ENGLISH SECTION (Hindi terms in brackets)

The Baudhāyana-Pythagoras Theorem

Class 8 Maths (Ganita Prakash Part-II) • Notes + Step-by-Step Textbook Solutions + Board Questions (2026-27)

Chapter Review in Easy Language

1. Doubling and halving a square (वर्ग को दुगुना और आधा करना)

- *Doubling the side does* ***not*** *double the area: side 2a gives area* $4a^2$ = ***4 times***. *Baudhāyana (Śulba-Sūtra, c. 800 BCE, verse 1.9):* ***a square on the diagonal has double the area***.
- ***Why:*** *draw horizontal and vertical lines through the original square. The original square =* ***2*** *small congruent triangles; the new square on the diagonal =* ***4*** *of the same triangles. So area doubles. Next squares: 2, 4, 8 triangles.*
- ***Halving*** *= reverse: join the midpoints of the sides of a square. The tilted inner square (PQRS) has* ***half*** *the area (4 corner triangles = half of the big square). Half the side gives ¼ area, not ½.*

2. Hypotenuse of an isosceles right triangle (समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण)

- ***Hypotenuse*** *= side opposite the right angle (the longest side). Equal sides a, hypotenuse c: the square on c has double the area of the square on a, so* $\mathbf{c^2 = 2a^2}$, *i.e.* $\mathbf{c = a\sqrt{2}}$.
- *For a = 1:* $c^2 = 2$, *so* $c = \sqrt{2}$. *Bounds by squaring:* $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$. *Then* $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25 \Rightarrow$ $\mathbf{1.4 < \sqrt{2} < 1.5}$; $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164 \Rightarrow$ $\mathbf{1.41 < \sqrt{2} < 1.42}$; $1.414^2 = 1.999396$, $1.415^2 = 2.002225 \Rightarrow$ $\mathbf{1.414 < \sqrt{2} < 1.415}$. *Value:* $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$
- $\mathbf{\sqrt{2}}$ ***is not a terminating decimal:*** *a terminating decimal ending in a non-zero digit has a square ending in a non-zero digit (e.g. …4 → …6), so its square can never be exactly 2.000… Hence* $\sqrt{2}$ *goes on forever without ending.*
- $\mathbf{\sqrt{2}}$ ***is not a fraction m/n*** *(Euclid, c. 300 BCE): if* $\sqrt{2} = m/n$ *then* $2n^2 = m^2$. *In a square number every prime occurs an* ***even*** *number of times; on the left the prime 2 occurs an* ***odd*** *number of times, on the right an* ***even*** *number – impossible.*

3. The Baudhāyana-Pythagoras Theorem (बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय)

- ***Statement:*** *in a right-angled triangle with sides a, b and hypotenuse c,* $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$. *Verse 1.12: the square on the diagonal = sum of the squares on the two sides. Baudhāyana was the first to state it in this general form; Pythagoras (c. 500 BCE) lived about 200 years later, so it is called the* ***Baudhāyana-Pythagoras Theorem***.
- ***Proof idea (verse 2.1):*** *join squares* a^2 *and* b^2. *Mark a rectangle in the larger square using a side of the smaller one; its diagonal is c. Cut 3 pieces (T, U, V) and rearrange them into a*

square of side c. All 4 small triangles are congruent, so the 4 sides are equal; the angles x and $90° - x$ add to 90°, so each angle of the new figure is 90° ⇒ it is a **square** of area $c^2 = a^2 + b^2$.

- **Use:** if two sides of a right triangle are known, find the third. 3 cm and 4 cm: $c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c =$ **5 cm**. Hypotenuse is always the **longest** side.
- **Worked examples in the book (not repeated here):** (1) equal sides $12 \Rightarrow c = \sqrt{288}$, and $16^2 = 256 < 288 < 289 = 17^2$, so hypotenuse is between 16 and 17; (2) hypotenuse $\sqrt{72} \Rightarrow 2a^2 = 72 \Rightarrow a = 6$.

4. Baudhāyana triples (बौधायन त्रिक)

- A triple of positive integers (a, b, c) with $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ is a **Baudhāyana (Pythagorean) triple**. Baudhāyana listed (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37), (15, 36, 39). All triples with numbers ≤ 20: (3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (9,12,15), (8,15,17), (12,16,20).
- **Scaling:** if (a, b, c) is a triple then (ka, kb, kc) is also one, because $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. So there are **infinitely many** triples. A triple with no common factor > 1 is **primitive**: (3,4,5) is primitive, (9,12,15) is not. Dividing a triple by a common factor f gives a triple again.
- **Odd-number method:** sum of first n odd numbers $= n^2$; the nth odd number is $2n - 1$, so $\mathbf{(n-1)^2 + (2n-1) = n^2}$. If $2n - 1$ is a square (9, 25, 49...), we get a triple: $2n - 1 = 9 \Rightarrow n = 5 \Rightarrow 4^2 + 3^2 = 5^2$; $2n - 1 = 25 \Rightarrow n = 13 \Rightarrow 12^2 + 5^2 = 13^2$.

5. Fermat's Last Theorem and the lotus problem (फ़र्मा की अंतिम प्रमेय व कमल की समस्या)

- **Fermat** (17th century) wrote that $x^n + y^n = z^n$ has **no** solution in natural numbers when $\mathbf{n > 2}$, but the margin was 'too small' for his proof. For 300+ years nobody proved it. **Andrew Wiles**, who read about it at age 10 (1963), proved it in **1994**.
- **Līlāvatī lotus problem (Bhāskara II):** stem tip 1 unit above water; swayed, it touches water 3 units away. Let depth = x, stem length = $x + 1$. Right triangle 3, x, $x + 1$: $3^2 + x^2 = (x + 1)^2 \Rightarrow 9 = 2x + 1 \Rightarrow \mathbf{x = 4}$. Depth of lake = **4 units** (stem 5 units: 3-4-5 triple).

Important Terms (Glossary)

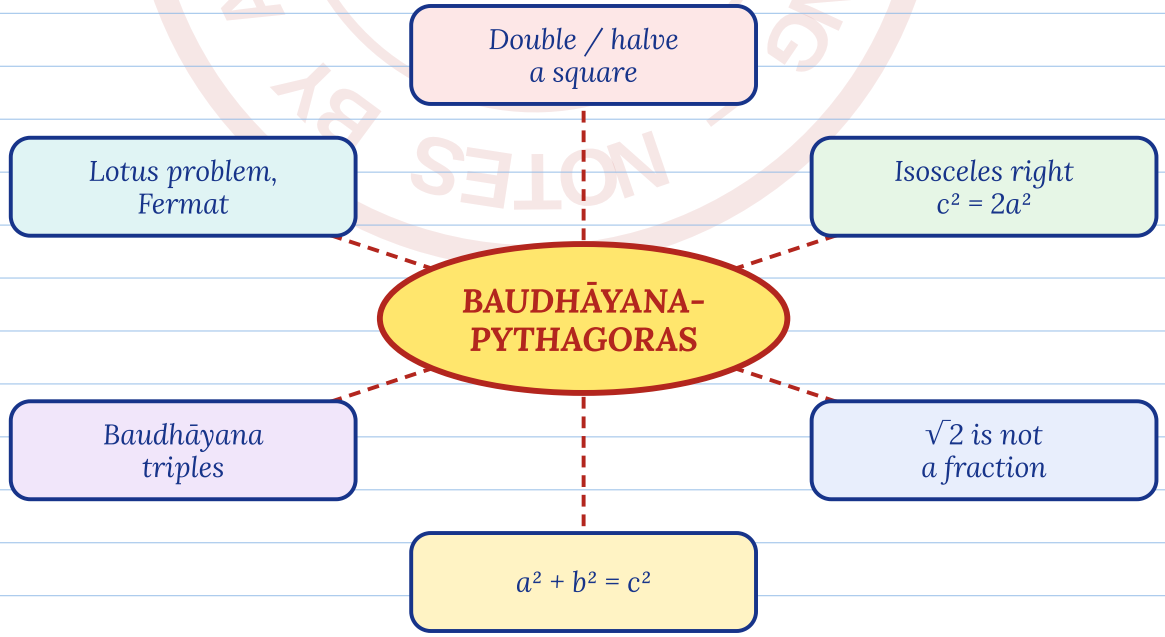
Term	Meaning
Hypotenuse	Side opposite the right angle; the longest side.
Baudhāyana-Pythagoras theorem	$a^2 + b^2 = c^2$ in a right triangle.
Śulba-Sūtra	Ancient Indian text on geometry (altar construction).

Baudhāyana triple	Integers (a, b, c) with $a^2 + b^2 = c^2$.
Primitive triple	Triple with no common factor greater than 1.
Scaled version	(ka, kb, kc) obtained from (a, b, c).
Lower / upper bound	Numbers just below / above a value $(1.414 < \sqrt{2} < 1.415)$.
Terminating decimal	Decimal that ends, e.g. 0.25.
Non-terminating decimal	Decimal that goes on forever, e.g. $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$
Isosceles right triangle	Right triangle with two equal sides $(c = a\sqrt{2})$.

Quick Revision & Formulas

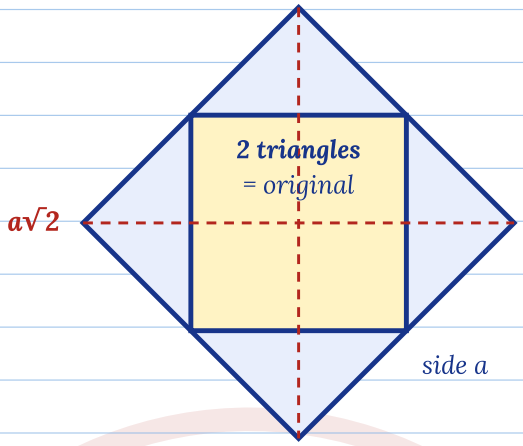
- Right triangle: $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$; $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$.
- Isosceles right triangle: $\mathbf{c^2 = 2a^2}$, $c = a\sqrt{2}$. Diagonal of a square of side $a = a\sqrt{2}$.
- $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$; $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ (neither terminating nor a fraction).
- Hypotenuse is the longest side. To test a triple: $(\text{smaller})^2 + (\text{smaller})^2 = (\text{largest})^2$?
- Triples: (3,4,5) (5,12,13) (8,15,17) (7,24,25) (12,35,37) (9,40,41); scaled: (3k,4k,5k).
- Odd-number method: $\mathbf{(n-1)^2 + (2n-1) = n^2}$ when $2n - 1$ is a perfect square.
- Rhombus: diagonals bisect at 90°, so $\text{side}^2 = (d_1/2)^2 + (d_2/2)^2$. Equilateral triangle side s: height $= (\sqrt{3}/2)s$, area $= (\sqrt{3}/4)s^2$.

