6.1 Why do runners in outer lanes start ahead?

In a 4 × 100 m race the outer lane runners start a little ahead. This gap is called the **stagger**. Reason: on a bend, the outer lane has a **bigger circle**, so its path is longer. To make the race fair, the organisers must know how to find the **length around a circle**. That is what this chapter teaches, plus **areas**.

Perimeter is the total length around a shape (an ant walking round the border). Square of side a: **4a**. Equilateral triangle: **3a**. Rectangle a by b: **2(a + b)**. The square formula is a special case of the rectangle one (put b = a).

6.2 The C/D ratio and π

Double the side of a square and its perimeter doubles. The ratio perimeter : side stays **4 : 1** for every square (3 : 1 for equilateral triangles). For circles, the circumference C and diameter D also keep a fixed ratio, **C/D**, whatever the size. We call it **π (pi)**.

> **Teacher's Note:** Home activity: wind a thin thread 20 times round a cotton reel, measure its length L and the diameter D. Then C/D = L ÷ (20 × D). You will get a number between 3.1 and 3.2.

$$C = \pi D = 2\pi r \quad \pi \approx 22/7 \approx 3.14$$

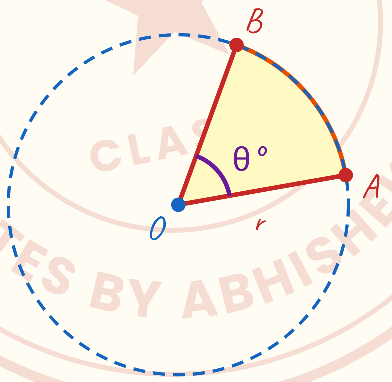
History in short: Mesopotamians used 3⅛. Archimedes trapped π between inscribed and circumscribed polygons: 3 10/71 < π < 3 1/7. Zu Chongzhi gave 355/113. Āryabhaṭa gave 3.1416 and called it **āsanna** (approximate). **Mādhava** found the first exact formula: π/4 = 1 − 1/3 + 1/5 − 1/7 + …. The symbol π was made popular by Euler.

> **Think!** Why does a hexagon inside a circle show $\pi > 3$? The hexagon has perimeter $6r$, and a circle of radius r is longer than that: $2\pi r > 6r$, so $\pi > 3$. A hexagon outside (touching) has side $2r/\sqrt{3}$, perimeter $4\sqrt{3}\,r$, so $2\pi r < 4\sqrt{3}\,r$ and $\pi < 2\sqrt{3} \approx 3.46$.

π is irrational: its decimal never ends and never repeats, and it cannot be written as a fraction of two integers. So 22/7 is only **close**: $\pi \approx 22/7$ but $\pi \neq 22/7$. A better one is 355/113. Trick to remember: "How I wish I could recollect pi" gives 3.141592 (count letters of each word).

6.3 Length of an arc

Semicircle: half of $2\pi r = \pi r$. Quarter circle: $\pi r/2$. For an arc making angle θ° at the centre, take that fraction of the whole circle:



Arc AB, angle θ at centre O

$$\text{arc length} = 2\pi r \times \theta/360$$

Racing track. A 400 m track has two straights of 84.39 m and two semicircle bends. An athlete running 0.3 m from the inner edge on the bends ($r = 36.8$ m): $2 \times 84.39 + 2\pi \times 36.8 = 168.78 + 231.22 =$ **400 m** ✓. Each outer lane is 1.22 m wider, so one bend is longer by $\pi \times 1.22 \approx$ **3.83 m**. That

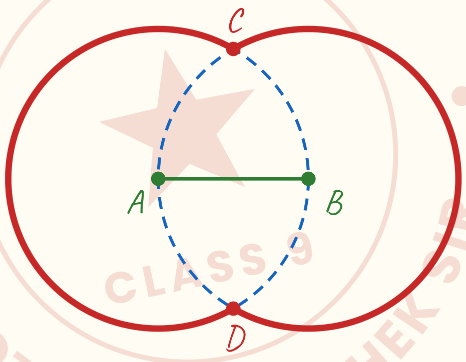
is the stagger. It depends only on the **lane width**, not on the track size, so a 200 m school track needs the **same** stagger.

Perimeter puzzles (solved)

Example 1: Two circles of radius r, each through the other centre. Perimeter of the shape?

Step 1: Triangle ABC has all sides r, so it is equilateral and $\angle CAB = 60°$. So $\angle CAD = 120°$, and each outer red arc is 240°, which is 2/3 of a circle.

Step 2: Total = $2 \times (2/3) \times 2\pi r = 8\pi r/3$.

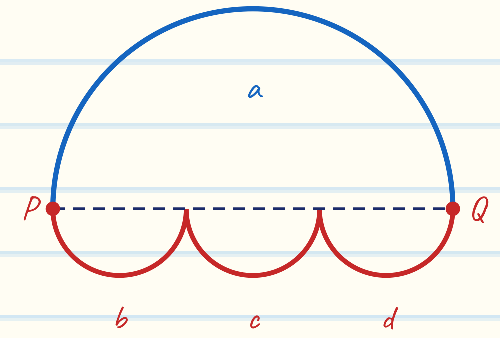


Two circles, each through the other centre

Example 2: One big semicircle a or three small semicircles b, c, d. Which path is longer?

