

Chapter Review

- **Similar figures:** Two figures are similar if they have the same shape (not necessarily the same size). Two polygons with the same number of sides are similar if (i) their corresponding angles are equal and (ii) their corresponding sides are in the same ratio (proportion). All circles are similar, all squares are similar, and all equilateral triangles are similar.
- **Similarity of triangles:** Two triangles are similar if (i) their corresponding angles are equal, and (ii) their corresponding sides are in proportion. If the angles of two triangles are equal, the triangles are equiangular and their sides are in the same ratio. We write $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.
- **Basic Proportionality Theorem (Thales Theorem):** If a line is drawn parallel to one side of a triangle to intersect the other two sides at distinct points, the other two sides are divided in the same ratio. In $\triangle ABC$, if $DE \parallel BC$ with D on AB and E on AC , then $AD/DB = AE/EC$. Converse: If a line divides any two sides of a triangle in the same ratio, it is parallel to the third side.
- **Criteria for similarity of triangles:** AAA (or AA): if two angles of one triangle are equal to two angles of another, the triangles are similar. SSS: if the corresponding sides of two triangles are in the same ratio, they are similar. SAS: if one angle of a triangle equals one angle of another and the sides including these angles are in the same ratio, the triangles are similar.
- **Areas of similar triangles:** The ratio of the areas of two similar triangles is equal to the square of the ratio of their corresponding sides:

$$\text{ar}(\triangle ABC)/\text{ar}(\triangle PQR) = (AB/PQ)^2 = (BC/QR)^2 = (CA/RP)^2$$
 The same is true for the ratio of corresponding altitudes, medians and angle bisectors (ratio of areas = square of ratio of these).

- **Pythagoras Theorem:** In a right-angled triangle, the square of the hypotenuse is equal to the sum of the squares of the other two sides: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. The theorem is proved using similarity: drawing the perpendicular BD from the right angle to the hypotenuse gives three similar triangles.
- **Converse of Pythagoras Theorem:** In a triangle, if the square of one side equals the sum of the squares of the other two sides, then the angle opposite the first side is a right angle. Pythagorean triplets: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25).
- **Useful results:** The line joining the midpoints of two sides of a triangle is parallel to the third side (Mid-point theorem) and equals half of it. The bisector of an angle of a triangle divides the opposite side in the ratio of the other two sides. In a right triangle with altitude BD to hypotenuse AC : $BD^2 = AD \times DC$.

Key Terms

Similar Figures – Figures with the same shape but not necessarily the same size.

Congruent Figures – Figures with the same shape and the same size.

Basic Proportionality Theorem – A line parallel to one side divides the other two sides in the same ratio.

AA Criterion – Two equal angles make two triangles similar.

SSS Criterion – Three pairs of sides in the same ratio make triangles similar.

SAS Criterion – One equal angle with proportional including sides makes triangles similar.

Area Theorem – Ratio of areas of similar triangles = square of ratio of sides.

Hypotenuse – Longest side of a right-angled triangle, opposite the right angle.

Pythagoras Theorem – $\text{Hypotenuse}^2 = \text{Base}^2 + \text{Perpendicular}^2$.

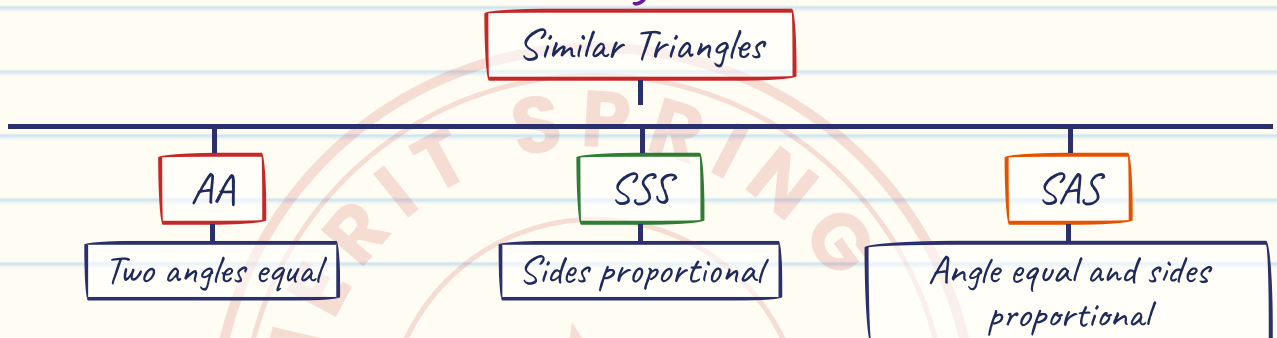
Pythagorean Triplet – Three numbers satisfying $a^2 + b^2 = c^2$, e.g. 3, 4, 5.