Diagrams, Tables & Flowcharts



Concept map

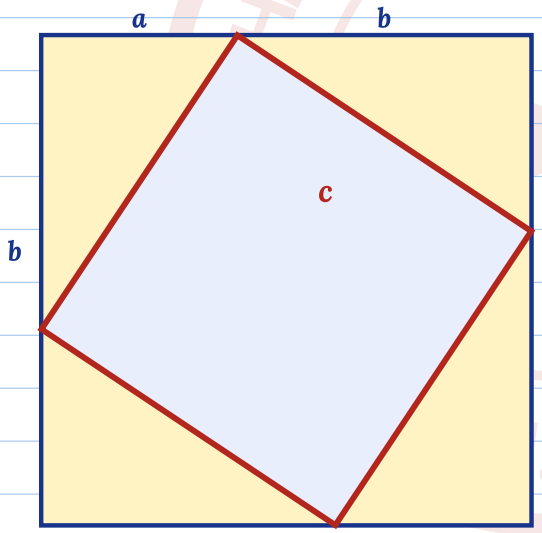
Doubling a square



New square on the diagonal
= 4 triangles
= 2 × original area

Square on the diagonal = 4 triangles = double the area

Why $a^2 + b^2 = c^2$ (area proof)



Big square: side a + b

4 triangles (yellow),
each area = ½ab

Inner square: side c

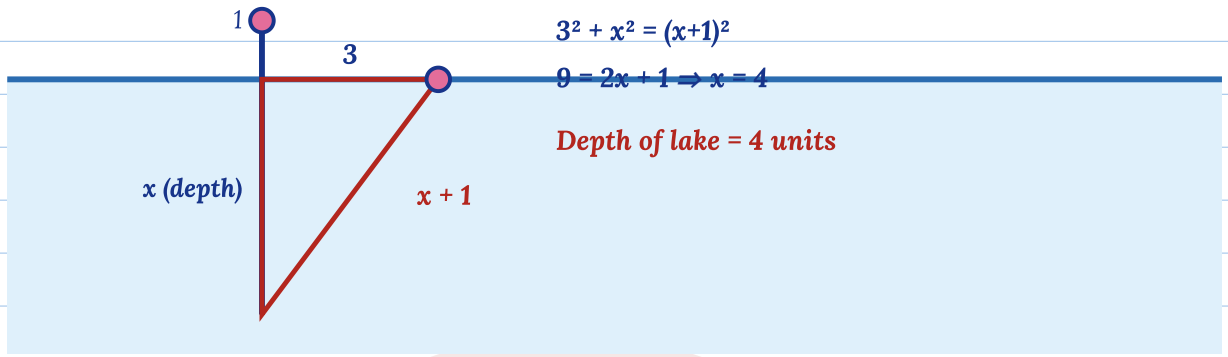
$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{1}{2}ab$

$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

Big square of side a + b = inner square c^2 + four right triangles

Lotus problem (Līlāvatī)



Right triangle with sides 3, x and x + 1

Table: bounds on the hypotenuse $c = a\sqrt{2}$

a	$c^2 = 2a^2$	Whole-number bounds	Bounds (1 decimal)
3	18	$4 < c < 5$	$4.2 < c < 4.3$
4	32	$5 < c < 6$	$5.6 < c < 5.7$
6	72	$8 < c < 9$	$8.4 < c < 8.5$
8	128	$11 < c < 12$	$11.3 < c < 11.4$
9	162	$12 < c < 13$	$12.7 < c < 12.8$

Table: Baudhāyana triples

Primitive triple	Check $a^2 + b^2 = c^2$	Scaled versions ($k = 2, 3$)
(3, 4, 5)	9 + 16 = 25	(6,8,10), (9,12,15)
(5, 12, 13)	25 + 144 = 169	(10,24,26), (15,36,39)
(8, 15, 17)	64 + 225 = 289	(16,30,34), (24,45,51)
(7, 24, 25)	49 + 576 = 625	(14,48,50), (21,72,75)
(12, 35, 37)	144 + 1225 = 1369	(24,70,74), (36,105,111)

Table: triples from odd squares $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$

Odd square $2n - 1$	n	Triple
9	5	(3, 4, 5)
25	13	(5, 12, 13)
49	25	(7, 24, 25)
81	41	(9, 40, 41)

121	61	(11, 60, 61)
169	85	(13, 84, 85)

Flowchart: finding a missing side

Find the hypotenuse (side opposite the right angle) ➤ Write $a^2 + b^2 = c^2$ ➤ Put the known numbers in the right places ➤ Solve for the square of the unknown side ➤ Take the square root (use bounds if not a perfect square)

Step-by-Step Textbook Solutions

Math Talk (p.34): Why do the extended sides of the original square pass through the vertices of the dotted square? Why are the small triangles congruent?

Ans. Step 1: The diagonal of a square bisects its angle: each corner angle 90° is cut into 45° + 45°.

Step 2: At each corner of the dotted square (angle 90°), the horizontal and vertical lines are the sides of the original square. They bisect that angle into 45° + 45°, so the lines go straight through the opposite vertex.

Step 3: Every small triangle has a right angle and two 45° angles, and its short sides are halves of the same diagonals/sides – so all are congruent (ASA).

Step 4: Original square = 2 triangles, new square = 4 triangles ⇒ area is ***double***.

Paper activity (p.35–36): (a) Doubling a square with paper; (b) Why is PQRS a square with half the area? (fold the corners so the creases pass through the midpoints)

Ans. (a) Cut the 2nd identical square along both diagonals into 4 triangles (5, 6, 7, 8). Place one triangle on each side of Square 1 with its ***hypotenuse on a side*** of Square 1. The outer legs of the 4 triangles form a tilted square of area = 1 square + 4 quarter-squares = 2 squares.

(b) Step 1: Fold so creases pass through the midpoints of the sides; join them to get PQRS. Step 2: Join QS and PR – the 4 corner triangles are right-angled and congruent (SAS: two equal halves of the sides, 90° between them). Step 3: So PQ = QR = RS = SP, and each angle of PQRS = 180° – 45° – 45° = 90° ⇒ ***PQRS is a square***. Step 4: The 4 corner triangles together are half the paper (each is half of a quarter), so PQRS has ***half*** the area.

Figure it Out (p.39) Q1: Two identical squares are each cut along a diagonal (pieces 1, 2 and 3,

4). Arrange the 4 pieces to make a square of double the area.

Ans. Step 1: Each piece is an isosceles right triangle with legs a and hypotenuse $a\sqrt{2}$.

Step 2: Take the 4 triangles and put their right-angled corners together at one point (centre), each hypotenuse facing outwards.

Step 3: The outer boundary has 4 equal sides, each $a\sqrt{2}$, and all angles 90°. It is a square of side $a\sqrt{2}$.

Step 4: Area = $(a\sqrt{2})^2 = 2a^2 = 2 \times$ (area of one given square). ✓

Figure it Out (p.39) Q2: Equal sides of an isosceles right triangle are (i) 3 (ii) 4 (iii) 6 (iv) 8 (v) 9. Find the hypotenuse and bounds with one decimal digit.

Ans. Formula: $c^2 = 2a^2$ (equal sides a).

(i) $a = 3$: $c^2 = 2 \times 9 = 18$. $4^2 = 16$ and $5^2 = 25$, so $4 < c < 5$. Try $4.2^2 = 17.64$ and $4.3^2 = 18.49 \Rightarrow c = \sqrt{18}$, **$4.2 < c < 4.3$**.

(ii) $a = 4$: $c^2 = 2 \times 16 = 32$. $5^2 = 25$, $6^2 = 36 \Rightarrow 5 < c < 6$. $5.6^2 = 31.36$, $5.7^2 = 32.49 \Rightarrow c = \sqrt{32}$, **$5.6 < c < 5.7$**.

(iii) $a = 6$: $c^2 = 72$. $8^2 = 64$, $9^2 = 81$. $8.4^2 = 70.56$, $8.5^2 = 72.25 \Rightarrow c = \sqrt{72}$, **$8.4 < c < 8.5$**.

(iv) $a = 8$: $c^2 = 128$. $11^2 = 121$, $12^2 = 144$. $11.3^2 = 127.69$, $11.4^2 = 129.96 \Rightarrow c = \sqrt{128}$, **$11.3 < c < 11.4$**.

(v) $a = 9$: $c^2 = 162$. $12^2 = 144$, $13^2 = 169$. $12.7^2 = 161.29$, $12.8^2 = 163.84 \Rightarrow c = \sqrt{162}$, **$12.7 < c < 12.8$**.

Figure it Out (p.40) Q3: The hypotenuse of an isosceles right triangle is 10. Find the other two sides.

Ans. Step 1: $c = 10$, so $c^2 = 100$.

Step 2: Use $c^2 = 2a^2$: $2a^2 = 100$.

Step 3: $a^2 = 100 \div 2 = 50$.

Step 4: $a = \sqrt{50}$. Since $7^2 = 49$ and $8^2 = 64$, a is just above 7; $7.0^2 = 49$ and $7.1^2 = 50.41 \Rightarrow$ **$7.0 < a < 7.1$**.

Answer: each equal side = $\sqrt{50}$ (≈ 7.07) units.

Math Talk (p.42): Why does Baudhāyana's method work for two squares of the same size? Does it agree with the earlier method? (And why are all angles of the new 4-sided figure 90°?)

Ans. Same size: if $a = b$, the right triangle has equal sides a, a and hypotenuse c with $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$. This is exactly the earlier result (square on the diagonal = double area), so the two methods **agree**.

Right angles: Step 1: the 4 triangles are congruent, so all 4 sides of the figure are equal (each c). Step 2: at each corner the angles are x (of one triangle), $90° - x$ (of the next) and the figure's angle; angles on a straight line = 180°, so the figure's angle = $180° - x - (90° - x) =$ **90°**. Step 3: equal sides and 4 right angles ⇒ it is a **square** of side c.

Figure it Out (p.47) Q1: Right triangle with shorter sides 5 cm and 12 cm. Find the hypotenuse.

Ans. Step 1: $a = 5$, $b = 12$.

Step 2: $c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$.

Step 3: $c = \sqrt{169} =$ **13 cm** ($13 \times 13 = 169$). *On drawing and measuring, the hypotenuse also reads 13 cm.*

Figure it Out (p.47) Q2: A short side is 8 cm and the hypotenuse is 17 cm. Find the third side.

Ans. Step 1: *Hypotenuse $c = 17$, one side $a = 8$, third side $b = ?$*

Step 2: $b^2 = c^2 - a^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$.

Step 3: $b = \sqrt{225} =$ **15 cm** ($15 \times 15 = 225$). *(8, 15, 17) is a Baudhāyana triple.*

Figure it Out (p.47) Q3: Construct a square whose area is triple, and five times, the area of a given square (Verse 1.10).