Step 1: Lengths: $\pi a'$ and $\pi(b' + c' + d')$. Since $PQ = 2a' = 2b' + 2c' + 2d'$, we get $a' = b' + c' + d'$.

Step 2: So the paths are **equal**.



Path a (top) or path b + c + d (bottom)?

Exercise Set 6.1 (solved, $\pi = 22/7$)

Q.1 Perimeter 44 cm. Radius?

Ans. $2 \times 22/7 \times r = 44$, so $r = 44 \times 7 \div 44 =$ **7 cm** .

Q.2 Circumference for $r = 7, 10, 12$ cm (3 significant figures)

Ans. (i) $2 \times 22/7 \times 7 =$ **44.0 cm** .

(ii) $2 \times 22/7 \times 10 = 62.857$, so **62.9 cm** .

(iii) $2 \times 22/7 \times 12 = 75.43$, so **75.4 cm** .

Q.3 Arc length: (i) $r = 3.5$ cm, $60°$ (ii) $r = 6.3$ m, $120°$

Ans. (i) $2 \times 22/7 \times 3.5 \times 60/360 = 22 \times 1/6 =$ **3.67 cm** .

(ii) $2 \times 22/7 \times 6.3 \times 120/360 = 39.6 \div 3 =$ **13.2 m** .

Q.4 Perimeter of a sector, $r = 14$ cm, angle $75°$

Ans. Arc $= 2 \times 22/7 \times 14 \times 75/360 = 88 \times 5/24 = 18.33$ cm.

Add two radii: $18.33 + 14 + 14 =$ **46.33 cm** .

Q.5 Perimeters of the shapes in Fig. 6.14 (arcs are halves or quarters)

Ans. (i) Rectangle 80 m with two semicircles of diameter 60 m at the ends: $2 \times 80 + 60\pi = 160 + 188.57 =$ **348.57 m** .

(ii) Outer semicircle ($d = 12$) + inner semicircle ($d = 8$) + two base pieces of 2 cm each: $6\pi + 4\pi + 4 = 10\pi + 4 =$ **35.43 cm** .

MERIT SPRING CLASS 9 NOTES BY ABHISHEK SIR

(iii) Square of side 10 with a semicircle on each side: $4 \times (\pi \times 5) = 20\pi$ = **62.86 cm**.

(iv) Equilateral triangle side 12 with a semicircle on each side: $3 \times (\pi \times 6) = 18\pi$ = **56.57 cm**.

(v) Each small square has side 14 cm. Four quarter circles of radius 14 make 1 full circle = 28π, and four semicircle bumps of diameter 14 add $4 \times 7\pi = 28\pi$. Total = 56π = **176 cm**.

(vi) Big semicircle d = 28: $14\pi = 44$. Four small semicircles d = 7: $4 \times 3.5\pi = 44$. Total **88 cm**.

(vii) Right triangle 6, 8, 10 with a semicircle on every side: $\pi(5 + 4 + 3) = 12\pi$ = **37.71 cm**.

(viii) Big semicircle d = 12: 6π, plus three small d = 4: $3 \times 2\pi = 6\pi$. Total 12π = **37.71 cm**.

(ix) Big semicircle (r = 10) 10π, plus two small ones (r = 5) $5\pi + 5\pi$. Total 20π = **62.86 cm**.

Q.6 Tyre diameter 56 cm

Ans. (i) One revolution = circumference = $22/7 \times 56$ = **176 cm**.

(ii) 10 km = 1,000,000 cm. Revolutions = $1{,}000{,}000 \div 176 \approx$ **5682**.

Q.7 Total perimeter of all petals (Fig. 6.15)

Ans. (i) The petals are made from 4 semicircles of radius 7 (square side 14), so the total = $4 \times 7\pi = 28\pi$ = **88 cm**.

(ii) Hexagon side 42. Each petal has two 60° arcs of radius 42, each arc is $42\pi/3$. 6 petals × 2 arcs × $14\pi = 168\pi$ = **528 cm**.

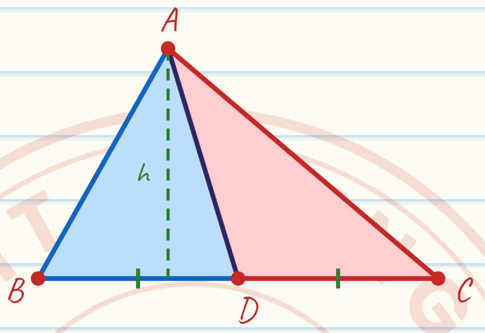
Q.8 Perimeters in ratio 5 : 4. Ratio of radii?

Ans. Perimeter = $2\pi r$, so perimeter is proportional to r. Radii are also in the ratio **5 : 4**.

MERIT SPRING • NOTES BY ABHISHEK SIR • CLASS 9

6.4 Areas you already know

Rectangle: **ab** . Square: **a^2** . Parallelogram: **base × height = bh** (cut a triangle off one side and stick it on the other side to get a rectangle). Triangle: two copies make a parallelogram, so area = **½ × base × height** . A parallelogram with fixed sides can be squeezed, so its area is **not** fixed by its sides alone.



Median AD cuts the triangle into two equal areas

> Theorem: a median divides a triangle into two triangles of equal area.

