = 5$ | $u_3 = 2(5) + 3 = 13$ | $u_4 = 29$ | $u_5 = 61$ | $u_6 = 125$ | $u_7 = 253$

चरण 2: अनुक्रम 125 से सीधे 253 पर पहुँच जाता है, इसलिए 133 पद नहीं है।

उदाहरण 4: $s_1 = 3, s_n = s_{n-1}(s_{n-1} - 1)$

चरण 1: $s_2 = 3 \times 2 = 6$ | $s_3 = 6 \times 5 = 30$ | $s_4 = 30 \times 29 = 870$ | पद: 3, 6, 30, 870

विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम: $V_1 = 1, V_2 = 2, V_n = V_{n-1} + V_{n-2}$ | पद: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...। इसे सबसे पहले विरहांक (7वीं सदी) ने प्राकृत छंदों के लिए लिखा, फिर गोपाल और हेमचंद्र ने, और बाद में फिबोनाची ने।

प्रश्नावली 8.1 (हल सहित)

प्र.1 पहले पाँच पद

उत्तर- (i) $t_n = 3n - 4$: -1, 2, 5, 8, 11 |

(ii) $t_n = 2 - 5n$: -3, -8, -13, -18, -23 |

(iii) $t_n = n^2 - 2n + 3$: 2, 3, 6, 11, 18 |

प्र.2 $t_n = 5n - 3$: 10वाँ और 15वाँ पद

उत्तर- $t_{10} = 50 - 3 = 47$ | $t_{15} = 75 - 3 = 72$ |

प्र.3 क्या 97 और 172, $t_n = 5n - 3$ के पद हैं?

उत्तर- 97: $5n = 100, n = 20$ | हाँ, 20वाँ पद।

172: $5n = 175, n = 35$ | हाँ, 35वाँ पद।

प्र.4 607 कौन-सा पद है?

उत्तर- $5n - 3 = 607, 5n = 610, n = 122$ |

प्र.5 $t_1 = -5, t_{n+1} = t_n + 3$ क्या 52 पद है?

उत्तर- पद: -5, -2, 1, 4, 7 | सुस्पष्ट नियम: $t_n = -5 + 3(n - 1) = 3n - 8$

$3n - 8 = 52, n = 20$ | हाँ, 52, 20वाँ पद है।

प्र.6 $T_1 = 1, T_2 = 2, T_3 = 4, T_n = T_{n-1} + T_{n-2} + T_{n-3}$

उत्तर- $T_4 = 4 + 2 + 1 = 7 \mid T_5 = 7 + 4 + 2 = 13 \mid T_6 = 13 + 7 + 4 = 24 \mid T_7 = 24 + 13 + 7 = 44 \mid T_8 = 44 + 24 + 13 = 81 \mid$

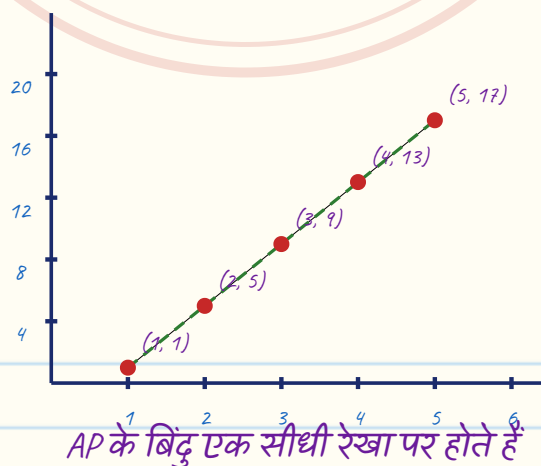
8.4 समांतर श्रेणी (AP)

वर्गों के बढ़ते पैटर्न में 1, 5, 9, 13, 17, 21 वर्ग हैं: हर चरण में 4 जुड़ते हैं। जिस अनुक्रम में क्रमागत पदों का अंतर स्थिर हो वह समांतर श्रेणी (AP) है। स्थिर संख्या सार्व अंतर d है, पहला पद a ।

AP: $a, a + d, a + 2d, \dots$ n वाँ पद $t_n = a + (n - 1)d$

पुनरावर्ती नियम: $t_1 = a, t_n = t_{n-1} + d$ । उदाहरण: 1, 4, 7, 10 ($a = 1, d = 3$)। 11, 7, 3, -1, -5 ($a = 11, d = -4$)। 1, 5, 9, 13 के लिए: $t_n = 1 + (n - 1)4 = 4n - 3$, इसलिए चरण 5, 6, 10, 20 में 17, 21, 37, 77 वर्ग होंगे।