Ans. *Let the given square have side s (area s^2).*

Triple ($3s^2$): *Step 1: Draw the diagonal of the square: a square on it has area $2s^2$ (side $s\sqrt{2}$). Step 2: Make a right triangle with legs* **$s\sqrt{2}$** *and* **s**. *Step 3: Its hypotenuse c has $c^2 = 2s^2 + s^2 =$* **$3s^2$**. *Step 4: Draw a square on this hypotenuse – area is 3 times.*

Five times ($5s^2$): *Step 1: Take legs* **$2s$** *(two sides placed end to end) and* **s**. *Step 2: $c^2 = 4s^2 + s^2 =$* **$5s^2$**. *Step 3: The square on this hypotenuse has area 5 times the given square.*

Figure it Out (p.47) Q4: a, b are the legs and c the hypotenuse. Find the missing side: (i) $a = 5$, $b = 7$ (ii) $a = 8$, $b = 12$ (iii) $a = 9$, $c = 15$ (iv) $a = 7$, $b = 12$ (v) $a = 1.5$, $b = 3.5$.

Ans. (i) *Both are legs, so find c:* $c^2 = 25 + 49 = 74 \Rightarrow c = \sqrt{74}$. $8^2 = 64$, $9^2 = 81 \Rightarrow 8.6^2 = 73.96$, $8.7^2 = 75.69 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{74} \approx 8.6$**.

(ii) $c^2 = 64 + 144 = 208 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{208} \approx 14.4$** ($14^2 = 196$, $15^2 = 225$; $14.4^2 = 207.36$, $14.5^2 = 210.25$).

(iii) $a = 9$, $c = 15$: $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow$ **$b = 12$**.

(iv) $c^2 = 49 + 144 = 193 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{193} \approx 13.9$** ($13.9^2 = 193.21$).

(v) $c^2 = 1.5^2 + 3.5^2 = 2.25 + 12.25 = 14.5 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{14.5} \approx 3.8$** ($3.8^2 = 14.44$, $3.9^2 = 15.21$).

Math Talk (p.48): List all Baudhāyana triples ≤ 20. Are (30, 40, 50) and (300, 400, 500) triples? Primitive triples ≤ 20? 5 scaled versions? Does dividing by a common factor f work?

Ans. Triples ≤ 20: (3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (9,12,15), (8,15,17), (12,16,20).

(30,40,50): $900 + 1600 = 2500 = 50^2$ ✓ *yes.* **(300,400,500):** $90000 + 160000 = 250000 = 500^2$ ✓ *yes.*

Primitive (≤ 20): (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) – *no common factor > 1. (5,12,13): the only common factor is 1, so it is primitive.*

5 scaled versions ($k = 2...6$): (3,4,5) → (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20), (15,20,25), (18,24,30);

(5,12,13) → (10,24,26), (15,36,39), (20,48,52), (25,60,65), (30,72,78); (8,15,17) → (16,30,34), (24,45,51), (32,60,68), (40,75,85), (48,90,102). **None is primitive** (*k is a common factor*).

Dividing by f: (9,12,15) ÷ 3 = (3,4,5): 9 + 16 = 25 ✓. *In general* $a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow$ *dividing by* f^2: $(a/f)^2 + (b/f)^2 = (c/f)^2$ – *so* $(a/f, b/f, c/f)$ *is a triple.*

Figure it Out (p.50) Q1: Find 5 more Baudhāyana triples using the odd-number idea, $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$.

Ans. *Idea:* *choose an odd square for* $2n-1$, *find* $n = (\text{square} + 1) \div 2$, *then the triple is* $(n-1, \sqrt{(2n-1)}, n)$.

1. 49: $n = 25$; $24^2 + 49 = 576 + 49 = 625 = 25^2 \Rightarrow$ **(7, 24, 25)**.

2. 81: $n = 41$; $40^2 + 81 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2 \Rightarrow$ **(9, 40, 41)**.

3. 121: $n = 61$; $60^2 + 121 = 3600 + 121 = 3721 = 61^2 \Rightarrow$ **(11, 60, 61)**.

4. 169: $n = 85$; $84^2 + 169 = 7056 + 169 = 7225 = 85^2 \Rightarrow$ **(13, 84, 85)**.

5. 225: $n = 113$; $112^2 + 225 = 12544 + 225 = 12769 = 113^2 \Rightarrow$ **(15, 112, 113)**.

Figure it Out (p.50) Q2 and Math Talk Q3: Does this method give non-primitive triples? Are there primitive triples it cannot give?

Ans. Q2: *In every triple from this method, one leg is* $n-1$ *and the hypotenuse is* n – *the numbers just* ***1 apart****. Two consecutive numbers have no common factor greater than 1 (any common factor would also divide their difference 1). So the triple is always* ***primitive*** *– the method gives* ***no*** *non-primitive triples.*

Q3: Yes, *some primitive triples cannot be obtained. E.g. (8, 15, 17): the hypotenuse minus a leg is 17 – 15 = 2 (not 1), and the other leg 8 is even (the method needs an odd square). Similarly (12, 35, 37), (20, 21, 29).*

Figure it Out (p.52–53) Q1: Find the diagonal of a square with side 5 cm.

Ans. Step 1: *The diagonal cuts the square into 2 isosceles right triangles with legs 5, 5.*

Step 2: $c^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ (*or* $2a^2 = 2 \times 25$).

Step 3: $c = \sqrt{50}$. $7^2 = 49$, $8^2 = 64 \Rightarrow 7.0^2 = 49$, $7.1^2 = 50.41$.

Answer: *diagonal* $= \sqrt{50}$ *cm, between 7.0 and 7.1 cm* (≈ 7.07 *cm*).

Figure it Out (p.53) Q2: Find the missing sides of the six right triangles in the figure: (7, 9), (4, 10), (40, 41), (10, √200), (10, √150), (27, 45).

Ans. *In each triangle first find which side is opposite the right angle (the hypotenuse).*

1. Legs 7 and 9: $c^2 = 49 + 81 = 130 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{130} \approx 11.4$**.

2. Legs 4 and 10 (*right angle between them*): $c^2 = 16 + 100 = 116 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{116} \approx 10.8$**.

3. Hypotenuse 41, leg 40: $b^2 = 41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81 \Rightarrow$ **$b = 9$**.

4. Hypotenuse √200, leg 10: $b^2 = 200 - 100 = 100 \Rightarrow$ **$b = 10$**.

5. Legs 10 and √150: $c^2 = 100 + 150 = 250 \Rightarrow$ **$c = \sqrt{250} \approx 15.8$**.

6. Hypotenuse 45, leg 27: $b^2 = 45^2 - 27^2 = 2025 - 729 = 1296 \Rightarrow$ **$b = 36$** ($36 \times 36 = 1296$; (27, 36, 45) = 9 × (3, 4, 5)).

Figure it Out (p.53) Q3: Find the side of a rhombus whose diagonals are 24 and 70 units.

Ans. Step 1: The diagonals of a rhombus bisect each other at **right angles**. So half-diagonals are $24 \div 2 = 12$ and $70 \div 2 = 35$.

Step 2: One side of the rhombus is the hypotenuse of a right triangle with legs 12 and 35.

Step 3: $side^2 = 12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369$.

Step 4: $side = \sqrt{1369} =$ **37 units** ($37 \times 37 = 1369$). (12, 35, 37) is a Baudhāyana triple.

Figure it Out (p.53) Q4: Is the hypotenuse the longest side of a right triangle? Justify.

Ans. Step 1: In a right triangle $c^2 = a^2 + b^2$.

Step 2: b^2 is positive, so $c^2 = a^2 + b^2$ is **greater than a^2**, hence $c > a$.

Step 3: In the same way $c^2 > b^2$, hence $c > b$.

Answer: Yes. The hypotenuse is always the longest side. (Example: 3, 4, 5 – the hypotenuse 5 is the longest.)

Figure it Out (p.53) Q5: True or False – every Baudhāyana triple is either primitive or a scaled version of a primitive triple.

Ans. True.

Step 1: Take any triple (a, b, c). If it has no common factor > 1, it is primitive.

Step 2: Otherwise let f be the greatest common factor of a, b, c ($f > 1$).

Step 3: Dividing $a^2 + b^2 = c^2$ by f^2 shows $(a/f, b/f, c/f)$ is a triple, and it has no common factor – so it is primitive.

Step 4: Then $(a, b, c) = f \times (a/f, b/f, c/f)$, a scaled version of a primitive triple. Example: (9,12,15) = 3 × (3,4,5).

Figure it Out (p.53) Q6: Give 5 examples of rectangles whose sides and diagonals are all integers.

Ans. Idea: the diagonal of a rectangle is the hypotenuse of a right triangle made by two sides, so use Baudhāyana triples (side, side, diagonal).

1. 3 × 4, diagonal 5 (9 + 16 = 25). **2.** 6 × 8, diagonal 10 (36 + 64 = 100). **3.** 5 × 12, diagonal 13 (25 + 144 = 169). **4.** 8 × 15, diagonal 17 (64 + 225 = 289). **5.** 7 × 24, diagonal 25 (49 + 576 = 625).

Figure it Out (p.53) Q7: Construct a square whose area equals the difference of the areas of squares of sides 5 and 7 units.

Ans. Step 1: Required area $= 7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$.

Step 2: Use $c^2 = a^2 + b^2$ the other way: if hypotenuse $c = 7$ and one side $a = 5$, then $b^2 = 49 -$

$25 = 24$, so $b = \sqrt{24}$.

Step 3 (construction): Draw AB = 5 units. At B draw a line perpendicular to AB. With centre A and radius 7 units draw an arc cutting this perpendicular at C.

Step 4: Then $BC = \sqrt{(7^2 - 5^2)} = \sqrt{24}$. Draw a square on BC: its area = $(\sqrt{24})^2 = 24 = 49 - 25$. ✓

Figure it Out (p.53) Q8 (Math Talk/Try This): Using grid dots as vertices, can you make a square of area (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5? (ii) Which integer areas are possible on an infinite grid?

Ans. Idea: a square whose side joins two dots that are a units across and b units up has $side^2 = a^2 + b^2$ (Baudhāyana), so its area is $a^2 + b^2$.

(i)(a) Area 2: $a = 1, b = 1$ $(1 + 1)$ – tilted square joining mid-points of a 2 × 2 grid: **possible**.

(b) Area 3: need $a^2 + b^2 = 3$, but 0, 1, 4, ... give only $1 + 1 = 2$ or $1 + 4 = 5$ – no pair works: **not possible**.

(c) Area 4: $a = 2, b = 0$ (a plain 2 × 2 square): **possible**.

(d) Area 5: $a = 1, b = 2$ $(1 + 4)$: **possible** – a square tilted like a knight's move.

(ii) Possible areas are exactly the numbers that are **a sum of two squares** (0 allowed): 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, ... Not possible: 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, ...

Figure it Out (p.54) Q9: Find the area of an equilateral triangle with side 6 units.

Ans. Step 1: Draw the altitude from the top vertex to the base. It bisects the base (the two small right triangles are congruent by RHS), so each half = 6 ÷ 2 = 3.

Step 2: In the right triangle: hypotenuse = 6, base = 3, height $h = ?$ $h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27$ $\Rightarrow h = \sqrt{27}$ $(= 3\sqrt{3} \approx 5.2; 5.1^2 = 26.01, 5.2^2 = 27.04)$.

