

Chapter Review

- **Polynomial:** An algebraic expression of the form $p(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$, where the powers are whole numbers and $a_n \neq 0$. The highest power n is the degree. Degree 1 is linear ($ax + b$), degree 2 is quadratic ($ax^2 + bx + c$), and degree 3 is cubic ($ax^3 + bx^2 + cx + d$). A polynomial of degree n has at most n zeroes.
- **Zero of a polynomial:** A real number k is a zero of $p(x)$ if $p(k) = 0$.
Example: for $p(x) = x^2 - 3x + 2$, $p(1) = 0$ and $p(2) = 0$, so 1 and 2 are zeroes. Geometrically, the zeroes of $p(x)$ are the x-coordinates of the points where the graph $y = p(x)$ cuts the x-axis.
- **Graph of a linear polynomial:** The graph of $y = ax + b$ is a straight line. It cuts the x-axis at exactly one point ($-b/a$), so a linear polynomial has exactly one zero.
- **Graph of a quadratic polynomial:** The graph of $y = ax^2 + bx + c$ is a parabola. If $a > 0$ it opens upwards (shape U); if $a < 0$ it opens downwards (shape $\cap$). The parabola can cut the x-axis at two distinct points (two zeroes), touch it at one point (one zero, repeated) or not meet it at all (no real zero).
- **Graph of a cubic polynomial:** A cubic polynomial can cut the x-axis at at most 3 points, so it has at most 3 zeroes (it may have 1, 2 or 3 real zeroes). In general, a polynomial of degree n has at most n zeroes, and its graph cuts the x-axis at at most n points.
- **Relation between zeroes and coefficients (quadratic):** If α and β are the zeroes of $ax^2 + bx + c$, then Sum of zeroes $\alpha + \beta = -b/a$, and Product of zeroes $\alpha\beta = c/a$. Example: for $x^2 - 5x + 6$, zeroes are 2 and 3; sum $5 = -(-5)/1$ and product $6 = 6/1$.

- **Forming a quadratic from its zeroes:** A quadratic polynomial with zeroes α and β is $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, i.e. $x^2 - (\text{sum})x + (\text{product})$. Any multiple $k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$ is also valid. Example: zeroes 2 and -3 give $x^2 + x - 6$.
- **Cubic polynomial relations:** If α, β, γ are zeroes of $ax^3 + bx^2 + cx + d$, then $\alpha + \beta + \gamma = -b/a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = c/a$ and $\alpha\beta\gamma = -d/a$.
- **Division algorithm for polynomials:** If $p(x)$ and $g(x)$ are polynomials with $g(x) \neq 0$, then there exist polynomials $q(x)$ and $r(x)$ such that $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, where $r(x) = 0$ or degree of $r(x) < \text{degree of } g(x)$. Use it to find the other zeroes when one zero is known: divide $p(x)$ by $(x - \text{known zero})$ and factorise the quotient.

Key Terms

Polynomial – Expression with whole-number powers of a variable, like $3x^2 - 2x + 5$.

Degree – The highest power of the variable in a polynomial.

Linear Polynomial – Degree 1, $ax + b$; graph is a straight line.

Quadratic Polynomial – Degree 2, $ax^2 + bx + c$; graph is a parabola.

Cubic Polynomial – Degree 3, $ax^3 + bx^2 + cx + d$; at most 3 zeroes.

Zero of a Polynomial – A value k with $p(k) = 0$; x-intercept of the graph.

Parabola – U-shaped curve, graph of a quadratic polynomial.

Sum of Zeroes – $\alpha + \beta = -b/a$ for $ax^2 + bx + c$.

Product of Zeroes – $\alpha\beta = c/a$ for $ax^2 + bx + c$.