सोचो! अब तक कौन-से अनुक्रम AP हैं? **हाँ:** प्राकृत संख्याएँ ($d = 1$), विषम संख्याएँ ($d = 2$), 1, 4, 7, ... ($d = 3$), -7, -3, 1, 5 ($d = 4$)। **नहीं:** त्रिकोणीय, वर्ग, अभाज्य, फिबोनाची, और 1, 1/2, 1/3, ... (अंतर स्थिर नहीं)।



(चरण, वर्ग) आलेखित करो: (1,1), (2,5), (3,9), (4,13), (5,17)। ये सीधी रेखा पर हैं। यह हर AP के लिए सच है।

अभ्यास: n वाँ पद निकालो

चरण 1: (i) 2, 5, 8, 11: $a = 2, d = 3, t_n = 2 + 3(n - 1) = 3n - 1$ ।

चरण 2: (ii) -5, -1, 3, 7: $a = -5, d = 4, t_n = 4n - 9$ ।

चरण 3: (iii) $1/2, 5/2, 9/2, 13/2$: $a = 1/2, d = 2, t_n = 2n - 3/2$ ।

चरण 4: (iv) 1.5, 3.5, 5.5, 7.5: $a = 1.5, d = 2, t_n = 2n - 0.5$ ।

चरण 5: (i) का पुनरावर्ती नियम: $t_1 = 2, t_n = t_{n-1} + 3$ ।

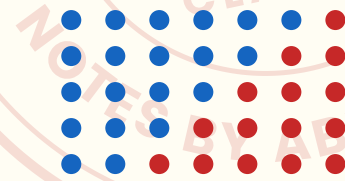
उदाहरण 5: टैक्सी: बुकिंग शुल्क ₹200 और ₹40 प्रति किमी

चरण 1: 1, 2, 3 किमी बाद किराया: 240, 280, 320: AP जिसमें $a = 240, d = 40$ ।

चरण 2: $t_n = 240 + 40(n - 1) = 200 + 40n$ । 10 किमी के लिए: $200 + 400 = ₹600$ ।

8.5 पहली n प्राकृत संख्याओं का योग

गॉस की तरकीब। $S = 1 + 2 + \dots + 10$ लो। उसे उलटा लिखकर नीचे रखो और जोड़ो: हर जोड़ी का योग 11 है और 10 जोड़ियाँ हैं, इसलिए $2S = 110$ और $S = 55$ ।



$1+2+3+4+5+6$ की दो प्रतियाँ मिलकर 6×7 आयत बनाती

$$S_n = 1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$$

यही (पहला + अंतिम) $\div 2 \times$ (पदों की संख्या) है, जो **आर्यभट** का तरीका है (आर्यभटीय 2.19)। उदाहरण: $S_{20} = 210, S_{50} = 1275, S_{100} = 5050, S_{1000} = 500,500$ ।

योग $25 + 26 + \dots + 58$

चरण 1: $= S_{58} - S_{24} = 58 \times 59/2 - 24 \times 25/2 = 1711 - 300 = 1411$ ।

त्रिकोणीय संख्याएँ $t_n = n(n + 1)/2$ हैं। 10वीं, 17वीं और 80वीं **55, 153, 3240** हैं।

प्रश्नावली 8.2 (हल सहित)

प्र.1 AP: 3, 8, 13, 18, ... का 10वाँ और 26वाँ पद

उत्तर- $a = 3, d = 5, t_n = 5n - 2 \mid t_{10} = 48 \mid t_{26} = 128 \mid$

प्र.2 AP: 21, 18, 15, ... में -81 कौन-सा पद है? क्या 0 पद है?

उत्तर- $a = 21, d = -3, t_n = 24 - 3n \mid$

$$24 - 3n = -81, 3n = 105, n = 35 \mid$$

$$24 - 3n = 0, n = 8 \text{ हाँ, } 0 \text{ आठवाँ पद है।}$$

प्र.3 AP: 11, 8, 5, 2, ... का n वाँ पद और पुनरावर्ती नियम

उत्तर- $a = 11, d = -3 \mid t_n = 11 - 3(n - 1) = 14 - 3n \mid$

$$\text{पुनरावर्ती: } t_1 = 11, t_n = t_{n-1} - 3 \mid$$

प्र.4 50 पदों की AP, तीसरा पद 12, अंतिम पद 106। 29वाँ पद?