Step 3: Area = ½ × base × height = ½ × 6 × $\sqrt{27}$ = $3\sqrt{27}$ = **$9\sqrt{3} \approx 15.6$ square units** ($\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, so $3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$).

Puzzle – Find the Colours! (p.54): 3 boxes of red, blue, green balls are labelled RED, BLUE, GREEN, but every label is wrong. Open only one box to fix all labels.

Ans. Step 1: Open the box labelled **RED**. Its label is wrong, so it cannot hold red – it holds blue or green.

Case A – you see BLUE: Step 2: this box is the blue box, so relabel it BLUE. Step 3: the two remaining labels BLUE and GREEN go on boxes holding red and green. The box labelled GREEN cannot hold green (wrong label), so it holds **red**. Step 4: so the box labelled BLUE holds **green**.

Case B – you see GREEN: Step 2: relabel it GREEN. Step 3: remaining colours red and blue. The box labelled BLUE cannot hold blue, so it holds **red**; the box labelled GREEN holds **blue**.

Result: one opened box fixes all three labels, because every label was wrong.

Board-Pattern Questions – 1 Mark

1. State the Baudhāyana-Pythagoras theorem. (1)

Ans. In a right triangle, $a^2 + b^2 = c^2$, where c is the hypotenuse.

2. Which side of a right triangle is the longest? (1)

Ans. The hypotenuse.

3. Hypotenuse of a right triangle with legs 3 and 4? (1)

Ans. 5.

4. Write c^2 for an isosceles right triangle with equal sides a. (1)

Ans. $c^2 = 2a^2$.

5. Is (6, 8, 10) a Baudhāyana triple? (1)

Ans. Yes: $36 + 64 = 100$.

6. Is (5, 12, 13) primitive? (1)

Ans. Yes – no common factor greater than 1.

7. Between which two decimals (3 places) does $\sqrt{2}$ lie? (1)

Ans. $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$.

8. Can $\sqrt{2}$ be written as a fraction m/n? (1)

Ans. No – it is not rational (Euclid's proof).

9. Find the third side if the hypotenuse is 13 and one side is 5. (1)

Ans. 12.

10. Who proved Fermat's Last Theorem and in which year? (1)

Ans. Andrew Wiles, 1994.

11. If (a, b, c) is a triple, is (2a, 2b, 2c) a triple? (1)

Ans. Yes – a scaled version.

12. Hypotenuse when equal sides are 1? (1)

Ans. $\sqrt{2}$.

Board-Pattern Questions – 3 Marks

1. Find the hypotenuse of a right triangle with legs 8 and 15 and say whether the triple is primitive. (3)

Ans. $c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow c = 17$. The triple (8, 15, 17) has no common factor > 1, so it is primitive.

2. The hypotenuse of an isosceles right triangle is 10. Find the equal sides, with bounds. (3)

Ans. $2a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50}$. $7.0^2 = 49$ and $7.1^2 = 50.41$, so $7.0 < a < 7.1$ (≈ 7.07).

3. Find the side of a rhombus whose diagonals are 10 and 24. (3)

Ans. Half diagonals 5 and 12 meet at 90°. $side^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow side = 13$.

4. Show that if (a, b, c) is a Baudhāyana triple then (ka, kb, kc) is also one. (3)

Ans. $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$. Hence (ka, kb, kc) is a triple.

5. The hypotenuse of an isosceles right triangle is √98. Find the equal sides. (3)

Ans. $c^2 = 98 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$.

Board-Pattern Questions – 5 Marks

1. Prove the Baudhāyana-Pythagoras theorem using a square of side a + b. (5)

Ans. Step 1: Draw a square of side $(a + b)$; its area $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Step 2: Mark a point on each side so that the sides are cut into a and b, and join them to get four congruent right triangles with legs a, b and an inner quadrilateral with sides c.

Step 3: The inner figure has 4 equal sides and each angle $= 180° - x - (90° - x) = 90°$, so it is a square of area c^2.

Step 4: Area of 4 triangles $= 4 \times \frac{1}{2}ab = 2ab$.

Step 5: $(a + b)^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow \mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$.

2. A lotus stem's tip is 2 units above water. Swayed by wind, the tip touches the water 4 units from its original place. Find the depth of the water. (5)

Ans. Step 1: Let the depth (stem under water) = x; total stem = x + 2.

Step 2: Stem is perpendicular to the water, so we get a right triangle with sides 4, x and hypotenuse x + 2.

Step 3: $4^2 + x^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow 16 + x^2 = x^2 + 4x + 4$.

Step 4: Subtract x^2 from both sides: $16 = 4x + 4 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow \mathbf{x = 3}$.

Step 5: Check: $16 + 9 = 25 = 5^2$ (3-4-5 triple). Depth = 3 units.

3. Using $(n - 1)^2 + (2n - 1) = n^2$, generate three Baudhāyana triples from odd squares 25, 49, 81 and show that they are primitive. (5)

Ans. Step 1: n = (odd square + 1) ÷ 2.

Step 2: $25 \Rightarrow n = 13$: $12^2 + 25 = 144 + 25 = 169 = 13^2 \Rightarrow (5, 12, 13)$.

Step 3: $49 \Rightarrow n = 25$: $24^2 + 49 = 576 + 49 = 625 = 25^2 \Rightarrow (7, 24, 25)$.

Step 4: $81 \Rightarrow n = 41$: $40^2 + 81 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2 \Rightarrow (9, 40, 41)$.

Step 5: In each triple the hypotenuse and one leg are consecutive numbers (13 & 12, 25 & 24, 41 & 40). Consecutive numbers have no common factor > 1, so each triple is primitive.

हिन्दी भाग (Hindi Section)

बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय

कक्षा 8 गणित (गणित प्रकाश भाग-II) • नोट्स + चरण-दर-चरण हल + बोर्ड प्रश्न (2026-27)

आसान भाषा में अध्याय की समीक्षा

1. वर्ग को दुगुना और आधा करना

- भुजा दुगुनी करने पर क्षेत्रफल दुगुना **नहीं** होता : भुजा 2a का क्षेत्रफल $4a^2$ = **4 गुना**। बौधायन (शुल्ब-सूत्र, लगभग 800 ई.पू., श्लोक 1.9) : **विकर्ण पर बना वर्ग दुगुने क्षेत्रफल का होता है**।
- **क्यों :** मूल वर्ग से क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर रेखाएँ खींचो। मूल वर्ग = **2** छोटे सर्वांगसम त्रिभुज ; विकर्ण पर बना वर्ग = उन्हीं के **4** त्रिभुज। अत: क्षेत्रफल दुगुना। अगले वर्ग : 2, 4, 8 त्रिभुज।
- **आधा करना** = उल्टा काम : वर्ग की भुजाओं के मध्य-बिंदु मिलाओ। भीतरी तिरछा वर्ग PQRS **आधे** क्षेत्रफल का होता है (4 कोने के त्रिभुज = बड़े वर्ग का आधा)। आधी भुजा से ¼ क्षेत्रफल मिलता है, ½ नहीं।

2. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण

- **कर्ण** = समकोण के सामने की भुजा (सबसे लंबी)। बराबर भुजाएँ a, कर्ण c: c पर बने वर्ग का क्षेत्रफल a वाले वर्ग का दुगुना, अत: $\mathbf{c^2 = 2a^2}$, यानी $\mathbf{c = a\sqrt{2}}$।
- a = 1 के लिए $c^2 = 2$, अत: $c = \sqrt{2}$। वर्ग करके सीमाएँ : $1^2 = 1 < 2 < 2^2 = 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$। फिर $1.4^2 = 1.96$, $1.5^2 = 2.25 \Rightarrow$ **$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$** ; $1.41^2 = 1.9881$, $1.42^2 = 2.0164 \Rightarrow$ **$1.41 < \sqrt{2} < 1.42$** ; $1.414^2 = 1.999396$, $1.415^2 = 2.002225 \Rightarrow$ **$1.414 < \sqrt{2} < 1.415$**। मान : $\sqrt{2}$ = 1.41421356…
- **$\sqrt{2}$ समाप्त होने वाला दशमलव नहीं है :** अंत में शून्येतर अंक वाले समाप्त दशमलव का वर्ग भी अंत में शून्येतर अंक वाला होता है (जैसे …4 → …6), इसलिए उसका वर्ग ठीक 2.000… नहीं हो सकता। अत: $\sqrt{2}$ कभी समाप्त नहीं होता।
- **$\sqrt{2}$ भिन्न m/n नहीं है** (यूक्लिड, लगभग 300 ई.पू.) : यदि $\sqrt{2} = m/n$ तो $2n^2 = m^2$। किसी वर्ग संख्या में हर अभाज्य **सम** बार आता है ; बाएँ पक्ष में अभाज्य 2 **विषम** बार और दाएँ में **सम** बार आता है – असंभव।

3. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय

- **कथन :** समकोण त्रिभुज में, जिसकी भुजाएँ a, b और कर्ण c है, $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$। श्लोक 1.12 : विकर्ण पर बना वर्ग = दोनों भुजाओं पर बने वर्गों का योग। इसे इस व्यापक रूप में सबसे पहले बौधायन ने कहा ; पाइथागोरस (लगभग 500 ई.पू.) लगभग 200 वर्ष बाद हुए, इसलिए इसे **बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय** कहते हैं।
- **उपपत्ति का विचार (श्लोक 2.1) :** वर्ग a^2 और b^2 को जोड़ो। बड़े वर्ग में छोटे की एक भुजा से आयत चिह्नित करो ; उसका विकर्ण c है। 3 टुकड़े (T, U, V) काटकर c भुजा वाले वर्ग में जमाओ।

चारों छोटे त्रिभुज सर्वांगसम हैं अत: चारों भुजाएँ बराबर; कोण x और 90° – x का योग 90°, इसलिए हर कोण 90° ⇒ यह c^2 क्षेत्रफल वाला **वर्ग** है = $a^2 + b^2$।

- **उपयोग :** समकोण त्रिभुज की दो भुजाएँ पता हों तो तीसरी निकालो। 3 सेमी, 4 सेमी : $c^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5$ **सेमी**। कर्ण हमेशा **सबसे लंबी** भुजा होता है।
- **पुस्तक के हल किए उदाहरण (यहाँ दोहराए नहीं) :** (1) बराबर भुजाएँ 12 ⇒ c = √288, और $16^2 = 256 < 288 < 289 = 17^2$, अत: कर्ण 16 और 17 के बीच; (2) कर्ण √72 ⇒ $2a^2 = 72 \Rightarrow a = 6$।