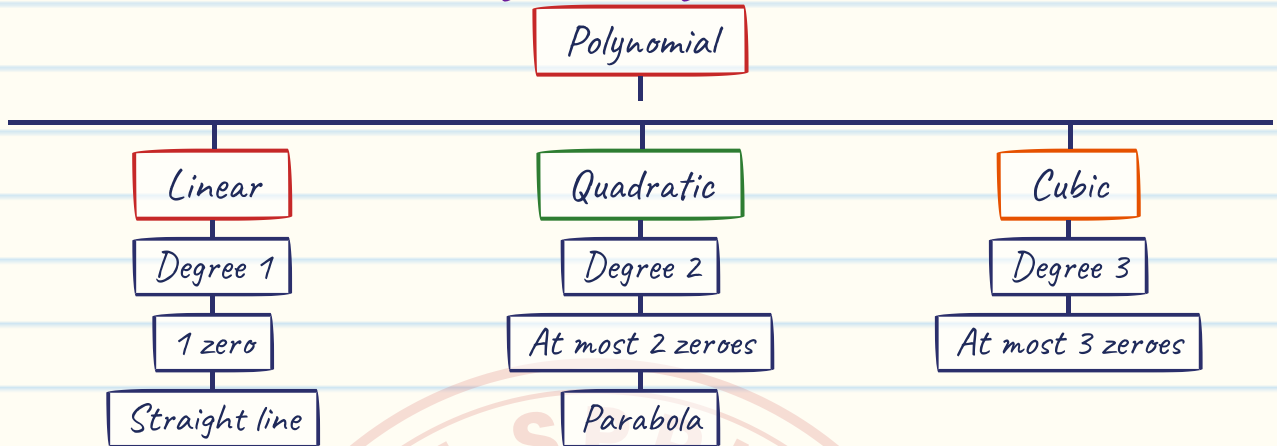
Division Algorithm – $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, degree $r < \text{degree } g$.

Coefficient – The numerical factor attached to a power of x .

Constant Polynomial – A polynomial of degree 0 such as 7; it has no zero (except the zero polynomial).

Diagrams / Flowcharts

Polynomials by Degree



Zeroes and Coefficients (Quadratic)

Quantity	Formula
Sum $\alpha + \beta$	$-b/a$
Product $\alpha\beta$	c/a
Polynomial	$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

Parabola $y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$

- Opens upwards (U)
- Has a minimum point

$a < 0$

- Opens downwards
- Has a maximum point

Finding the Zeroes

Write $p(x) = 0$

Factorise by splitting the middle term

Equate each factor to 0

Zeroes are the roots

Verify using sum and product

Textbook Exercise Questions

Q.1 Find the zeroes of $x^2 - 3x - 10$ and verify the relation between zeroes and coefficients.

Ans. $x^2 - 5x + 2x - 10 = (x - 5)(x + 2)$, so zeroes are 5 and -2. Sum = $3 = -(-3)/1$. Product = $-10 = -10/1$. Verified.

Q.2 Find a quadratic polynomial whose sum and product of zeroes are -3 and 2.

Ans. $x^2 - (\text{sum})x + \text{product} = x^2 - (-3)x + 2 = x^2 + 3x + 2$.

Q.3 If α and β are zeroes of $2x^2 - 5x + 3$, find $\alpha + \beta$ and $\alpha\beta$.

Ans. $\alpha + \beta = -(-5)/2 = 5/2$ and $\alpha\beta = 3/2$.

Q.4 Divide $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ by $g(x) = x^2 - 2$ and state the quotient and remainder.

Ans. Quotient $q(x) = x - 3$ and remainder $r(x) = 7x - 9$; check: $(x^2 - 2)(x - 3) + 7x - 9 = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$.

Q.5 Given that one zero of $x^3 - 3x^2 - x + 3$ is 1, find the others.

Ans. Divide by $(x - 1)$ to get $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$. The other zeroes are 3 and -1.

Q.6 How many zeroes can the graph of a polynomial of degree 3 have?

Explain.

Ans. At most 3, because it can cut the x-axis at three points at most. It has at least 1 real zero.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] If the sum of the zeroes of $x^2 - kx + 6$ is 5, find k.

Ans. Sum = $-(-k)/1 = k = 5$.

Q.2 [1 mark] How many zeroes does a quadratic polynomial whose graph does not meet the x-axis have?

Ans. No real zeroes.

Q.3 [2 marks] Find the zeroes of $6x^2 - 3 - 7x$.

Ans. $6x^2 - 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$. Zeroes: $-1/3$ and $3/2$.

Q.4 [2 marks] If one zero of $x^2 - 5x + k$ is 2, find k.

Ans. $4 - 10 + k = 0$, so $k = 6$.

Q.5 [3 marks] If α and β are zeroes of $x^2 - 6x + 8$, find the quadratic polynomial whose zeroes are $1/\alpha$ and $1/\beta$.

Ans. $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 8$. Sum of new zeroes = $(\alpha + \beta)/\alpha\beta = 6/8 = 3/4$; product = $1/8$. Polynomial: $x^2 - (3/4)x + 1/8$, i.e. $8x^2 - 6x + 1$.