Equiangular Triangles – Triangles whose corresponding angles are equal.

Mid-point Theorem – Line joining midpoints of two sides is parallel to the third side.

Diagrams / Flowcharts

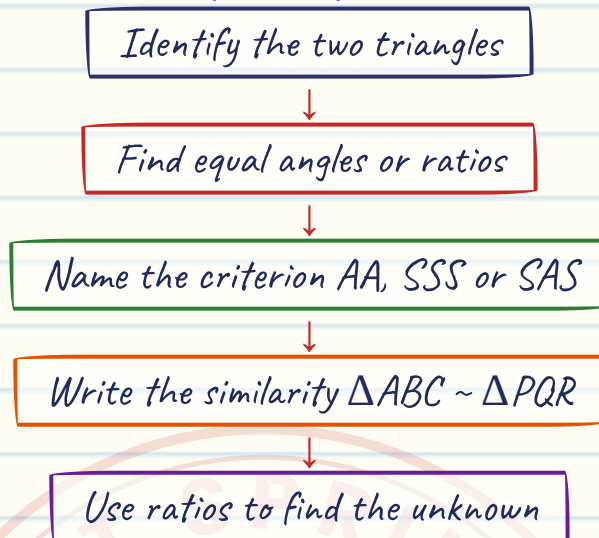
Similarity Criteria



Key Triangle Theorems

Theorem	Statement
BPT	$DE \parallel BC$ gives $AD/DB = AE/EC$
Area ratio	$\text{Area ratio} = (\text{side ratio})^2$
Pythagoras	$c^2 = a^2 + b^2$
Converse	$a^2 + b^2 = c^2$ gives right angle

Proving Triangles Similar



Similar vs Congruent

Similar

- Same shape
- Sides in proportion
- Symbol $\sim$

Congruent

- Same shape and size
- Sides equal
- Symbol $\cong$

Textbook Exercise Questions

Q.1 State and prove the Basic Proportionality Theorem.

Ans. Statement: a line parallel to one side of a triangle divides the other two sides in the same ratio. Proof: in $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$. Join BE and CD .
 $ar(\triangle ADE)/ar(\triangle DEB) = AD/DB$ and $ar(\triangle ADE)/ar(\triangle DEC) = AE/EC$.
 Since $\triangle DEB$ and $\triangle DEC$ are on the same base DE and between the same parallels DE and BC , their areas are equal. Hence $AD/DB = AE/EC$.

Q.2 In $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$, $AD = 1.5$ cm, $DB = 3$ cm, $AE = 1$ cm. Find EC .

Ans. $AD/DB = AE/EC$ gives $1.5/3 = 1/EC$, so $EC = 2$ cm.

Q.3 The areas of two similar triangles are 81 cm^2 and 49 cm^2 . If the altitude of the bigger triangle is 4.5 cm, find the corresponding altitude of the smaller.

Ans. Ratio of areas = (ratio of altitudes)²: $81/49 = (4.5/h)^2$, so $9/7 = 4.5/h$,
 $h = 3.5 \text{ cm}$.

Q.4 A ladder 10 m long reaches a window 8 m above the ground. Find the distance of the foot of the ladder from the wall.

Ans. By Pythagoras: $d^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, so $d = 6 \text{ m}$.

Q.5 State the converse of Pythagoras theorem. Is a triangle with sides 7, 24, 25 right-angled?

Ans. If the square of one side equals the sum of squares of the other two, the angle opposite it is a right angle. $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$, so yes, right-angled.

Q.6 Prove that the ratio of areas of two similar triangles equals the square of the ratio of their sides.