4. बौधायन त्रिक

- धनात्मक पूर्णांकों का त्रिक (a, b, c) जिसमें $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$ हो, **बौधायन (पाइथागोरस) त्रिक** कहलाता है। बौधायन ने (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37), (15, 36, 39) बताए। 20 तक के सभी त्रिक : (3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (9,12,15), (8,15,17), (12,16,20)।
- **गुणन :** यदि (a, b, c) त्रिक है तो (ka, kb, kc) भी त्रिक है, क्योंकि $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$। अत: **अनंत** त्रिक हैं। जिस त्रिक में 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो वह **आद्य (primitive)** है : (3,4,5) आद्य है, (9,12,15) नहीं। उभयनिष्ठ गुणनखंड f से भाग देने पर फिर त्रिक मिलता है।
- **विषम संख्या विधि :** पहली n विषम संख्याओं का योग = n^2; n-वीं विषम संख्या 2n – 1 है, अत: $\mathbf{(n-1)^2 + (2n-1) = n^2}$। यदि 2n – 1 वर्ग संख्या (9, 25, 49…) हो तो त्रिक मिलता है : 2n – 1 = 9 ⇒ n = 5 ⇒ $4^2 + 3^2 = 5^2$; 2n – 1 = 25 ⇒ n = 13 ⇒ $12^2 + 5^2 = 13^2$।

5. फ़र्मा की अंतिम प्रमेय व कमल की समस्या

- **फ़र्मा** (17वीं शताब्दी) ने लिखा कि n > 2 के लिए $x^n + y^n = z^n$ का प्राकृत संख्याओं में **कोई हल नहीं** है, पर प्रमाण के लिए हाशिया 'बहुत छोटा' था। 300 से अधिक वर्षों तक कोई सिद्ध न कर सका। **एंड्रयू वाइल्स** ने, जिन्होंने 10 वर्ष की आयु (1963) में इसके बारे में पढ़ा था, इसे **1994** में सिद्ध किया।
- **लीलावती की कमल समस्या (भास्कर द्वितीय) :** डंठल का सिरा पानी से 1 इकाई ऊपर; हवा से झुककर 3 इकाई दूर पानी को छूता है। गहराई = x, डंठल = x + 1। समकोण त्रिभुज 3, x, x + 1: $3^2 + x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow 9 = 2x + 1 \Rightarrow \mathbf{x = 4}$। झील की गहराई = **4 इकाई** (डंठल 5 इकाई : 3-4-5 त्रिक)।

महत्वपूर्ण शब्द (शब्दावली)

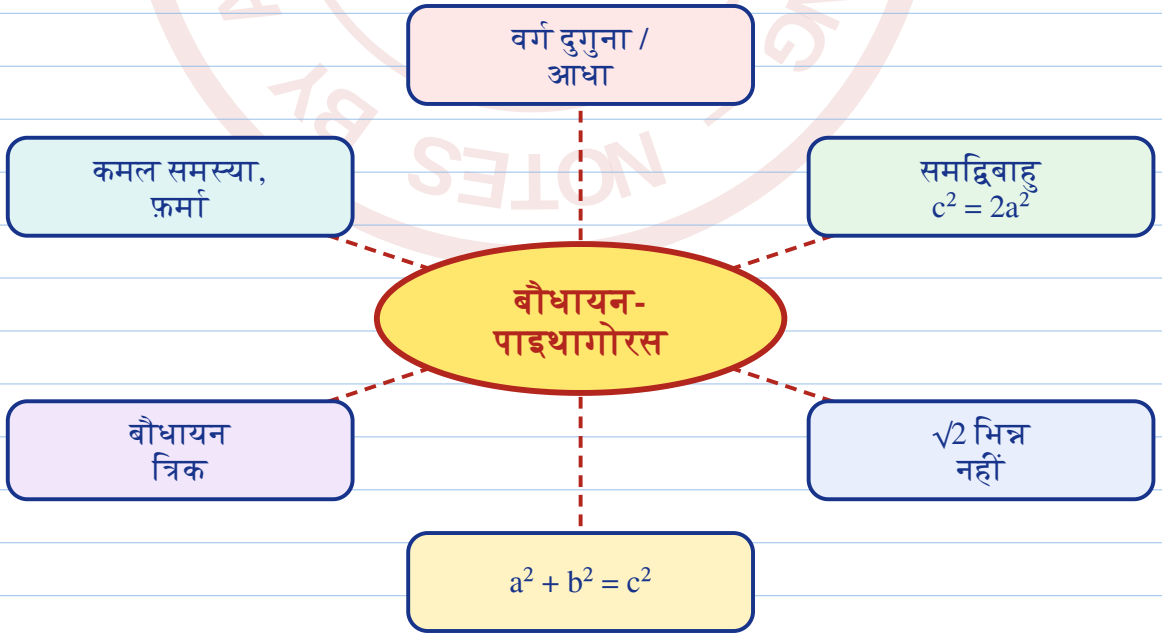
शब्द	अर्थ / परिभाषा
कर्ण	समकोण के सामने की भुजा; सबसे लंबी भुजा।
बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय	समकोण त्रिभुज में $a^2 + b^2 = c^2$।
शुल्ब-सूत्र	ज्यामिति (वेदी निर्माण) पर प्राचीन भारतीय ग्रंथ।

बौधायन त्रिक	पूर्णांक (a, b, c) जिनमें $a^2 + b^2 = c^2$।
आद्य त्रिक	वह त्रिक जिसमें 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो।
गुणित त्रिक	(a, b, c) से मिला (ka, kb, kc)।
निम्न / उच्च सीमा	किसी मान से ठीक नीचे / ऊपर की संख्याएँ।
समाप्त दशमलव	दशमलव जो समाप्त हो जाए, जैसे 0.25।
असमाप्त दशमलव	दशमलव जो कभी समाप्त न हो, जैसे $\sqrt{2} = 1.41421\ldots$
समद्विबाहु समकोण त्रिभुज	दो बराबर भुजाओं वाला समकोण त्रिभुज ($c = a\sqrt{2}$)।

त्वरित पुनरावृत्ति व सूत्र

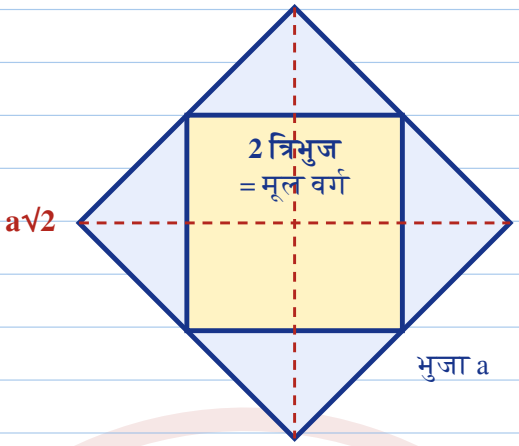
- समकोण त्रिभुज : $\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$; $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; $a = \sqrt{(c^2 - b^2)}$।
- समद्विबाहु समकोण : $\mathbf{c^2 = 2a^2}$, $c = a\sqrt{2}$। भुजा a वाले वर्ग का विकर्ण = $a\sqrt{2}$।
- $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$; $\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$ (न समाप्त, न भिन्न)।
- कर्ण सबसे लंबी भुजा। त्रिक जाँचने को : (छोटी)^2 + (छोटी)^2 = (सबसे बड़ी)^2 ?
- त्रिक : (3,4,5) (5,12,13) (8,15,17) (7,24,25) (12,35,37) (9,40,41) ; गुणित : (3k,4k,5k)।
- विषम संख्या विधि : $\mathbf{(n-1)^2 + (2n-1) = n^2}$ जब $2n - 1$ पूर्ण वर्ग हो।
- समचतुर्भुज : विकर्ण 90° पर समद्विभाजित होते हैं, अत: भुजा^{2} = $(d_1/2)^2 + (d_2/2)^2$। समबाहु त्रिभुज भुजा s: ऊँचाई = $(\sqrt{3}/2)s$, क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4)s^2$।

चित्र, तालिकाएँ और फ्लोचार्ट



अवधारणा-मानचित्र

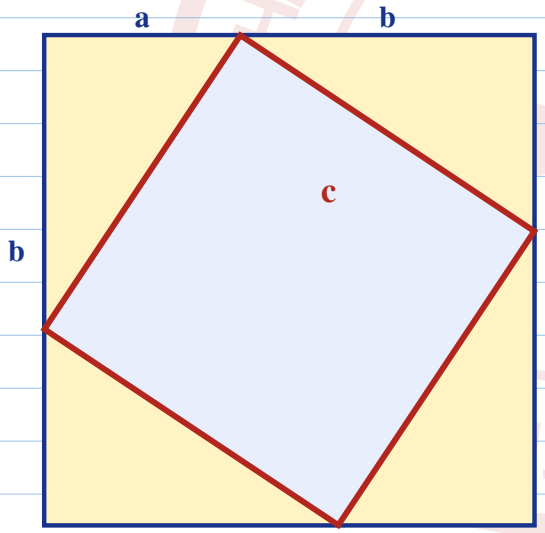
वर्ग को दुगुना करना



विकर्ण पर नया वर्ग
= 4 त्रिभुज
= मूल क्षेत्रफल का 2 गुना

विकर्ण पर वर्ग = 4 त्रिभुज = दुगुना क्षेत्रफल

$a^2 + b^2 = c^2$ क्यों (क्षेत्रफल से उपपत्ति)



बड़ा वर्ग : भुजा a + b

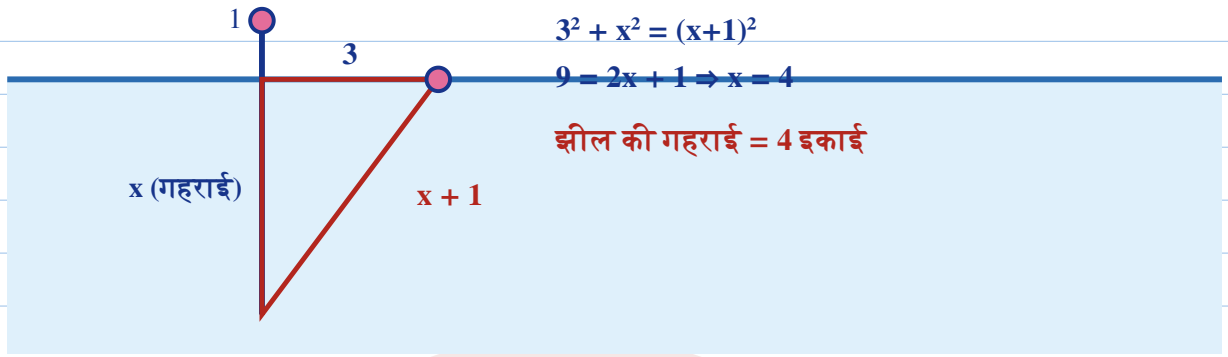
4 त्रिभुज (पीले),
हर एक का क्षेत्रफल = ½ab

भीतरी वर्ग : भुजा c

$(a + b)^2 = c^2 + 4 \times ½ab$
$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

बड़ा वर्ग $(a + b)$ = भीतरी वर्ग c^2 + चार समकोण त्रिभुज

कमल की समस्या (लीलावती)