Reason: triangles ABD and ACD have equal bases (BD = DC) and the same height h, so each has area ½ × (BC/2) × h. They look different but have equal area.

> **Think!** Rectangles with perimeter 40: there are **infinitely many** . The largest area is the **square 10 × 10 = 100** . There is **no smallest** area (a very thin rectangle has area close to 0).

6.5 Heron's formula

If the sides are a, b, c, the **semi-perimeter** is s = (a + b + c)/2. Then:

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Test 1: Equilateral triangle, side a

Step 1: $s = 3a/2$. Area = $\sqrt{[(3a/2)(a/2)(a/2)(a/2)]} = \sqrt{(3a^4/16)} =$ $(\sqrt{3}/4)a^2$. Same as $\frac{1}{2} \times a \times (\sqrt{3}/2)a$ ✓.

Test 2: Triangle 3, 4, 5

Step 1: $s = 6$. Area = $\sqrt{(6 \times 3 \times 2 \times 1)} = \sqrt{36} =$ **6**. And $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$ ✓.

Two more formulas: Area = **$abc/(4R)$** (R = circumradius) and Area = **$r(a + b + c)/2$** (r = inradius).

Brahmagupta's formula for a **cyclic** 4-gon with sides a, b, c, d and $s = (a + b + c + d)/2$:

$$\text{Area} = \sqrt{[(s - a)(s - b)(s - c)(s - d)]}$$

Teacher's Note: Why cyclic? A rhombus with side 3 can have areas 9, 8.01 or 5.41 depending on its angle. So four sides alone do not fix the area. Put $d = 0$ and Brahmagupta's formula becomes Heron's formula. This is called a **generalisation**; Heron's is the **special case**.

Squaring a rectangle (Baudhāyana): to make a square of area ab, use $((a+b)/2)^2 - ((a-b)/2)^2 = ab$. The square side is the leg of a right triangle with hypotenuse $(a+b)/2$ and other leg $(a-b)/2$.

Exercise Set 6.2 (solved)

Q.1 Area of triangle ADE (rectangle ABCD, AD = 8, DC = 10, E on BC)

Ans. Base AD = 8 cm and E is 10 cm from AD, so area = $\frac{1}{2} \times 8 \times 10 =$ **40 cm^2**.

Q.2 Trapezium with parallel sides 40, 20 and equal legs 26

Ans. Half the difference of parallel sides = $(40 - 20)/2 = 10$. Height = $\sqrt{(26^2 - 10^2)} = \sqrt{576} = 24$.

Area = $\frac{1}{2} \times (40 + 20) \times 24 =$ **720 cm²**.

Q.3 Sides 8 and 11, perimeter 32

Ans. Third side = $32 - 19 = 13$. $s = 16$. Area = $\sqrt{(16 \times 8 \times 5 \times 3)} = \sqrt{1920} = 8\sqrt{30} \approx$ **43.8 cm²**.

Q.4 Sides in ratio 3 : 5 : 7, perimeter 300 m

Ans. Sides = 60, 100, 140 m. $s = 150$. Area = $\sqrt{(150 \times 90 \times 50 \times 10)} = \sqrt{6{,}750{,}000} = 1500\sqrt{3} \approx$ **2598 m²**.

Q.5 Rhombus diagonals d and 2d, area 128

Ans. Area = $\frac{1}{2} \times d \times 2d = d^2 = 128$, so $d = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \approx$ **11.3 cm** (shorter diagonal).

Q.6 P, Q on side AB of parallelogram ABCD. Area(PCD) : Area(QCD)?

Ans. Both triangles have the same base CD and the same height (distance between parallel lines AB and CD). Ratio = **1 : 1**.

Q.7 O on diagonal PR of parallelogram PQRS. Area(PSO) = Area(PQO)

Ans. Diagonal PR passes through the midpoint of QS, so Q and S are at **equal distance** from line PR. Triangles PSO and PQO share base PO and have equal heights, so **equal area**.

Q.8 Midpoints of a 4-gon joined: area of the parallelogram = ½ area of 4-gon

Ans. In 4-gon ABCD, take midpoints P (AB), Q (BC), R (CD), S (DA). PQ is parallel to AC and half of it, so triangle BPQ has sides half of triangle BAC, hence **¼** of its area. Same for DRS and ADC. Together: ¼ of the whole 4-gon.

Triangles APS and CQR also give 1/4 together. The four corner triangles = 1/2 of the 4-gon. So the middle parallelogram = **1/2**.

Q.9 Median AD, P on AD. Area(ABP) = Area(ACP)

Ans. Median: Area(ABD) = Area(ACD). In triangle PBC, PD is a median, so Area(PBD) = Area(PCD). Subtract: **Area(ABP) = Area(ACP)**.

Q.10 P inside square ABCD. Ratio of red (PAB + PCD) to green (PBC + PDA)

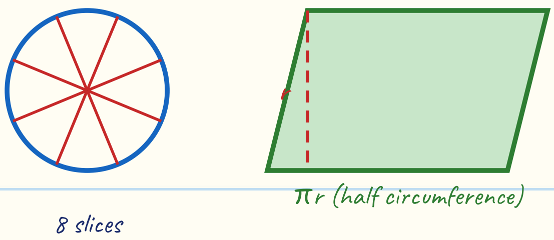
Ans. Heights from P to AB and CD add up to the side s, so red = 1/2 × s × s = $s^2/2$. Same for green. Ratio = **1 : 1**.