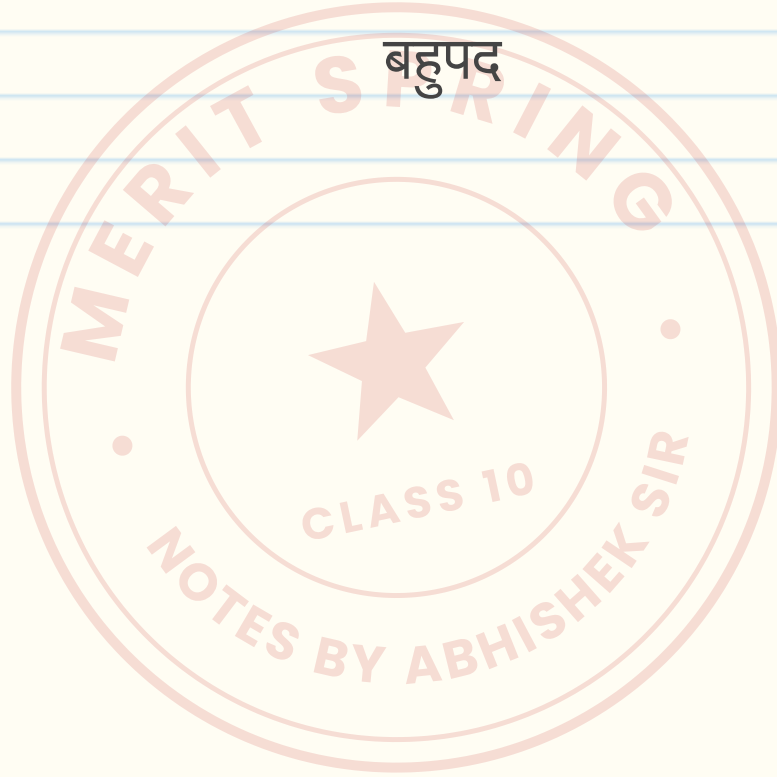
Q.6 [3 marks] Find the zeroes of $x^2 + 7x + 10$ and verify the relationship.

Ans. $(x + 2)(x + 5)$: zeroes -2 and -5. Sum $-7 = -7/1$; product $10 = 10/1$. Verified.



HINDI VERSION

बहुपद



अध्याय समीक्षा

- बहुपद: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ रूप का बीजीय व्यंजक, जिसमें घातें पूर्ण संख्याएँ हों और $a_n \neq 0$ । सबसे बड़ी घात n बहुपद की घात (डिग्री) है। घात 1 रैखिक ($ax + b$), घात 2 द्विघात ($ax^2 + bx + c$) और घात 3 त्रिघात ($ax^3 + bx^2 + cx + d$) है। n घात के बहुपद के अधिकतम n शून्यक होते हैं।
- बहुपद का शून्यक: वास्तविक संख्या k , बहुपद $p(x)$ का शून्यक है यदि $p(k) = 0$ । उदाहरण: $p(x) = x^2 - 3x + 2$ के लिए $p(1) = 0$ और $p(2) = 0$, अतः 1 और 2 शून्यक हैं। ज्यामितीय रूप से, $p(x)$ के शून्यक वे x -निर्देशांक हैं जहाँ आलेख $y = p(x)$, x -अक्ष को काटता है।
- रैखिक बहुपद का आलेख: $y = ax + b$ का आलेख एक सीधी रेखा है। यह x -अक्ष को ठीक एक बिंदु $(-b/a)$ पर काटती है, अतः रैखिक बहुपद का ठीक एक शून्यक होता है।
- द्विघात बहुपद का आलेख: $y = ax^2 + bx + c$ का आलेख परवलय है। यदि $a > 0$ तो परवलय ऊपर की ओर खुलता है (U आकार); $a < 0$ तो नीचे की ओर खुलता है (n आकार)। परवलय x -अक्ष को दो भिन्न बिंदुओं पर काट सकता है (दो शून्यक), एक बिंदु पर स्पर्श कर सकता है (एक शून्यक, दोहराया हुआ) या बिल्कुल नहीं मिलता (कोई वास्तविक शून्यक नहीं)।
- त्रिघात बहुपद का आलेख: त्रिघात बहुपद x -अक्ष को अधिकतम 3 बिंदुओं पर काट सकता है, अतः इसके अधिकतम 3 शून्यक होते हैं (1, 2 या 3 वास्तविक शून्यक)। सामान्यतः n घात के बहुपद के अधिकतम n शून्यक होते हैं और उसका आलेख x -अक्ष को अधिकतम n बिंदुओं पर काटता है।
- शून्यकों और गुणांकों का संबंध (द्विघात): यदि α और β , $ax^2 + bx + c$ के शून्यक हैं तो शून्यकों का योग $\alpha + \beta = -b/a$ और शून्यकों का गुणनफल $\alpha\beta = c/a$ । उदाहरण: $x^2 - 5x + 6$ के शून्यक 2 और 3 हैं; योग $5 = -(-5)/1$ और गुणनफल $6 = 6/1$ ।
- शून्यकों से द्विघात बनाना: शून्यक α और β वाला द्विघात बहुपद $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, यानी $x^2 - (\text{योग})x + (\text{गुणनफल})$ होता है। इसका कोई भी गुणज $k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$ भी मान्य है। उदाहरण: शून्यक 2 और -3 से $x^2 + x - 6$ ।
- त्रिघात बहुपद के संबंध: यदि α, β, γ बहुपद $ax^3 + bx^2 + cx + d$ के शून्यक हैं तो $\alpha + \beta + \gamma = -b/a$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = c/a$ और $\alpha\beta\gamma = -d/a$ ।