समकोण त्रिभुज : भुजाएँ 3, x और x + 1

तालिका : कर्ण $c = a\sqrt{2}$ की सीमाएँ

a	$c^2 = 2a^2$	पूर्ण संख्या सीमा	सीमा (1 दशमलव)
3	18	$4 < c < 5$	$4.2 < c < 4.3$
4	32	$5 < c < 6$	$5.6 < c < 5.7$
6	72	$8 < c < 9$	$8.4 < c < 8.5$
8	128	$11 < c < 12$	$11.3 < c < 11.4$
9	162	$12 < c < 13$	$12.7 < c < 12.8$

तालिका : बौधायन त्रिक

आद्य त्रिक	जाँच $a^2 + b^2 = c^2$	गुणित त्रिक (k = 2, 3)
(3, 4, 5)	9 + 16 = 25	(6,8,10), (9,12,15)
(5, 12, 13)	25 + 144 = 169	(10,24,26), (15,36,39)
(8, 15, 17)	64 + 225 = 289	(16,30,34), (24,45,51)
(7, 24, 25)	49 + 576 = 625	(14,48,50), (21,72,75)
(12, 35, 37)	144 + 1225 = 1369	(24,70,74), (36,105,111)

तालिका : विषम वर्गों से त्रिक

विषम वर्ग 2n − 1	n	त्रिक
9	5	(3, 4, 5)
25	13	(5, 12, 13)
49	25	(7, 24, 25)
81	41	(9, 40, 41)

121	61	(11, 60, 61)
169	85	(13, 84, 85)

फ्लोचार्ट : लुप्त भुजा ज्ञात करना

कर्ण पहचानो (समकोण के सामने की भुजा) ➤ $a^2 + b^2 = c^2$ लिखो ➤ ज्ञात संख्याएँ सही जगह रखो ➤ अज्ञात भुजा का वर्ग निकालो ➤ वर्गमूल लो (पूर्ण वर्ग न हो तो सीमाएँ लिखो)

पाठ्यपुस्तक के चरण-दर-चरण हल

गणित चर्चा (पृ.34) : मूल वर्ग की बढ़ाई गई भुजाएँ बिंदीदार वर्ग के शीर्षों से क्यों गुजरती हैं ? छोटे त्रिभुज सर्वांगसम क्यों हैं ?

उत्तर : चरण 1 : वर्ग का विकर्ण उसके कोण को समद्विभाजित करता है : 90° का कोण 45° + 45° में बँटता है।

चरण 2 : बिंदीदार वर्ग के हर कोने (90°) पर क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर रेखाएँ मूल वर्ग की भुजाएँ हैं। वे उस कोण को 45° + 45° में बाँटती हैं, इसलिए रेखाएँ सीधे सामने वाले शीर्ष से गुजरती हैं।

चरण 3 : हर छोटे त्रिभुज में एक समकोण और दो 45° के कोण हैं तथा उसकी छोटी भुजाएँ उन्हीं रेखाओं के बराबर भाग हैं – अत: सभी सर्वांगसम (ASA) हैं।

चरण 4 : मूल वर्ग = 2 त्रिभुज, नया वर्ग = 4 त्रिभुज ⇒ क्षेत्रफल **दुगुना**।

कागज़ गतिविधि (पृ.35–36) : (a) कागज़ से वर्ग दुगुना करना ; (b) PQRS वर्ग क्यों है और उसका क्षेत्रफल आधा क्यों ? (कोने मोड़ो ताकि तह-रेखाएँ भुजाओं के मध्य-बिंदुओं से गुजरें)

उत्तर : (a) दूसरे समान वर्ग को दोनों विकर्णों पर काटकर 4 त्रिभुज (5, 6, 7, 8) बनाओ। हर त्रिभुज का **कर्ण** वर्ग 1 की एक भुजा पर रखो। 4 त्रिभुजों की बाहरी भुजाएँ एक तिरछा वर्ग बनाती हैं जिसका क्षेत्रफल = 1 वर्ग + 4 चौथाई-वर्ग = 2 वर्ग।

(b) चरण 1 : कोने ऐसे मोड़ो कि तह-रेखाएँ मध्य-बिंदुओं से गुजरें ; उन्हें मिलाकर PQRS बनाओ। चरण 2 : QS और PR जोड़ो – 4 कोने वाले त्रिभुज समकोण और सर्वांगसम हैं (SAS: भुजाओं के दो बराबर आधे भाग और बीच का कोण 90°)। चरण 3 : अत: PQ = QR = RS = SP और PQRS का हर कोण = 180° – 45° – 45° = 90° ⇒ **PQRS वर्ग है**। चरण 4 : 4 कोने के त्रिभुज मिलकर कागज़ का आधा हैं (हर एक चौथाई का आधा), इसलिए PQRS का क्षेत्रफल **आधा** है।

Figure it Out (पृ.39) प्र.1 : दो समान वर्ग हर एक विकर्ण पर कटे हैं (टुकड़े 1, 2 और 3, 4)। 4 टुकड़ों से दुगुने क्षेत्रफल का वर्ग बनाओ।

उत्तर : चरण 1 : हर टुकड़ा समद्विबाहु समकोण त्रिभुज है जिसकी भुजाएँ a और कर्ण $a\sqrt{2}$ है।

चरण 2 : 4 त्रिभुजों के समकोण वाले कोने एक बिंदु (केंद्र) पर मिलाओ, कर्ण बाहर की ओर रहें।

चरण 3 : बाहरी सीमा की 4 भुजाएँ बराबर $(a\sqrt{2})$ और सब कोण 90° हैं। यह $a\sqrt{2}$ भुजा वाला वर्ग है।

चरण 4 : क्षेत्रफल = $(a\sqrt{2})^2 = 2a^2$ = दिए गए एक वर्ग का 2 गुना। ✓

Figure it Out (पृ.39) प्र.2 : समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की बराबर भुजाएँ (i) 3 (ii) 4 (iii) 6 (iv) 8 (v) 9 हैं। कर्ण और एक दशमलव वाली सीमाएँ ज्ञात करो।

उत्तर : सूत्र : $c^2 = 2a^2$ (बराबर भुजाएँ a)।

(i) a = 3: $c^2 = 2 \times 9 = 18$। $4^2 = 16$, $5^2 = 25 \Rightarrow 4 < c < 5$। $4.2^2 = 17.64$, $4.3^2 = 18.49 \Rightarrow c = \sqrt{18}$, **$4.2 < c < 4.3$**।

(ii) a = 4: $c^2 = 2 \times 16 = 32$। $5^2 = 25$, $6^2 = 36 \Rightarrow 5 < c < 6$। $5.6^2 = 31.36$, $5.7^2 = 32.49 \Rightarrow c = \sqrt{32}$, **$5.6 < c < 5.7$**।

(iii) a = 6: $c^2 = 72$। $8^2 = 64$, $9^2 = 81$। $8.4^2 = 70.56$, $8.5^2 = 72.25 \Rightarrow c = \sqrt{72}$, **$8.4 < c < 8.5$**।

(iv) a = 8: $c^2 = 128$। $11^2 = 121$, $12^2 = 144$। $11.3^2 = 127.69$, $11.4^2 = 129.96 \Rightarrow c = \sqrt{128}$, **$11.3 < c < 11.4$**।

(v) a = 9: $c^2 = 162$। $12^2 = 144$, $13^2 = 169$। $12.7^2 = 161.29$, $12.8^2 = 163.84 \Rightarrow c = \sqrt{162}$, **$12.7 < c < 12.8$**।

Figure it Out (पृ.40) प्र.3 : समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण 10 है। अन्य दो भुजाएँ ज्ञात करो।

उत्तर : चरण 1 : c = 10, अत: $c^2 = 100$।

चरण 2 : $c^2 = 2a^2$ से : $2a^2 = 100$।

चरण 3 : $a^2 = 100 \div 2 = 50$।

चरण 4 : $a = \sqrt{50}$। $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ अत: a, 7 से थोड़ा अधिक है ; $7.0^2 = 49$ और $7.1^2 = 50.41$ $\Rightarrow$ **$7.0 < a < 7.1$**।

उत्तर : प्रत्येक बराबर भुजा = $\sqrt{50}$ (≈ 7.07) इकाई।

गणित चर्चा (पृ.42) : बराबर आकार के दो वर्गों के लिए बौधायन की विधि क्यों काम करती है ? क्या यह पहले वाली विधि से मेल खाती है ? (तथा नई 4-भुजा आकृति के सब कोण 90° क्यों हैं ?)

उत्तर : बराबर आकार : यदि a = b, तो समकोण त्रिभुज की भुजाएँ a, a और कर्ण c है जहाँ $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$। यह वही पुराना परिणाम है (विकर्ण पर वर्ग = दुगुना क्षेत्रफल), अत: दोनों विधियाँ **मेल खाती** हैं।

समकोण : चरण 1 : 4 त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए आकृति की चारों भुजाएँ बराबर (c)। चरण 2 : हर कोने पर एक त्रिभुज का कोण x, अगले का 90° − x और आकृति का कोण है ; सरल रेखा पर कोण = 180°, अत: आकृति का कोण = 180° − x − (90° − x) = **90°**। चरण 3 : चारों भुजाएँ बराबर और चारों कोण 90° $\Rightarrow$ यह भुजा c वाला **वर्ग** है।

Figure it Out (पृ.47) प्र.1 : समकोण त्रिभुज की छोटी भुजाएँ 5 सेमी और 12 सेमी हैं। कर्ण ज्ञात

करो।

उत्तर: चरण 1: a = 5, b = 12।

चरण 2: $c^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$।

चरण 3: c = √169 = **13 सेमी** (13 × 13 = 169)। चित्र बनाकर मापने पर भी कर्ण 13 सेमी आता है।

Figure it Out (पृ.47) प्र.2: एक छोटी भुजा 8 सेमी और कर्ण 17 सेमी है। तीसरी भुजा ज्ञात करो।

उत्तर: चरण 1: कर्ण c = 17, एक भुजा a = 8, तीसरी भुजा b = ?