Q.11 D midpoint of AB, CQ ∥ PD. Area(BPQ) = 1/2 Area(ABC)

Ans. Triangles DPQ and DPC have the same base DP and lie between parallels PD and CQ, so Area(DPQ) = Area(DPC).
Area(BPQ) = Area(BPD) + Area(DPQ) = Area(BPD) + Area(DPC) = Area(BDC) = **1/2 Area(ABC)** (CD is a median).

6.6 Area of a circle

Cut a circle into many thin slices and place them alternately. They form almost a **parallelogram** with base = half the circumference = **πr** and height = **r**.



Slices of a circle make a parallelogram

Area of circle = $\pi r \times r = \pi r^2$

Archimedes said: area = ½ × circumference × radius = ½ × $2\pi r \times r = \pi r^2$.
Early values: Babylonians $A \approx C^2/12$; Egyptians $A \approx (8d/9)^2$.

Sector (like a pizza slice, angle θ°): area = $\pi r^2 \times \theta/360$. Semicircle = $\pi r^2/2$, quadrant = $\pi r^2/4$. A **segment** is the region between an arc and its chord.

sector area = $\pi r^2 \times \theta/360$

Exercise Set 6.3 (solved)

Q.1 Sector, r = 7, angle 60°

Ans. 22/7 × 49 × 60/360 = 154/6 = **25.67 cm²**.

Q.2 Quadrant of a circle with circumference 44 cm

Ans. 2 × 22/7 × r = 44, so r = 7. Quadrant = ¼ × 22/7 × 49 = **38.5 cm²**.

Q.3 Minute hand 7 cm, area swept in 10 minutes

Ans. 10 minutes = 60° (since 60 min = 360°). Area = 22/7 × 49 × 60/360 = **25.67 cm²**.

Q.4 r = 10, chord subtends 90° (π = 3.14)

Ans. (i) Minor sector = 3.14 × 100 × 90/360 = **78.5 cm²**.
(ii) Major sector = 3.14 × 100 × 270/360 = **235.5 cm²**.

Q.5 r = 15, chord subtends 60° (π = 3.14, $\sqrt{3}$ = 1.73)

Ans. Sector = 3.14 × 225 × 60/360 = 117.75. Triangle OAB is equilateral with side 15: area = ($\sqrt{3}/4$) × 225 = 97.31.
Minor segment = 117.75 − 97.31 = **20.44 cm²**.

Circle = 3.14 × 225 = 706.5. **Major segment** = 706.5 − 20.44 = **686.06 cm^2**.

Q.6 Two wipers, blade 28 cm, angle 120° each

Ans. One wiper: 22/7 × 784 × 120/360 = 821.33. Two wipers: **1642.67 cm^2**.

Q.7 Minor segment for 60° chord = $r^2(\pi/6 - \sqrt{3}/4)$

Ans. Sector = $\pi r^2/6$. Triangle OAB is equilateral: $(\sqrt{3}/4)r^2$. Difference = $\pi r^2(1/6 - \sqrt{3}/(4\pi)) = r^2(\pi/6 - \sqrt{3}/4)$.

Q.8 Equilateral triangle in a circle of radius r. Area ratio?

Ans. Side = $r\sqrt{3}$, so area = $(\sqrt{3}/4) \times 3r^2 = 3\sqrt{3}r^2/4$. Ratio = $3\sqrt{3}r^2/4 \div \pi r^2$ = $3\sqrt{3}/(4\pi) \approx 0.413$.

Q.9 Square in a circle

Ans. Diagonal = 2r, so $side^2 = 2r^2$ = area. Ratio = $2r^2/\pi r^2 = 2/\pi \approx 0.637$.

Q.10 Hexagon in a circle

Ans. Six equilateral triangles of side r: $6 \times (\sqrt{3}/4)r^2 = 3\sqrt{3}r^2/2$. Ratio = $3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827$. This is exactly twice the answer to Q8, because the hexagon has twice the area of the inscribed equilateral triangle.

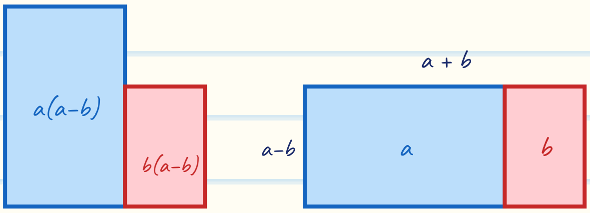
End-of-Chapter Exercises (solved)

Q.1 Area models of identities

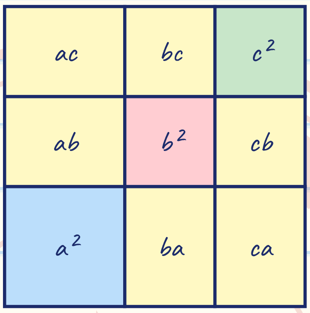
Ans. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ is a big square of side a + b cut in 4 pieces.

For (a + b)(a − b): take a square a × a and remove the corner b × b. Cut the L-shape in two rectangles and place them side by side to form (a + b) by (a − b).