उत्तर- $a + 2d = 12$ और $a + 49d = 106 \mid$ घटाओ: $47d = 94, d = 2 \mid$ तब $a = 12 - 4 = 8 \mid$

$$t_{29} = 8 + 28 \times 2 = 64 \mid$$

प्र.5 3 से विभाज्य दो अंकीय संख्याएँ: कितनी, और योग

उत्तर- वे 12, 15, 18, ..., 99 हैं (AP, $d = 3$) $99 = 12 + 3(n - 1), n - 1 = 29, n = 30 \mid$

$$\text{योग} = (\text{पहला} + \text{अंतिम})/2 \times \text{संख्या} = (12 + 99)/2 \times 30 = 55.5 \times 30 = 1665 \mid$$

प्र.6 हरीश: ₹5,00,000 वेतन, हर साल ₹20,000 वृद्धि। ₹7,00,000 कब?

उत्तर- n वें साल का वेतन $= 5,00,000 + 20,000(n - 1) = 7,00,000$, तो $n - 1 = 10, n = 11 \mid$

वह 11वाँ साल में ₹7,00,000 पर पहुँचा, यानी 10 साल बाद (10 वृद्धियाँ)।

प्र.7 कंचे: 1, 2, 3, ... 25 पंक्तियों तक

उत्तर- कुल $= S_{25} = 25 \times 26/2 = 325$ कंचे।

8.6 गुणोत्तर श्रेणी (GP)

हरे वर्गों के पैटर्न में 3, 6, 12, 24 वर्ग हैं: हर चरण में **दुगुने**। इसे $3, 3 \times 2, 3 \times 2^2, 3 \times 2^3$ लिख सकते हैं। जिस अनुक्रम में हर पद पिछले पद को **एक स्थिर संख्या से गुणा** करके मिले वह **गुणोत्तर श्रेणी (GP)** है। स्थिर संख्या **सार्व अनुपात r** है।

$$\text{GP: } a, ar, ar^2, ar^3, \dots n\text{वाँ पद } t_n = a r^{n-1}$$

पुनरावर्ती नियम: $t_1 = a, t_n = r \times t_{n-1}$ | 3, 6, 12, 24 के लिए: $t_n = 3 \times 2^{n-1}$ और $t_1 = 3, t_n = 2t_{n-1}$ | GP की जाँच: **क्रमागत पदों का अनुपात एक ही रहे।**

उदाहरण 6, 7, 8

चरण 1: 1, 2, 4, 8, 16: GP, $r = 2$ |

चरण 2: 1, 3, 9, 27, 81: GP, $r = 3$ |

चरण 3: 1, -1, 1, -1, 1: GP, $r = -1$ |

उदाहरण 9: 5, 15/4, 45/16, 135/64

चरण 1: $t_2/t_1 = (15/4) \div 5 = 3/4$ | $t_3/t_2 = (45/16) \div (15/4) = 3/4$ | $t_4/t_3 = 3/4$ |

चरण 2: अनुपात स्थिर है, इसलिए GP है जिसमें $a = 5, r = 3/4$ | $t_n = 5(3/4)^{n-1}$ |

अभ्यास: GP है या नहीं? n वाँ पद

चरण 1: (i) 2, 10, 50, 250: $r = 5$ | $t_n = 2 \times 5^{n-1}$ |

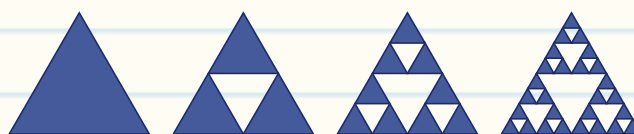
चरण 2: (ii) 4, 8/3, 16/9, 32/27: $r = 2/3$ | $t_n = 4(2/3)^{n-1}$ |

चरण 3: (iii) 3, -3/2, 3/4, -3/8: $r = -1/2$ | $t_n = 3(-1/2)^{n-1}$ |

चरण 4: $t_n = 3 \times 10^{n-1}$ का पुनरावर्ती नियम: $t_1 = 3, t_n = 10 t_{n-1}$ |

फ्रैक्टल: सिएरपिंस्की त्रिभुज

एक त्रिभुज लो (चरण 0)। भुजाओं के मध्य बिंदु जोड़ो और बीच का त्रिभुज हटा दो। बचे हर त्रिभुज पर यही दोहराओ। यह कभी न खत्म होने वाला पैटर्न **फ्रैक्टल** है: जूम करो तो छोटा हिस्सा पूरे जैसा दिखता है।