चरण 2: $b^2 = c^2 - a^2 = 17^2 - 8^2 = 289 - 64 = 225$।

चरण 3: b = √225 = **15 सेमी** (15 × 15 = 225)। (8, 15, 17) एक बौधायन त्रिक है।

Figure it Out (पृ.47) प्र.3: दिए गए वर्ग के क्षेत्रफल का 3 गुना और 5 गुना क्षेत्रफल वाला वर्ग बनाओ (श्लोक 1.10)।

उत्तर: मान लो दिए वर्ग की भुजा s (क्षेत्रफल s^2) है।

3 गुना ($3s^2$): चरण 1: वर्ग का विकर्ण खींचो; उस पर बने वर्ग का क्षेत्रफल $2s^2$ (भुजा $s\sqrt{2}$)। चरण 2: **s√2** और **s** भुजाओं वाला समकोण त्रिभुज बनाओ। चरण 3: उसके कर्ण के लिए $c^2 = 2s^2 + s^2 = \mathbf{3s^2}$। चरण 4: इस कर्ण पर वर्ग बनाओ – क्षेत्रफल 3 गुना।

5 गुना ($5s^2$): चरण 1: भुजाएँ **2s** (दो भुजाएँ सिरे से सिरा जोड़कर) और **s** लो। चरण 2: $c^2 = 4s^2 + s^2 = \mathbf{5s^2}$। चरण 3: इस कर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल दिए वर्ग का 5 गुना है।

Figure it Out (पृ.47) प्र.4: a, b भुजाएँ और c कर्ण है। लुप्त भुजा ज्ञात करो: (i) a = 5, b = 7 (ii) a = 8, b = 12 (iii) a = 9, c = 15 (iv) a = 7, b = 12 (v) a = 1.5, b = 3.5।

उत्तर: (i) दोनों भुजाएँ हैं, अत: c निकालो: $c^2 = 25 + 49 = 74 \Rightarrow c = \sqrt{74}$। $8.6^2 = 73.96$, $8.7^2 = 75.69 \Rightarrow \mathbf{c = \sqrt{74} \approx 8.6}$।

(ii) $c^2 = 64 + 144 = 208 \Rightarrow \mathbf{c = \sqrt{208} \approx 14.4}$ ($14.4^2 = 207.36$, $14.5^2 = 210.25$)।

(iii) a = 9, c = 15: $b^2 = c^2 - a^2 = 225 - 81 = 144 \Rightarrow \mathbf{b = 12}$।

(iv) $c^2 = 49 + 144 = 193 \Rightarrow \mathbf{c = \sqrt{193} \approx 13.9}$ ($13.9^2 = 193.21$)।

(v) $c^2 = 1.5^2 + 3.5^2 = 2.25 + 12.25 = 14.5 \Rightarrow \mathbf{c = \sqrt{14.5} \approx 3.8}$ ($3.8^2 = 14.44$, $3.9^2 = 15.21$)।

गणित चर्चा (पृ.48): 20 तक के सभी बौधायन त्रिक लिखो। क्या (30, 40, 50) और (300, 400, 500) त्रिक हैं? आद्य त्रिक? 5 गुणित त्रिक? क्या उभयनिष्ठ गुणनखंड f से भाग देना ठीक है?

उत्तर: 20 तक के त्रिक: (3,4,5), (6,8,10), (5,12,13), (9,12,15), (8,15,17), (12,16,20)।

(30,40,50): 900 + 1600 = 2500 = 50^2 ✓ हाँ। **(300,400,500):** 90000 + 160000 = 250000 = 500^2 ✓ हाँ।

आद्य (≤ 20): (3,4,5), (5,12,13), (8,15,17) – 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं। (5,12,13) का उभयनिष्ठ गुणनखंड केवल 1 है, अत: यह आद्य है।

5 गुणित त्रिक (k = 2…6): (3,4,5) → (6,8,10), (9,12,15), (12,16,20), (15,20,25),

(18,24,30); (5,12,13) → (10,24,26), (15,36,39), (20,48,52), (25,60,65), (30,72,78); (8,15,17) → (16,30,34), (24,45,51), (32,60,68), (40,75,85), (48,90,102)। **कोई आद्य नहीं** (k उभयनिष्ठ गुणनखंड है)।

f से भाग: (9,12,15) ÷ 3 = (3,4,5): 9 + 16 = 25 ✓। सामान्यत: $a^2 + b^2 = c^2$ को f^2 से भाग दें: $(a/f)^2 + (b/f)^2 = (c/f)^2$ – अत: (a/f, b/f, c/f) भी त्रिक है।

Figure it Out (पृ.50) प्र.1: विषम संख्या विधि $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$ से 5 और बौधायन त्रिक ज्ञात करो।

उत्तर: विचार: 2n – 1 के लिए विषम वर्ग चुनो, n = (वर्ग + 1) ÷ 2 निकालो, त्रिक है (n – 1, √(2n – 1), n)।

1. 49: n = 25; $24^2 + 49 = 576 + 49 = 625 = 25^2$ ⇒ **(7, 24, 25)**।

2. 81: n = 41; $40^2 + 81 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2$ ⇒ **(9, 40, 41)**।

3. 121: n = 61; $60^2 + 121 = 3600 + 121 = 3721 = 61^2$ ⇒ **(11, 60, 61)**।

4. 169: n = 85; $84^2 + 169 = 7056 + 169 = 7225 = 85^2$ ⇒ **(13, 84, 85)**।

5. 225: n = 113; $112^2 + 225 = 12544 + 225 = 12769 = 113^2$ ⇒ **(15, 112, 113)**।

Figure it Out (पृ.50) प्र.2 व गणित चर्चा प्र.3: क्या इस विधि से अआद्य (non-primitive) त्रिक मिलते हैं? क्या कोई आद्य त्रिक इससे नहीं मिलते?

उत्तर: प्र.2: इस विधि के हर त्रिक में एक भुजा n – 1 और कर्ण n होता है – संख्याओं में केवल **1 का अंतर**। क्रमागत संख्याओं का 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं होता (वह उनके अंतर 1 को भी भाग देगा)। अत: त्रिक सदा **आद्य** होता है – इस विधि से अआद्य त्रिक **नहीं** मिलते।

प्र.3: हाँ, कुछ आद्य त्रिक इससे नहीं मिलते। जैसे (8, 15, 17): कर्ण – भुजा = 17 – 15 = 2 (1 नहीं) और दूसरी भुजा 8 सम है (विधि में विषम वर्ग चाहिए)। इसी तरह (12, 35, 37), (20, 21, 29)।

Figure it Out (पृ.52–53) प्र.1: 5 सेमी भुजा वाले वर्ग का विकर्ण ज्ञात करो।

उत्तर: चरण 1: विकर्ण वर्ग को 2 समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों में बाँटता है, भुजाएँ 5, 5।

चरण 2: $c^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50$ (या $2a^2 = 2 \times 25$)।

चरण 3: c = √50। $7^2 = 49$, $8^2 = 64$ ⇒ $7.0^2 = 49$, $7.1^2 = 50.41$।

उत्तर: विकर्ण = √50 सेमी, 7.0 और 7.1 सेमी के बीच (≈ 7.07 सेमी)।

Figure it Out (पृ.53) प्र.2: चित्र के छह समकोण त्रिभुजों की लुप्त भुजाएँ ज्ञात करो: (7, 9), (4, 10), (40, 41), (10, √200), (10, √150), (27, 45)।

उत्तर: हर त्रिभुज में पहले देखो कि समकोण के सामने की भुजा (कर्ण) कौन-सी है।

1. भुजाएँ 7 और 9: $c^2 = 49 + 81 = 130$ ⇒ **c = √130 ≈ 11.4**।

2. भुजाएँ 4 और 10 (समकोण इनके बीच): $c^2 = 16 + 100 = 116$ ⇒ **c = √116 ≈ 10.8**।

3. कर्ण 41, भुजा 40: $b^2 = 41^2 - 40^2 = 1681 - 1600 = 81$ ⇒ **b = 9**।

4. कर्ण √200, भुजा 10: $b^2 = 200 - 100 = 100$ ⇒ **b = 10**।

5. भुजाएँ 10 और √150 : $c^2 = 100 + 150 = 250 \Rightarrow$ **c = √250 ≈ 15.8**।

6. कर्ण 45, भुजा 27 : $b^2 = 45^2 - 27^2 = 2025 - 729 = 1296 \Rightarrow$ **b = 36** ($36 \times 36 = 1296$; $(27, 36, 45) = 9 \times (3, 4, 5)$)।

Figure it Out (पृ.53) प्र.3 : उस समचतुर्भुज की भुजा ज्ञात करो जिसके विकर्ण 24 और 70 इकाई हैं।

उत्तर : चरण 1 : समचतुर्भुज के विकर्ण एक-दूसरे को **समकोण** पर समद्विभाजित करते हैं। अत: आधे विकर्ण $24 \div 2 = 12$ और $70 \div 2 = 35$।

चरण 2 : समचतुर्भुज की एक भुजा, 12 और 35 भुजाओं वाले समकोण त्रिभुज का कर्ण है।

चरण 3 : भुजा$^2 = 12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369$।

चरण 4 : भुजा = √1369 = **37 इकाई** ($37 \times 37 = 1369$)। (12, 35, 37) बौधायन त्रिक है।

Figure it Out (पृ.53) प्र.4 : क्या समकोण त्रिभुज में कर्ण सबसे लंबी भुजा होता है? कारण दो।

उत्तर : चरण 1 : समकोण त्रिभुज में $c^2 = a^2 + b^2$।

चरण 2 : b^2 धनात्मक है, इसलिए $c^2 = a^2 + b^2$, a^2 से **बड़ा** है, अत: $c > a$।

चरण 3 : इसी प्रकार $c^2 > b^2$, अत: $c > b$।

उत्तर : हाँ। कर्ण सदा सबसे लंबी भुजा होता है। (उदाहरण : 3, 4, 5 – कर्ण 5 सबसे लंबा है।)

Figure it Out (पृ.53) प्र.5 : सत्य या असत्य – हर बौधायन त्रिक या तो आद्य है या किसी आद्य त्रिक का गुणित है।

उत्तर : सत्य।

चरण 1 : कोई भी त्रिक (a, b, c) लो। यदि उसमें 1 से बड़ा उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं तो वह आद्य है।

चरण 2 : नहीं तो a, b, c का महत्तम समापवर्तक f लो ($f > 1$)।

चरण 3 : $a^2 + b^2 = c^2$ को f^2 से भाग देने पर (a/f, b/f, c/f) भी त्रिक है और उसमें कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं – अत: वह आद्य है।

चरण 4 : तब $(a, b, c) = f \times (a/f, b/f, c/f)$, यानी आद्य त्रिक का गुणित। उदाहरण : $(9,12,15) = 3 \times (3,4,5)$।

Figure it Out (पृ.53) प्र.6 : ऐसे 5 आयतों के उदाहरण दो जिनकी भुजाएँ और विकर्ण सब पूर्णांक हों।

उत्तर : विचार : आयत का विकर्ण, दो भुजाओं से बने समकोण त्रिभुज का कर्ण है, इसलिए बौधायन त्रिक (भुजा, भुजा, विकर्ण) लो।

1. 3×4, विकर्ण 5 ($9 + 16 = 25$)। **2.** 6×8, विकर्ण 10 ($36 + 64 = 100$)। **3.** 5×12, विकर्ण 13 ($25 + 144 = 169$)। **4.** 8×15, विकर्ण 17 ($64 + 225 = 289$)। **5.** 7×24, विकर्ण 25 ($49 + 576 = 625$)।

Figure it Out (पृ.53) प्र.7 : ऐसा वर्ग बनाओ जिसका क्षेत्रफल 5 और 7 इकाई भुजा वाले वर्गों के

क्षेत्रफलों के अंतर के बराबर हो।

उत्तर: चरण 1: आवश्यक क्षेत्रफल = $7^2 - 5^2 = 49 - 25 = 24$।

चरण 2: $c^2 = a^2 + b^2$ को उल्टा प्रयोग करो: कर्ण c = 7 और एक भुजा a = 5 हो तो $b^2 = 49 - 25 = 24$, अत: b = $\sqrt{24}$।

चरण 3 (रचना): AB = 5 इकाई खींचो। B पर AB पर लंब खींचो। केंद्र A, त्रिज्या 7 इकाई से चाप खींचो जो लंब को C पर काटे।

चरण 4: तब BC = $\sqrt{(7^2 - 5^2)} = \sqrt{24}$। BC पर वर्ग बनाओ: उसका क्षेत्रफल = $(\sqrt{24})^2 = 24 = 49 - 25$। ✓

Figure it Out (पृ.53) प्र.8 (गणित चर्चा/करके देखो): ग्रिड के बिंदुओं को शीर्ष मानकर क्या (a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 वर्ग इकाई क्षेत्रफल का वर्ग बन सकता है? (ii) अनंत ग्रिड पर कौन-से पूर्णांक क्षेत्रफल संभव हैं?