For $(a + b + c)^2$: a square of side a + b + c cut in a 3 × 3 grid. The pieces are a^2, b^2, c^2 and two each of ab, bc, ca.



$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



$(a+b+c)^2$ as 9 pieces

Q.2 Isosceles, perimeter 40, equal sides 15

Ans. Base = 40 − 30 = 10. Height = $\sqrt{(225 - 25)} = 10\sqrt{2}$. Area = ½ × 10 × $10\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \approx$ **70.7 cm²** (Heron: s = 20, $\sqrt{(20 \times 5 \times 5 \times 10)} = \sqrt{5000}$ ✓).

Q.3 Isosceles, base 10, area 60

Ans. ½ × 10 × h = 60, so h = 12. Equal side = $\sqrt{(5^2 + 12^2)}$ = **13 cm**.

Q.4 Right triangle, area 54, one leg 12

Ans. Other leg = 2 × 54 ÷ 12 = 9. Hypotenuse = $\sqrt{(144 + 81)}$ = 15. Perimeter = 12 + 9 + 15 = **36 cm**.

Q.5 Sides 2 : 3 : 4, perimeter 45

Ans. Sides 10, 15, 20. s = 22.5. Area = $\sqrt{(22.5 \times 12.5 \times 7.5 \times 2.5)}$ = $75\sqrt{15}/4 \approx$ **72.6 cm²**.

Q.6 Triangle 7, 24, 25: two ways

Ans. Right triangle ($49 + 576 = 625$): $\frac{1}{2} \times 7 \times 24 =$ **84 cm²**.
Heron: $s = 28$, $\sqrt{(28 \times 21 \times 4 \times 3)} = \sqrt{7056} =$ **84 cm²** ✓.

Q.7 Wheel d = 60 cm, 100 rotations

Ans. Circumference $= 22/7 \times 60 = 188.57$ cm. Distance $= 100 \times 188.57 = 18857$ cm $\approx$ **188.6 m**.

Q.8 Quadrant of circle with circumference 66 cm

Ans. $r = 66 \times 7/44 = 10.5$. Area $= \frac{1}{4} \times 22/7 \times 10.5^2 =$ **86.625 cm²**.

Q.9 Car wheel r = 28 cm

Ans. One turn $= 2 \times 22/7 \times 28 =$ **176 cm**. 1 km = 100,000 cm, so turns $= 100{,}000 \div 176 \approx$ **568**.

Q.10 Same area and same perimeter: congruent?

Ans. Sides a, b with $a + b = p$ and $ab = A$. a and b are the roots of $x^2 - px + A = 0$, so the pair {a, b} is fixed. **Yes**, the rectangles are congruent.

Q.11 Trapezium area from a parallelogram

Ans. Take a second copy of the trapezium, turn it upside down, and join it. You get a parallelogram of base $(a + b)$ and height h. The trapezium is half of it: **$\frac{1}{2}(a + b)h$**.

Q.12 Trapezium as two triangles

Ans. A diagonal makes two triangles, with bases a and b and the same height h. Area $= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh =$ **$\frac{1}{2}(a + b)h$**.

Q.13 Two identical trapeziums make a parallelogram

Ans. Rotate the second trapezium by 180° and attach it along a leg. Parallelogram base $= a + b$, height $= h$, area $= (a + b)h$. One trapezium

MERIT SPRING · CLASS 9 · NOTES BY ABHISHEK SIR

$= \frac{1}{2}(a + b)h$.

Q.14 Kite area = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

Ans. (i) Algebra: diagonals meet at right angles; the long diagonal d_1 is cut into x and y with $x + y = d_1$. Two triangles: $\frac{1}{2} \times d_2 \times x + \frac{1}{2} \times d_2 \times y = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

(ii) Geometry: draw a rectangle $d_1 \times d_2$ around the kite. The kite is exactly half of this rectangle.

Q.15 Scaling

Ans. (i) Sides 2a, 2b: area 4ab, four times. 4 copies of ABCD fit (2 × 2). ✓

(ii) Triangle with sides doubled: area × 4. Joining midpoints cuts it into 4 congruent small triangles, so 4 copies fit ✓.

(iii) Sides tripled: area × 9. Trisect the sides and cut into 9 congruent triangles, so 9 copies fit ✓.

Q.16 Fraction shaded

Ans. Fig 6.43: P is the midpoint of one side, Q and S trisect another. The shaded 4-gon is 1/2 of the triangle.

Fig 6.44: side 2, the lines are $2x + y = 2$ and $2x + y = 4$ etc. Inner square vertices are (0.4, 1.2), (1.2, 1.6), ... so its $side^2 = 0.8$. Area 0.8 out of 4 = 1/5.