Ans. Let $\triangle ABC \sim \triangle PQR$. Draw altitudes AM and PN . $\text{ar}(ABC)/\text{ar}(PQR) = (\frac{1}{2} BC \times AM)/(\frac{1}{2} QR \times PN) = (BC/QR)(AM/PN)$. $\triangle ABM \sim \triangle PQN$ gives $AM/PN = AB/PQ = BC/QR$. So the ratio = $(BC/QR)^2 = (AB/PQ)^2$.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] If $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ with $AB/DE = 2/3$, find the ratio of their areas.

Ans. 4 : 9.

Q.2 [1 mark] The sides of a triangle are 5 cm, 12 cm, 13 cm. Is it right-angled?

Ans. $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$. Yes.

Q.3 [2 marks] In $\triangle ABC$, $DE \parallel BC$ and $AD/DB = 3/5$. If $AC = 5.6$ cm, find AE .

Ans. $AE/EC = 3/5$, so $AE = (3/8) \times 5.6 = 2.1$ cm.

Q.4 [2 marks] A 15 m high pole casts a shadow of 24 m. Find the shadow of a 10 m tower at the same time.

Ans. Triangles similar: $15/24 = 10/s$, $s = 16$ m.

Q.5 [3 marks] In $\triangle ABC$, AD is the bisector of angle A . Show that $BD/DC = AB/AC$ when $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm and $BC = 7$ cm. Find BD .

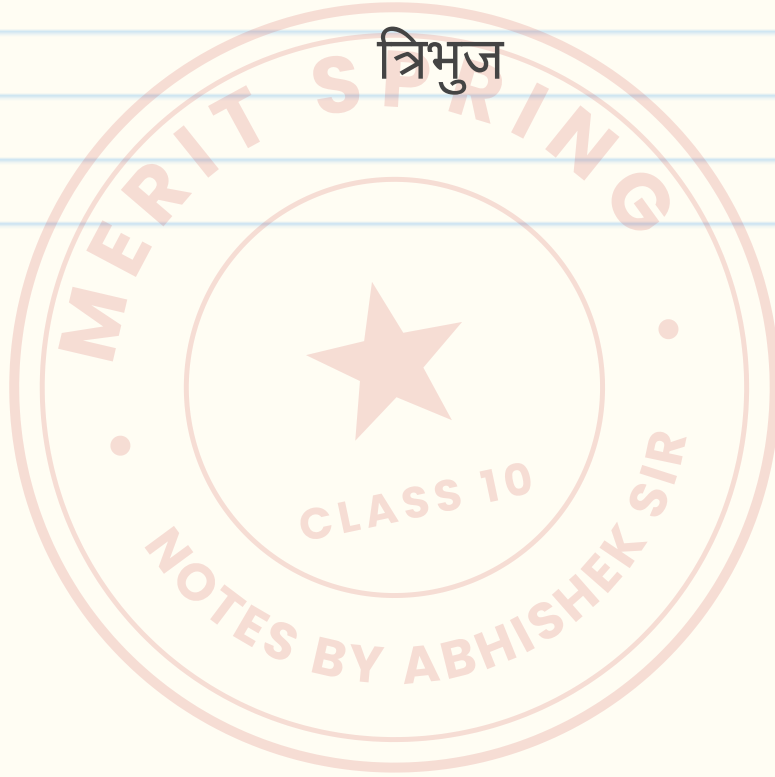
Ans. Angle bisector theorem: $BD/DC = 6/8 = 3/4$. $BD = (3/7) \times 7 = 3$ cm and $DC = 4$ cm.

Q.6 [3 marks] Prove that in a right triangle, the square of the hypotenuse equals the sum of squares of the other two sides.

Ans. In right $\triangle ABC$ (right angle at B), draw $BD \perp AC$. $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ gives $AB^2 = AD \times AC$; $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ gives $BC^2 = DC \times AC$. Adding: $AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC) = AC^2$.