उत्तर: विचार: यदि वर्ग की भुजा दो बिंदुओं को जोड़े जो a इकाई आड़े और b इकाई ऊपर हैं, तो भुजा^{2} = $a^2 + b^2$ (बौधायन), अत: क्षेत्रफल = $a^2 + b^2$।

(i)(a) क्षेत्रफल 2: a = 1, b = 1 (1 + 1) – 2 × 2 ग्रिड के मध्य-बिंदु जोड़ने वाला तिरछा वर्ग: **संभव**।

(b) क्षेत्रफल 3: $a^2 + b^2 = 3$ चाहिए, पर 0, 1, 4, … से केवल 1 + 1 = 2 या 1 + 4 = 5 बनता है – कोई जोड़ी नहीं: **संभव नहीं**।

(c) क्षेत्रफल 4: a = 2, b = 0 (साधारण 2 × 2 वर्ग): **संभव**।

(d) क्षेत्रफल 5: a = 1, b = 2 (1 + 4): **संभव** – घोड़े की चाल जैसा तिरछा वर्ग।

(ii) संभव क्षेत्रफल ठीक वही संख्याएँ हैं जो **दो वर्गों का योग** हों (0 सहित): 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, … संभव नहीं: 3, 6, 7, 11, 12, 14, 15, 19, …

Figure it Out (पृ.54) प्र.9: 6 इकाई भुजा वाले समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करो।

उत्तर: चरण 1: शीर्ष से आधार पर लंब खींचो। वह आधार को समद्विभाजित करता है (दोनों छोटे समकोण त्रिभुज RHS से सर्वांगसम), अत: आधा आधार = 6 ÷ 2 = 3।

चरण 2: समकोण त्रिभुज में: कर्ण = 6, आधार = 3, ऊँचाई h = ? $h^2 = 6^2 - 3^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow h = \sqrt{27}$ (= $3\sqrt{3} \approx 5.2$; $5.1^2 = 26.01$, $5.2^2 = 27.04$)।

चरण 3: क्षेत्रफल = ½ × आधार × ऊँचाई = ½ × 6 × $\sqrt{27}$ = $3\sqrt{27}$ = **$9\sqrt{3} \approx 15.6$ वर्ग इकाई** ($\sqrt{27} = 3\sqrt{3}$, अत: $3 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$)।

पहेली – रंग खोजो! (पृ.54): लाल, नीले, हरे गेंदों के 3 बंद बक्सों पर RED, BLUE, GREEN के लेबल लगे हैं, पर हर लेबल गलत है। केवल एक बक्सा खोलकर सब लेबल ठीक करो।

उत्तर: चरण 1: RED लेबल वाला बक्सा खोलो। इसका लेबल गलत है, इसलिए इसमें लाल नहीं हो सकता – इसमें नीला या हरा है।

स्थिति A – नीला दिखा: चरण 2: यह नीला बक्सा है, इसका लेबल BLUE कर दो। चरण 3: शेष लेबल BLUE और GREEN वाले बक्सों में लाल और हरा हैं। GREEN-लेबल वाले में हरा

नहीं हो सकता (लेबल गलत), अत: उसमें **लाल** है। चरण 4: इसलिए BLUE-लेबल वाले में **हरा** है।

स्थिति B – हरा दिखा: चरण 2: इसका लेबल GREEN कर दो। चरण 3: शेष रंग लाल और नीला। BLUE-लेबल वाले में नीला नहीं हो सकता, अत: उसमें **लाल**; GREEN-लेबल वाले में **नीला** है।

निष्कर्ष: हर लेबल गलत था, इसलिए एक बक्सा खोलने से तीनों लेबल सही हो जाते हैं।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 1 अंक

1. बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय लिखो। (1)

उत्तर: समकोण त्रिभुज में $a^2 + b^2 = c^2$, जहाँ c कर्ण है।

2. समकोण त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा कौन-सी है? (1)

उत्तर: कर्ण।

3. भुजाएँ 3 और 4 वाले समकोण त्रिभुज का कर्ण? (1)

उत्तर: 5।

4. बराबर भुजा a वाले समद्विबाहु समकोण त्रिभुज के लिए c^2 लिखो। (1)

उत्तर: $c^2 = 2a^2$।

5. क्या (6, 8, 10) बौधायन त्रिक है? (1)

उत्तर: हाँ: $36 + 64 = 100$।

6. क्या (5, 12, 13) आद्य है? (1)

उत्तर: हाँ – 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं।

7. √2 किन दो (3 दशमलव वाली) संख्याओं के बीच है? (1)

उत्तर: $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$।

8. क्या √2 को भिन्न m/n के रूप में लिख सकते हैं? (1)

उत्तर: नहीं – यह परिमेय नहीं है (यूक्लिड की उपपत्ति)।

9. कर्ण 13 और एक भुजा 5 हो तो तीसरी भुजा? (1)

उत्तर: 12।

10. फ़र्मा की अंतिम प्रमेय किसने और किस वर्ष सिद्ध की? (1)

उत्तर: एंड्रयू वाइल्स, 1994।

11. यदि (a, b, c) त्रिक है तो क्या (2a, 2b, 2c) भी त्रिक है? (1)

उत्तर: हाँ – यह गुणित त्रिक है।

12. बराबर भुजाएँ 1 हों तो कर्ण? (1)

उत्तर: √2।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 3 अंक

1. भुजाएँ 8 और 15 वाले समकोण त्रिभुज का कर्ण ज्ञात करो और बताओ कि त्रिक आद्य है या नहीं। (3)

उत्तर: $c^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 \Rightarrow c = 17$। त्रिक (8, 15, 17) में 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं, अत: यह आद्य है।

2. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण 10 है। बराबर भुजाएँ सीमाओं सहित ज्ञात करो। (3)

उत्तर: $2a^2 = 100 \Rightarrow a^2 = 50 \Rightarrow a = \sqrt{50}$। $7.0^2 = 49$ और $7.1^2 = 50.41$, अत: $7.0 < a < 7.1$ (≈ 7.07)।

3. उस समचतुर्भुज की भुजा ज्ञात करो जिसके विकर्ण 10 और 24 हैं। (3)

उत्तर: आधे विकर्ण 5 और 12 समकोण पर मिलते हैं। भुजा$^2 = 25 + 144 = 169 \Rightarrow$ भुजा $= 13$।

4. दिखाओ कि यदि (a, b, c) बौधायन त्रिक है तो (ka, kb, kc) भी त्रिक है। (3)

उत्तर: $(ka)^2 + (kb)^2 = k^2a^2 + k^2b^2 = k^2(a^2 + b^2) = k^2c^2 = (kc)^2$। अत: (ka, kb, kc) त्रिक है।

5. समद्विबाहु समकोण त्रिभुज का कर्ण $\sqrt{98}$ है। बराबर भुजाएँ ज्ञात करो। (3)

उत्तर: $c^2 = 98 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 5 अंक

1. भुजा a + b वाले वर्ग से बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय सिद्ध करो। (5)

उत्तर: चरण 1 : भुजा $(a + b)$ का वर्ग बनाओ ; क्षेत्रफल $= (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$।

चरण 2 : हर भुजा पर बिंदु ऐसे लो कि भुजा a और b में बँटे ; उन्हें जोड़ो – a, b भुजाओं वाले चार सर्वांगसम समकोण त्रिभुज और भीतर c भुजा वाली चतुर्भुज आकृति बनती है।

चरण 3 : भीतरी आकृति की 4 भुजाएँ बराबर और हर कोण $= 180° - x - (90° - x) = 90°$, अत: यह c^2 क्षेत्रफल का वर्ग है।

चरण 4 : 4 त्रिभुजों का क्षेत्रफल $= 4 \times \frac{1}{2}ab = 2ab$।

चरण 5 : $(a + b)^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab \Rightarrow \mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$।

2. कमल के डंठल का सिरा पानी से 2 इकाई ऊपर है। हवा से झुककर वह अपनी मूल जगह से 4 इकाई दूर पानी को छूता है। पानी की गहराई ज्ञात करो। (5)

उत्तर: चरण 1 : गहराई (पानी में डंठल) = x; कुल डंठल = x + 2।

चरण 2 : डंठल पानी पर लंब है, अत: समकोण त्रिभुज की भुजाएँ 4, x और कर्ण x + 2।

चरण 3 : $4^2 + x^2 = (x + 2)^2 \Rightarrow 16 + x^2 = x^2 + 4x + 4$।

चरण 4 : दोनों ओर से x^2 घटाओ : $16 = 4x + 4 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow \mathbf{x = 3}$।

चरण 5 : जाँच : $16 + 9 = 25 = 5^2$ (3-4-5 त्रिक)। गहराई = 3 इकाई।

3. $(n-1)^2 + (2n-1) = n^2$ से विषम वर्गों 25, 49, 81 के तीन बौधायन त्रिक बनाओ और दिखाओ कि वे आद्य हैं। (5)

उत्तर: चरण 1 : n = (विषम वर्ग + 1) ÷ 2।

चरण 2 : 25 ⇒ n = 13: $12^2 + 25 = 144 + 25 = 169 = 13^2$ ⇒ (5, 12, 13)।

चरण 3 : 49 ⇒ n = 25: $24^2 + 49 = 576 + 49 = 625 = 25^2$ ⇒ (7, 24, 25)।

चरण 4 : 81 ⇒ n = 41: $40^2 + 81 = 1600 + 81 = 1681 = 41^2$ ⇒ (9, 40, 41)।

चरण 5 : हर त्रिक में कर्ण और एक भुजा क्रमागत संख्याएँ हैं (13 व 12, 25 व 24, 41 व 40)।

क्रमागत संख्याओं का 1 से बड़ा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं होता, अतः हर त्रिक आद्य है।

ABHISHEK SIR • MERIT SPRING • NOTES BY