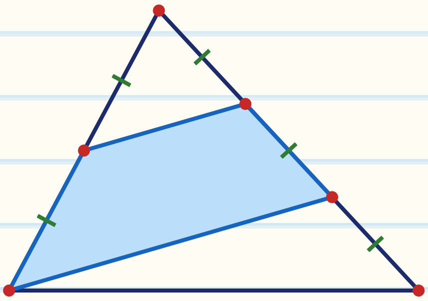


Fig. 6.43: shaded part = 1/2

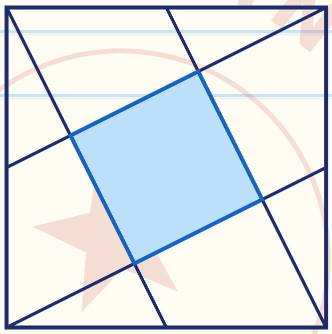


Fig. 6.44: shaded part = 1/5

MERIT SPRING CLASS 9 NOTES BY ABHISHEK SIR

Q.17 Circles in a rectangle

Ans. Fig 6.45: 3 circles of radius r in a $6r \times 2r$ rectangle: $3\pi r^2 \div 12r^2 = \pi/4$.

Fig 6.46: 4 circles in $8r \times 2r$: $4\pi r^2 \div 16r^2 = \pi/4$.

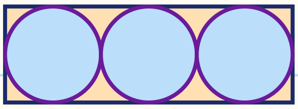


Fig. 6.45: 3 circles

Q.18 n circles in a row

Ans. Rectangle = $2nr \times 2r = 4nr^2$. Circles = $n\pi r^2$. Fraction = **$\pi/4 \approx 78.5\%$** for 10, 20, 50 or any n. n cancels, so the claim is proved for every n.

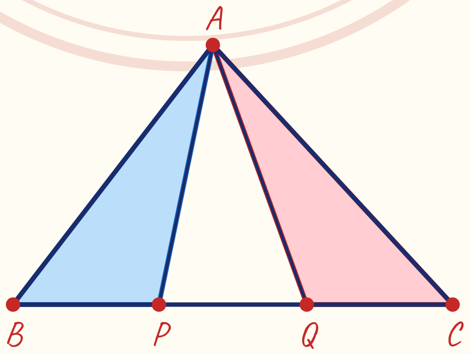
Q.19 Nine rectangles, big rectangle area 72

Ans. Let each small rectangle be l by w. Top row: 4 lying l, bottom row: 5 standing w. Same length: $4l = 5w$. Area: $9lw = 72$, $lw = 8$.
$l = 5w/4$, so $5w^2/4 = 8$, $w^2 = 32/5$, $w = 4\sqrt{10}/5$, $l = \sqrt{10}$.
Perimeter = $2(l + w) = 2 \times 1.8\sqrt{10} = 18\sqrt{10}/5 \approx$ **11.38 cm** .

Q.20 Trisection triangles are equal

Ans. Blue and red triangles share the apex A and have bases BP = QC (equal, since the base is trisected) and the same height. So their areas are **equal** .

To rearrange: cut the blue triangle by the line joining the midpoints of its two slant sides. The small top triangle, turned 180°, joins the trapezium to make a parallelogram. Cut a right-angled triangle off and move it to make a rectangle of base BP and height $h/2$. Do the same steps backwards to get the red triangle.

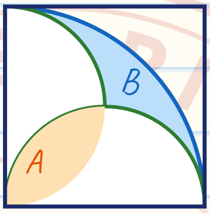


Q20: bases BP = QC, same height

Q.21 Quarter circle and two semicircles: $A = B$

Ans. Square side a. Quarter circle (centre at the vertex) $= \pi a^2/4$. Two semicircles on the sides: $2 \times \pi a^2/8 = \pi a^2/4$. They are equal.

Quarter circle = (two semicircles together) − A + B. Since the totals are equal, **$A = B$**.



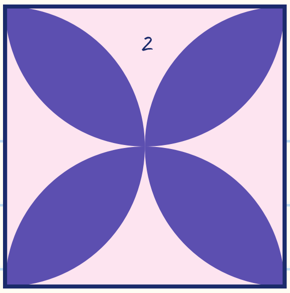
Q21: area A = area B

MERIT SPRING • CLASS 9 • NOTES BY ABHISHEK SIR

Q.22 Four-petal flower, square side 2

Ans. Each petal is two quarter circles of radius 1: perimeter π. **Perimeter = $4\pi \approx 12.57$.**

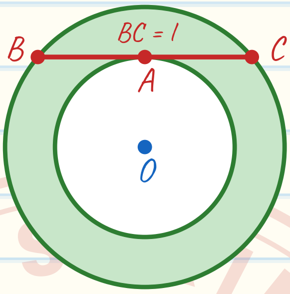
Four semicircles total area 2π cover the square (area 4) once, and the petals twice. Petal area $= 2\pi - 4$. **Area = $2\pi - 4 \approx 2.28$ sq. units.**



Q22: four-petal flower

Q.23 Two concentric circles, $BC = l$ touches the small one

Ans. A is the midpoint of BC, so $AB = l/2$. Right triangle OAB: $R^2 = r^2 + (l/2)^2$. Ring area $= \pi(R^2 - r^2) = \pi \times l^2/4 = \frac{1}{4}\pi l^2$.



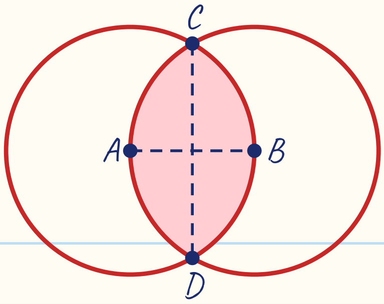
Q23: ring between two circles

Q.24 Semicircles on the sides of a right triangle

Ans. Semicircle areas: $\pi a^2/8$, $\pi b^2/8$, $\pi c^2/8$. Since $a^2 + b^2 = c^2$, the two on the legs add up to the one on the hypotenuse: $A + B = C$.