HINDI VERSION

त्रिभुज



अध्याय समीक्षा

- समरूप आकृतियाँ: दो आकृतियाँ समरूप होती हैं यदि उनका आकार (शेप) समान हो, भले ही माप समान न हो। समान भुजाओं वाले दो बहुभुज समरूप हैं यदि (i) संगत कोण बराबर हों और (ii) संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों। सभी वृत्त समरूप हैं, सभी वर्ग समरूप हैं और सभी समबाहु त्रिभुज समरूप हैं।
- त्रिभुजों की समरूपता: दो त्रिभुज समरूप हैं यदि (i) उनके संगत कोण बराबर हों और (ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हों। यदि दो त्रिभुजों के कोण बराबर हों तो वे समकोणिक होते हैं और उनकी भुजाएँ समान अनुपात में होती हैं। इसे $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ लिखते हैं।
- आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (थैल्स प्रमेय): यदि त्रिभुज की एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दो भुजाओं को भिन्न बिंदुओं पर काटे तो वह उन भुजाओं को समान अनुपात में बाँटती है। $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ हो (D, AB पर और E, AC पर) तो $AD/DB = AE/EC$ विलोम: यदि कोई रेखा त्रिभुज की दो भुजाओं को समान अनुपात में बाँटे तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।
- त्रिभुजों की समरूपता के मानदंड: AAA (या AA): यदि एक त्रिभुज के दो कोण दूसरे त्रिभुज के दो कोणों के बराबर हों तो त्रिभुज समरूप हैं। SSS: यदि दो त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान अनुपात में हों तो वे समरूप हैं। SAS: यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे के एक कोण के बराबर हो और इन कोणों को अंतर्विष्ट करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों तो त्रिभुज समरूप हैं।
- समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल: दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है: $ar(\triangle ABC)/ar(\triangle PQR) = (AB/PQ)^2 = (BC/QR)^2 = (CA/PR)^2$ । यही संगत शीर्षलंबों, माध्यिकाओं और कोण समद्विभाजकों के अनुपात के लिए भी सत्य है।
- पाइथागोरस प्रमेय: समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है: $AC^2 = AB^2 + BC^2$ । प्रमेय समरूपता से सिद्ध होती है: समकोण शीर्ष से कर्ण पर लंब BD खींचने पर तीन समरूप त्रिभुज बनते हैं।
- पाइथागोरस प्रमेय का विलोम: यदि किसी त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो पहली भुजा के सामने का कोण समकोण होता है। पाइथागोरस त्रिक: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25)।

- उपयोगी परिणाम: त्रिभुज की दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं को मिलाने वाली रेखा तीसरी भुजा के समांतर और उसकी आधी होती है (मध्य-बिंदु प्रमेय)। त्रिभुज के कोण का समद्विभाजक सम्मुख भुजा को अन्य दो भुजाओं के अनुपात में बाँटता है। समकोण त्रिभुज में कर्ण AC पर लंब BD हो तो $BD^2 = AD \times DC$ ।

मुख्य शब्दावली

समरूप आकृतियाँ - समान आकार (शेप) पर आवश्यक नहीं कि समान माप।

सर्वांगसम आकृतियाँ - समान आकार और समान माप वाली आकृतियाँ।

आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय - एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में बाँटती है।

AA मानदंड - दो कोण बराबर हों तो त्रिभुज समरूप।

SSS मानदंड - तीनों संगत भुजाएँ समानुपाती हों तो त्रिभुज समरूप।

SAS मानदंड - एक कोण बराबर और अंतर्विष्ट भुजाएँ समानुपाती हों तो त्रिभुज समरूप।

क्षेत्रफल प्रमेय - समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात = भुजा अनुपात का वर्ग।