सिएरपिंस्की त्रिभुज: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100

चरण n	0	1	2	3	4	5	n
काले त्रिभुज	1	3	9	27	81	243	3^n
काला क्षेत्रफल	1	$3/4$	$9/16$	$27/64$	$81/256$	$243/1024$	$(3/4)^n$

त्रिभुजों की संख्या: GP, $r = 3$, $t_n = 3^n$, पुनरावर्ती $t_1 = 1$, $t_n = 3t_{n-1}$ । क्षेत्रफल: हर चरण में पिछले का $3/4$ बचता है, GP, $r = 3/4$: $s_n = (3/4)^n$ । त्रिभुजों की संख्या बहुत तेज़ी से बढ़ती है, पर क्षेत्रफल घटकर 0 के पास जाता है।

GP को देखना

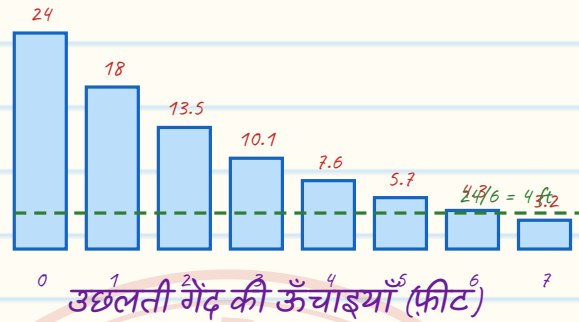


बिंदु $(1,3)$, $(2,6)$, $(3,12)$, $(4,24)$, $(5,48)$ ऊपर की ओर मुड़ते हैं: सीधी रेखा नहीं। त्रिभुजों की गिनती का आलेख तेज़ी से ऊपर जाता है। क्षेत्रफल का आलेख नीचे जाकर 0 के और पास आता जाता है।

उदाहरण 10: गेंद 24 फीट से गिराई, हर बार पिछली ऊँचाई की $3/4$ उछलती है

चरण 1: ऊँचाइयाँ: 18, 13.5, 10.125, 7.594, 5.695, 4.271, 3.203 ($a = 18$, $r = 0.75$)।

चरण 2: 24 का $1/6 = 4$ फीट। छठी उछाल 4.27 है (4 से ऊपर), सातवीं उछाल 3.2 है (4 से नीचे)। इसलिए 7 उछालें।



प्रश्नावली 8.3 (हल सहित)

प्र.1 GP जिसमें $r = 2$ और $t_8 = 192$ । t_{12} ज्ञात करो

उत्तर- $t_{12} = t_8 \times r^4 = 192 \times 16 = 3072$ ।

प्र.2 GP 5, 25, 125, ...

उत्तर- $a = 5, r = 5, t_n = 5 \times 5^{n-1} = 5^n$ । $t_{10} = 5^{10} = 9,765,625$ ।

प्र.3 $t_1 = 2, t_{n+1} = 3t_n - 2$ । 730 कौन-सा पद है?

उत्तर- $t_2 = 4, t_3 = 10, t_4 = 28, t_5 = 82, t_6 = 244, t_7 = 730$ ।

इसलिए 730 7वाँ पद है। (छोटा रास्ता: $t_n - 1 = 3^{n-1}$, और $729 = 3^6$)

प्र.4 GP 2, 6, 18, ... में 4374 कौन-सा पद है?

उत्तर- $a = 2, r = 3$ । $2 \times 3^{n-1} = 4374, 3^{n-1} = 2187 = 3^7$, इसलिए $n - 1 = 7, n = 8$ ।

सुस्पष्ट: $t_n = 2 \times 3^{n-1}$ । पुनरावर्ती: $t_1 = 2, t_n = 3t_{n-1}$ ।

प्र.5 गेंद 80 मी से गिराई, हर बार 60% ऊँचाई तक उछलती है

उत्तर- उछालों के बाद ऊँचाइयाँ: 48, 28.8, 17.28, 10.368, 6.2208।

(i) 5वीं उछाल के बाद: $80 \times 0.6^5 = 6.22$ मी।

(ii) 6वीं बार ज़मीन छूना 5वीं उछाल के बाद होता है। दूरी = पहली गिरावट $80 + 2 \times (48 + 28.8 + 17.28 + 10.368 + 6.2208) = 80 + 2 \times 110.6688 = 301.34$ मी।

प्र.6 $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$ में 128 कौन-सा पद है?