Q.25 Area of the two-circle lens

Ans. Triangle ABC is equilateral, so each arc is 120°. Lens = 2 × (sector 120° − triangle) $= 2(\pi r^2/3 - \sqrt{3}r^2/4) = r^2(2\pi/3 - \sqrt{3}/2) \approx 1.23r^2$.



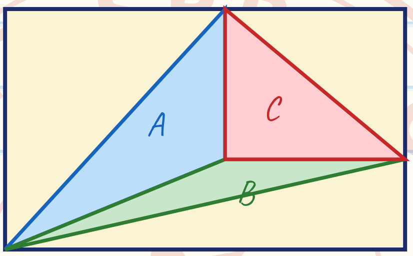
Q25: the shaded lens

Q.26 Rectangle = $2(A + C)(B + C)/C$

Ans. Let the rectangle be W by H. The point P is at distance x from the left and y from the bottom. $A = ½x(H − y)$, $B = ½(W − x)y$, $C = ½(W − x)(H − y)$.

$(A + C) = ½(H − y)W$ and $(B + C) = ½(W − x)H$. Product $= ¼WH(W − x)(H − y) = ¼WH × 2C = WHC/2$.

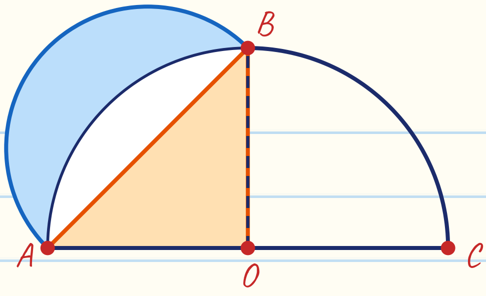
So $WH =$ **$2(A + C)(B + C)/C$**.



Q26: triangles A, B, C in a rectangle

Q.27 The two shaded regions are equal

Ans. Radius r, $AB = r\sqrt{2}$. Semicircle on AB has radius $r\sqrt{2}/2$, area $= ½ × \pi × r^2/2 = \pi r^2/4$. Quarter circle OAB has area $\pi r^2/4$. They are equal. Lune = semicircle − segment; triangle OAB = quarter circle − the same segment. Hence **lune = triangle** (a lune of Hippocrates).



Q27: blue lune = orange triangle

Teacher's Note: Chapter summary: $C = 2\pi r$. Arc $= 2\pi r \times \theta/360$. Triangle $= \frac{1}{2}bh$. Heron: $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$. Circle $= \pi r^2$. Sector $= \pi r^2 \times \theta/360$. Brahmagupta: $\sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}$ for a cyclic 4-gon. π is irrational.

MERIT SPRING
CLASS 9
NOTES BY ABHISHEK SIR

हिंदी संस्करण

स्थान की माप: परिमाप और क्षेत्रफल

MERIT SPRING • CLASS 9 • NOTES BY ABHISHEK SIR

6.1 बाहरी लेन के धावक आगे से क्यों शुरू करते हैं?

4 × 100 मी की रिले दौड़ में बाहरी लेन के धावक थोड़ा आगे से दौड़ना शुरू करते हैं। इस फ़ासले को **स्टैगर** कहते हैं। कारण: मोड़ पर बाहरी लेन का **वृत्त बड़ा** होता है, इसलिए उसका रास्ता लंबा होता है। दौड़ को न्यायपूर्ण बनाने के लिए **वृत्त की लंबाई** निकालना आना चाहिए। यही इस अध्याय में सीखेंगे, साथ में **क्षेत्रफल** ।

परिमाप किसी आकृति की सीमा की कुल लंबाई है (जैसे चींटी किनारे-किनारे घूमे)। वर्ग (भुजा a): **4a** । समबाहु त्रिभुज: **3a** । आयत a × b: **2(a + b)** । वर्ग का सूत्र आयत के सूत्र का विशेष रूप है (b = a रखो)।

6.2 C/D अनुपात और π

वर्ग की भुजा दुगुनी करो तो परिमाप भी दुगुना होता है। परिमाप : भुजा का अनुपात हर वर्ग में **4 : 1** रहता है (समबाहु त्रिभुज में 3 : 1)। वृत्त में भी परिधि C और व्यास D का अनुपात **C/D** हर आकार में एक ही रहता है। इसे **π (पाई)** कहते हैं।