- बहुपदों के लिए विभाजन एल्गोरिथ्म: यदि $p(x)$ और $g(x)$ बहुपद हैं और $g(x) \neq 0$, तो बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ ऐसे होते हैं कि $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, जहाँ $r(x) = 0$ या $r(x)$ की घात $< g(x)$ की घात। एक शून्यक ज्ञात हो तो अन्य शून्यक निकालने के लिए $p(x)$ को $(x - \text{ज्ञात शून्यक})$ से भाग दें और भागफल का गुणनखंडन करें।

मुख्य शब्दावली

बहुपद - चर की पूर्ण संख्या घातों वाला व्यंजक, जैसे $3x^2 - 2x + 5$ ।

घात (डिग्री) - बहुपद में चर की सबसे बड़ी घात।

रैखिक बहुपद - घात 1, $ax + b$; आलेख सीधी रेखा।

द्विघात बहुपद - घात 2, $ax^2 + bx + c$; आलेख परवलय।

त्रिघात बहुपद - घात 3, $ax^3 + bx^2 + cx + d$; अधिकतम 3 शून्यक।

बहुपद का शून्यक - मान k जिसके लिए $p(k) = 0$; आलेख का x -अंतःखंड।

परवलय - U आकार का वक्र, द्विघात बहुपद का आलेख।

शून्यकों का योग - $ax^2 + bx + c$ के लिए $\alpha + \beta = -b/a$ ।

शून्यकों का गुणनफल - $ax^2 + bx + c$ के लिए $\alpha\beta = c/a$ ।

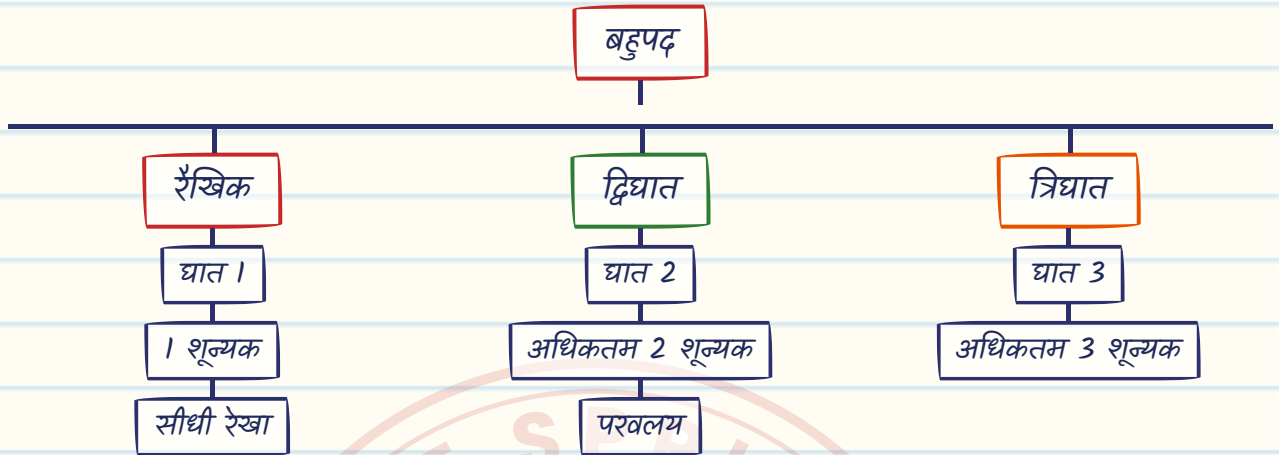
विभाजन एल्गोरिथ्म - $p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$, r की घात $< g$ की घात।