उत्तर- $a = 2, r = \sqrt{2} \mid t_n = 2(\sqrt{2})^{n-1} = 2^{(n+1)/2}$

$$128 = 2^7, \text{ इसलिए } (n+1)/2 = 7, n = 13$$

प्र.7 सिएरपिंस्की वर्गाकार कालीन

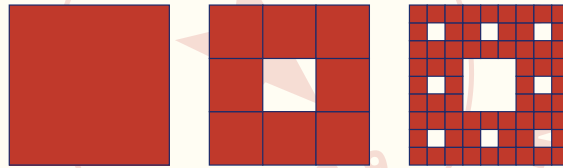
उत्तर- (i) चरण 0 से 3 में लाल वर्ग: **1, 8, 64, 512** ।

(ii) चरण 4: **4096** । चरण 5: **32768** ।

(iii) GP, $r = 8$: $t_n = 8^n$ । पुनरावर्ती: $t_0 = 1, t_n = 8t_{n-1}$

(iv) हर चरण में पिछले क्षेत्रफल का $8/9$ बचता है: चरण 1: **8/9**, चरण 2: **64/81**, चरण 3: **512/729**, चरण 4: **4096/6561**, चरण 5: **32768/59049** ।

सुस्पष्ट: $s_n = (8/9)^n$ । पुनरावर्ती: $s_0 = 1, s_n = (8/9)s_{n-1}$ । n बढ़ने पर क्षेत्रफल **0** के और पास आता जाता है।



चरण 0 से 5 तक सिएरपिंस्की वर्गाकार कालीन: 1, 8, 64, 512, 4096, 32768

अध्याय के अंत की प्रश्नावली (हल सहित)

प्र.1 AP: 11वाँ पद 38, 16वाँ पद 73। 31वाँ पद?

उत्तर- $5d = 73 - 38 = 35, d = 7 \mid a + 10 \times 7 = 38, a = -32$ ।

$$t_{31} = -32 + 30 \times 7 = 178$$

प्र.2 AP: तीसरा पद 16, और 7वाँ पद 5वें से 12 ज्यादा

उत्तर- $t_7 - t_5 = 2d = 12, d = 6 \mid a + 2 \times 6 = 16, a = 4$ ।

AP: **4, 10, 16, 22, 28, ...**

प्र.3 7 से विभाज्य तीन अंकीय संख्याएँ

उत्तर- सबसे छोटी 105, सबसे बड़ी 994। $994 = 105 + 7(n-1), 7(n-1) = 889, n-1 = 127, n = 128$ ।

प्र.4 10 और 250 के बीच 4 के गुणज

उत्तर- सबसे छोटा 12, सबसे बड़ा 248। $248 = 12 + 4(n - 1)$, $n - 1 = 59$, $n = 60$ ।

प्र.5 GP: पहले दो पदों का योग -4, 5वाँ पद = 3रे पद का 4 गुना

उत्तर- $ar^4 = 4ar^2$, इसलिए $r^2 = 4$, $r = 2$ या -2 ।

$a + ar = -4$ । $r = 2$ हो: $3a = -4$, $a = -4/3$ । GP: $-4/3, -8/3, -16/3, \dots$

$r = -2$ हो: $-a = -4$, $a = 4$ । GP: $4, -8, 16, -32, \dots$

प्र.6 100 को क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में लिखना

उत्तर- n पद a से शुरू हों: $n(2a + n - 1)/2 = 100$, तो $n(2a + n - 1) = 200$ । दोनों गुणनखंडों की समता उलटी होती है (एक विषम, एक सम), और $200 = 8 \times 25$ ।

$n = 5$: $2a + 4 = 40$, $a = 18$: $18 + 19 + 20 + 21 + 22 = 100$ ।

$n = 8$: $2a + 7 = 25$, $a = 9$: $9 + 10 + \dots + 16 = 100$ ।

इसलिए ठीक दो तरीके हैं (अकेले 100 के अलावा)।

प्र.7 बैक्टीरिया: अभी 30, हर घंटे दुगुने

उत्तर- 2रे घंटे के अंत में: $30 \times 4 = 120$ । 4थे घंटे में: $30 \times 16 = 480$ । n वें घंटे में: 30×2^n ।

प्र.8 AP: $t_4 + t_8 = 24$ और $t_6 + t_{10} = 44$

उत्तर- $2a + 10d = 24$, तो $a + 5d = 12$ । और $2a + 14d = 44$, तो $a + 7d = 22$ ।

घटाओ: $2d = 10$, $d = 5$, $a = 12 - 25 = -13$ ।

पहले तीन पद: $-13, -8, -3$ । जाँच: $t_4 + t_8 = 2 + 22 = 24$ ✓।

प्र.9 सबसे छोटा n जिसके लिए $1 + 2 + \dots + n > 1000$

उत्तर- $n(n + 1)/2$: $n = 44$ पर 990 (कम)। $n = 45$ पर 1035। इसलिए $n = 45$ ।

प्र.10 GP: 2, 8, 32, ... में 131072 कौन-सा पद है?