कर्ण - समकोण त्रिभुज की सबसे लंबी भुजा, समकोण के सामने।

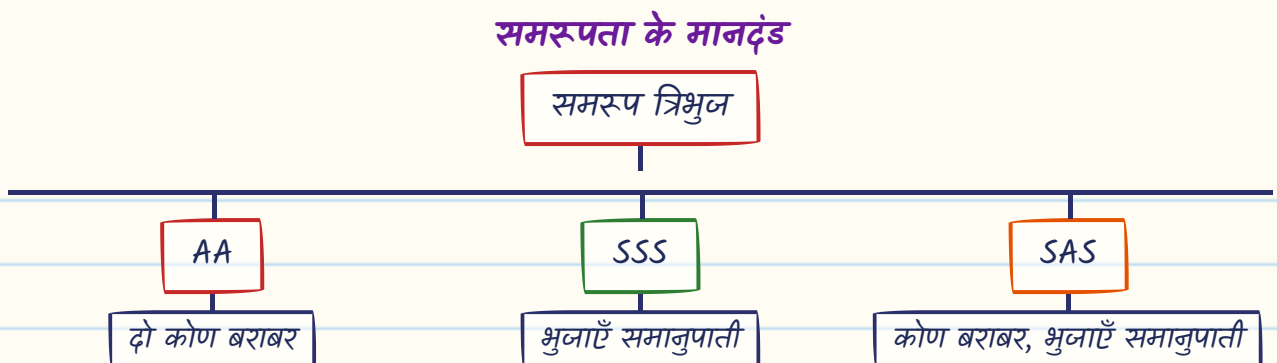
पाइथागोरस प्रमेय - $\text{कर्ण}^2 = \text{आधार}^2 + \text{लंब}^2$ ।

पाइथागोरस त्रिक - तीन संख्याएँ जिनमें $a^2 + b^2 = c^2$ हो, जैसे 3, 4, 5।

समकोणिक त्रिभुज - जिनके संगत कोण बराबर हों।

मध्य-बिंदु प्रमेय - दो भुजाओं के मध्य-बिंदुओं की रेखा तीसरी भुजा के समांतर होती है।

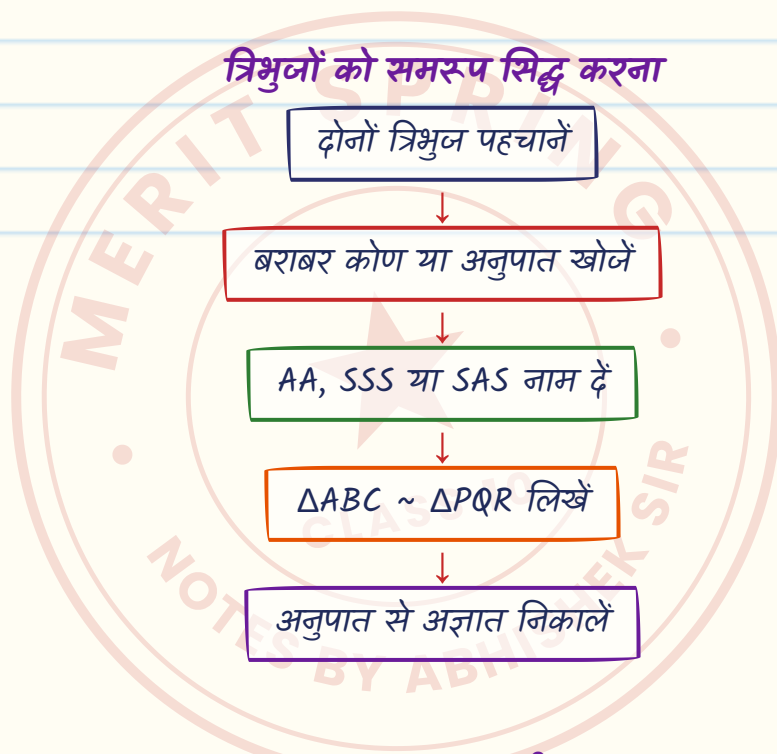
आरेख / फ्लोचार्ट



त्रिभुज की मुख्य प्रमेयें

प्रमेय	कथन
BPT	$DE \parallel BC$ तो $AD/DB = AE/EC$
क्षेत्रफल अनुपात	अनुपात = (भुजा अनुपात) ²
पाइथागोरस	$c^2 = a^2 + b^2$
विलोम	$a^2 + b^2 = c^2$ तो समकोण

त्रिभुजों को समरूप सिद्ध करना



समरूप बनाम सर्वांगसम

समरूप

- समान आकार
- भुजाएँ समानुपाती
- चिह्न ~

सर्वांगसम

- समान आकार व माप
- भुजाएँ बराबर
- चिह्न ≅

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय का कथन लिखिए और सिद्ध कीजिए।