गुणांक - x की घात के साथ लगी संख्यात्मक राशि।

अचर बहुपद - घात 0 का बहुपद जैसे 7; इसका कोई शून्यक नहीं होता।

आरेख / फ्लोचार्ट

घात के अनुसार बहुपद



शून्यक और गुणांक (द्विघात)

राशि	सूत्र
योग $\alpha + \beta$	$-b/a$
गुणनफल $\alpha\beta$	c/a
बहुपद	$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$

परवलय $y = ax^2 + bx + c$

$a > 0$

- ऊपर खुलता है (U)
- न्यूनतम बिंदु

$a < 0$

- नीचे खुलता है
- अधिकतम बिंदु

शून्यक ज्ञात करना

$$p(x) = 0 \text{ लिखें}$$

मध्य पद विभाजन से गुणनखंड

$$\text{प्रत्येक गुणनखंड} = 0$$

प्राप्त मान शून्यक हैं

योग व गुणनफल से जाँच

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 $x^2 - 3x - 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और शून्यकों व गुणांकों के संबंध की जाँच कीजिए।

उत्तर- $x^2 - 5x + 2x - 10 = (x - 5)(x + 2)$, अतः शून्यक 5 और -2। योग = $3 = -(-3)$ । गुणनफल = $-10 = -10$ । सत्यापित।

प्र.2 ऐसा द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यकों का योग -3 और गुणनफल 2 हैं।

उत्तर- $x^2 - (\text{योग})x + \text{गुणनफल} = x^2 + 3x + 2$

प्र.3 यदि α और β , $2x^2 - 5x + 3$ के शून्यक हैं तो $\alpha + \beta$ और $\alpha\beta$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\alpha + \beta = -(-5)/2 = 5/2$ और $\alpha\beta = 3/2$

प्र.4 $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ को $g(x) = x^2 - 2$ से भाग देकर भागफल और शेषफल लिखिए।

उत्तर- भागफल $q(x) = x - 3$ और शेषफल $r(x) = 7x - 9$; जाँच: $(x^2 - 2)(x - 3) + 7x - 9 = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$

प्र.5 यदि $x^3 - 3x^2 - x + 3$ का एक शून्यक 1 है तो अन्य शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $(x - 1)$ से भाग देने पर $x^2 - 2x - 3 = (x - 3)(x + 1)$ । अन्य शून्यक 3 और -1 हैं।

प्र.6 3 घात के बहुपद के आलेख के कितने शून्यक हो सकते हैं? समझाइए।

उत्तर- अधिकतम 3, क्योंकि आलेख x -अक्ष को अधिकतम तीन बिंदुओं पर काटता है। कम से कम 1 वास्तविक शून्यक होता है।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] यदि $x^2 - kx + 6$ के शून्यकों का योग 5 है तो k ज्ञात कीजिए।

उत्तर- योग $= -(-k)/1 = k = 5$

प्र.2 [1 अंक] जिस द्विघात बहुपद का आलेख x -अक्ष को नहीं काटता उसके कितने शून्यक हैं?

उत्तर- कोई वास्तविक शून्यक नहीं।

प्र.3 [2 अंक] $6x^2 - 3 - 7x$ के शून्यक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $6x^2 - 7x - 3 = (3x + 1)(2x - 3)$ । शून्यक: $-1/3$ और $3/2$ ।

प्र.4 [2 अंक] यदि $x^2 - 5x + k$ का एक शून्यक 2 है तो k ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $4 - 10 + k = 0$, अतः $k = 6$ ।

प्र.5 [3 अंक] यदि α, β बहुपद $x^2 - 6x + 8$ के शून्यक हैं तो वह द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके शून्यक $1/\alpha$ और $1/\beta$ हैं।

उत्तर- $\alpha + \beta = 6$, $\alpha\beta = 8$ । नए शून्यकों का योग $= (\alpha + \beta)/\alpha\beta = 3/4$; गुणनफल $= 1/8$ ।
बहुपद: $x^2 - (3/4)x + 1/8$, अर्थात् $8x^2 - 6x + 1$ ।

प्र.6 [3 अंक] $x^2 + 7x + 10$ के शून्यक ज्ञात कीजिए और संबंध की जाँच कीजिए।

उत्तर- $(x + 2)(x + 5)$: शून्यक -2 और -5 । योग $-7 = -7/1$; गुणनफल $10 = 10/1$ ।
सत्यापित।