उत्तर- $a = 2$, $r = 4$ । $2 \times 4^{n-1} = 131072$, $4^{n-1} = 65536 = 4^8$, इसलिए $n = 9$ ।

सुस्पष्ट: $t_n = 2 \times 4^{n-1}$ । पुनरावर्ति: $t_1 = 2$, $t_n = 4t_{n-1}$ ।

प्र.11 GP: पहले तीन पदों का योग $13/12$, गुणनफल -1

उत्तर- पद $a/r, a, ar$ मानो। गुणनफल $= a^3 = -1$, इसलिए $a = -1$ ।

योग: $-1/r - 1 - r = 13/12$, तो $r + 1/r = -25/12$, यानी $12r^2 + 25r + 12 = 0$, $(4r + 3)(3r + 4) = 0$

$r = -3/4$ या $-4/3$ । पद: $4/3, -1, 3/4$ (या यही तीन उलटे क्रम में: $3/4, -1, 4/3$)।

प्र.12 4थे, 10वें, 16वें पद x, y, z हैं। सिद्ध करो x, y, z GP में हैं

उत्तर- $x = ar^3, y = ar^9, z = ar^{15}$ । $y/x = r^6$ और $z/y = r^6$ । अनुपात बराबर हैं, इसलिए x, y, z GP में हैं (अनुपात r^6)।

प्र.13 GP: पहले तीन पदों का योग 26, वर्गों का योग 364

उत्तर- पद a, ar, ar^2 । $a(1 + r + r^2) = 26$ और $a^2(1 + r^2 + r^4) = 364$

$1 + r^2 + r^4 = (1 + r + r^2)(1 - r + r^2)$ का प्रयोग करो। दूसरे को पहले से भाग दो:

$a(1 - r + r^2) = 364/26 = 14$

26 में से घटाओ: $2ar = 12$, $ar = 6$ । जोड़ो: $2a(1 + r^2) = 40$, $a(1 + r^2) = 20$ । $a =$

$6/r$ रखो: $6 + 6r^2 = 20r$, $3r^2 - 10r + 3 = 0$, $r = 3$ या $1/3$ ।

GP: **2, 6, 18** ($r = 3$) या **18, 6, 2** ($r = 1/3$)। जाँच: $4 + 36 + 324 = 364$ ✓।

प्र.14 $P_1 = 1, P_2 = 2, P_n = P_1 + \dots + P_{n-1} + 1$

उत्तर- $P_3 = 1 + 2 + 1 = 4$ । $P_4 = 1 + 2 + 4 + 1 = 8$ । $P_5 = 16, P_6 = 32, P_7 = 64, P_8 = 128$

पद: **1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128**। सरल पुनरावर्ती नियम: $P_n = 2P_{n-1}$ । सुस्पष्ट: $P_n = 2^{n-1}$ ।

प्र.15 $w_1 = 1, w_2 = 2, w_n = w_1 + \dots + w_{n-2} + 2$

उत्तर- $w_3 = 1 + 2 = 3$ । $w_4 = 1 + 2 + 2 = 5$ । $w_5 = 1 + 2 + 3 + 2 = 8$ । $w_6 = 1 + 2 + 3 + 5 + 2 = 13$ । $w_7 = 21$ । $w_8 = 34$ ।

अनुक्रम: **1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34**। यह विरहांक-फिबोनाची अनुक्रम है!

शिक्षक की बात: अध्याय सार: AP: $t_n = a + (n - 1)d$, स्थिर अंतर, आलेख सीधी रेखा।
GP: $t_n = a r^{n-1}$, स्थिर अनुपात, आलेख मुड़ता है। $S_n = n(n + 1)/2$ सुस्पष्ट नियम n का प्रयोग करता है; पुनरावर्ती नियम पिछले पदों का। सिएरपिंस्की त्रिभुज जैसे फ्रैक्टल GP देते हैं।