उत्तर- कथन: त्रिभुज की एक भुजा के समांतर रेखा अन्य दो भुजाओं को समान अनुपात में बाँटती है। सिद्धि: $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ । BE और CD मिलाएँ। $ar(\triangle ADE)/ar(\triangle DEB) = AD/DB$ और $ar(\triangle ADE)/ar(\triangle DEC) = AE/EC$ । $\triangle DEB$ और $\triangle DEC$ एक ही आधार DE पर तथा समांतरों DE व BC के बीच हैं, अतः उनके क्षेत्रफल बराबर हैं। इसलिए $AD/DB = AE/EC$ ।

प्र.2 $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$, $AD = 1.5 \text{ cm}$, $DB = 3 \text{ cm}$, $AE = 1 \text{ cm}$ । EC ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $AD/DB = AE/EC$ से $1.5/3 = 1/EC$, अतः $EC = 2 \text{ cm}$ ।

प्र.3 दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफल 81 cm^2 और 49 cm^2 हैं। बड़े त्रिभुज का शीर्षलंब 4.5 cm हो तो छोटे का संगत शीर्षलंब ज्ञात कीजिए।

उत्तर- क्षेत्रफल अनुपात = (शीर्षलंब अनुपात)²: $81/49 = (4.5/h)^2$, अतः $9/7 = 4.5/h$, $h = 3.5 \text{ cm}$ ।

प्र.4 10 m लंबी सीढ़ी भूमि से 8 m ऊँची खिड़की तक पहुँचती है। सीढ़ी के पाद की दीवार से दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- पाइथागोरस से: $d^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, अतः $d = 6 \text{ m}$ ।

प्र.5 पाइथागोरस प्रमेय का विलोम लिखिए। क्या 7 , 24 , 25 भुजाओं वाला त्रिभुज समकोण है?

उत्तर- यदि एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो तो उसके सामने का कोण समकोण होता है। $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625 = 25^2$, अतः हाँ, समकोण है।

प्र.6 सिद्ध कीजिए कि दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात उनकी संगत भुजाओं के अनुपात के वर्ग के बराबर होता है।

उत्तर- $\triangle ABC \sim \triangle PQR$ लें। शीर्षलंब AM और PN खींचें। $ar(ABC)/ar(PQR) = (\frac{1}{2} BC \times AM)/(\frac{1}{2} QR \times PN) = (BC/QR)(AM/PN)$ । $\triangle ABM \sim \triangle PQN$ से $AM/PN = AB/PQ = BC/QR$ । अतः अनुपात = $(BC/QR)^2 = (AB/PQ)^2$ ।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] यदि $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ और $AB/DE = 2/3$ हो तो क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 4 : 9।

प्र.2 [1 अंक] त्रिभुज की भुजाएँ 5 cm, 12 cm, 13 cm हैं। क्या यह समकोण त्रिभुज है?

उत्तर- $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$ हाँ।

प्र.3 [2 अंक] $\triangle ABC$ में $DE \parallel BC$ और $AD/DB = 3/5$ । यदि $AC = 5.6$ cm हो तो AE ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $AE/EC = 3/5$, अतः $AE = (3/8) \times 5.6 = 2.1$ cm।

प्र.4 [2 अंक] 15 m ऊँचे खम्भे की छाया 24 m है। उसी समय 10 m ऊँचे मीनार की छाया ज्ञात कीजिए।

उत्तर- त्रिभुज समरूप: $15/24 = 10/s$, $s = 16$ m।

प्र.5 [3 अंक] $\triangle ABC$ में AD , कोण A का समद्विभाजक है। $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm और $BC = 7$ cm हो तो BD ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कोण समद्विभाजक प्रमेय: $BD/DC = 6/8 = 3/4$ । $BD = (3/7) \times 7 = 3$ cm और $DC = 4$ cm।

प्र.6 [3 अंक] सिद्ध कीजिए कि समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

उत्तर- समकोण $\triangle ABC$ (B पर समकोण) में $BD \perp AC$ खींचें। $\triangle ADB \sim \triangle ABC$ से $AB^2 = AD \times AC$; $\triangle BDC \sim \triangle ABC$ से $BC^2 = DC \times AC$ । जोड़ने पर $AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC) = AC^2$ ।