> **शिक्षक की बात:** घर पर प्रयोग: सूत की रील पर पतला धागा 20 बार कसकर लपेटो, धागे की लंबाई L और रील का व्यास D नापो। तब C/D = L ÷ (20 × D)। उत्तर 3.1 और 3.2 के बीच आएगा।

$$C = \pi D = 2\pi r \quad \pi \approx 22/7 \approx 3.14$$

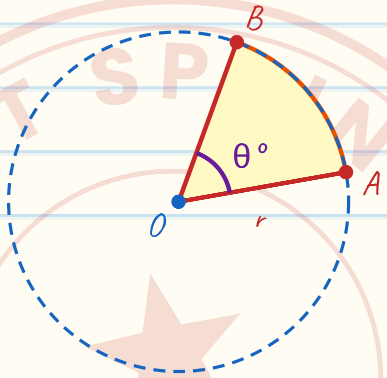
इतिहास संक्षेप में: मेसोपोटामिया ने 3⅛ लिया। आर्किमिडीज़ ने अंदर और बाहर के बहुभुजों के बीच π को पकड़ा: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$। ज़ू चोंगज़ी ने 355/113 दिया। **आर्यभट** ने 3.1416 दिया और उसे **आसन्न** (लगभग) कहा। **माधव** ने π का पहला सटीक सूत्र खोजा: $\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots$। π चिह्न को यूलर ने लोकप्रिय बनाया।

> **सोचो!** वृत्त के अंदर षट्भुज से π > 3 कैसे दिखता है? षट्भुज का परिमाप 6r है और वृत्त उससे लंबा है: 2πr > 6r, इसलिए **π > 3** । बाहर वाले षट्भुज की भुजा $2r/\sqrt{3}$, परिमाप $4\sqrt{3}\,r$, तो $2\pi r < 4\sqrt{3}\,r$, यानी $\pi < 2\sqrt{3} \approx 3.46$ ।

π अपरिमेय है: इसका दशमलव कभी खत्म नहीं होता और दोहराता नहीं, और इसे दो पूर्णांकों के भिन्न के रूप में नहीं लिख सकते। इसलिए 22/7 केवल **पास** है: $\pi \approx 22/7$ लेकिन $\pi \neq 22/7$। बेहतर मान 355/113 है।

6.3 चाप की लंबाई

अर्धवृत्त: $2\pi r$ का आधा = πr । चौथाई वृत्त: $\pi r/2$ । केंद्र पर θ° कोण बनाने वाले चाप के लिए पूरे वृत्त का उतना ही भाग लो:



चाप AB, केंद्र O पर कोण θ

$$\text{चाप की लंबाई} = 2\pi r \times \theta/360$$

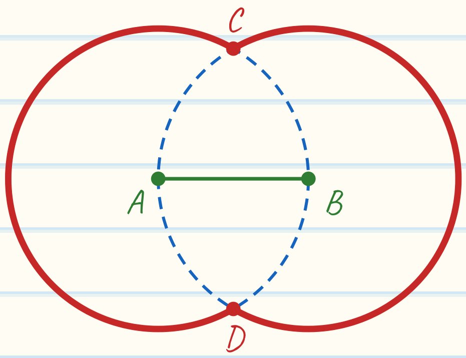
दौड़ का ट्रैक। 400 मी ट्रैक में दो सीधे भाग 84.39 मी और दो अर्धवृत्ताकार मोड़ हैं। भीतरी किनारे से 0.3 मी हटकर दौड़ने वाला (r = 36.8 मी): $2 \times 84.39 + 2\pi \times 36.8 = 168.78 + 231.22 =$ **400 मी** ✓। हर बाहरी लेन 1.22 मी चौड़ी है, इसलिए एक मोड़ $\pi \times 1.22 \approx$ **3.83 मी** लंबा हो जाता है। यही स्टैगर है। यह केवल **लेन की चौड़ाई** पर निर्भर है, ट्रैक के आकार पर नहीं, इसलिए 200 मी वाले स्कूल ट्रैक में **उतना ही** स्टैगर चाहिए।

परिमाप की पहेलियाँ (हल सहित)

उदाहरण 1: त्रिज्या r के दो वृत्त, हर एक दूसरे के केंद्र से गुज़रता है। आकृति का परिमाप?

चरण 1: त्रिभुज ABC की सब भुजाएँ r हैं, इसलिए समबाहु है और ∠CAB = 60°। इसलिए ∠CAD = 120°, और हर बाहरी लाल चाप 240° है, यानी वृत्त का 2/3।

चरण 2: कुल = $2 \times (2/3) \times 2\pi r =$ **$8\pi r/3$** ।

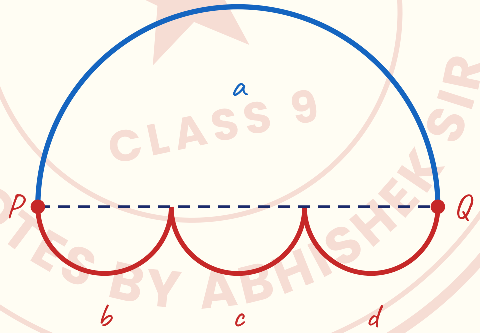


दो वृत्त, हर एक दूसरे के केंद्र से गुज़रता है

उदाहरण 2: एक बड़ा अर्धवृत्त a या तीन छोटे अर्धवृत्त b, c, d। कौन-सा रास्ता लंबा है?

चरण 1: लंबाइयाँ: $\pi a'$ और $\pi(b' + c' + d')$। $PQ = 2a' = 2b' + 2c' + 2d'$, इसलिए $a' = b' + c' + d'$।

चरण 2: इसलिए दोनों रास्ते **बराबर** हैं।



रास्ता a (ऊपर) या b + c + d (नीचे)?

NERIT SPRING CLASS 9 NOTES BY ABHISHEK SIR

प्रश्नावली 6.1 (हल सहित, $\pi = 22/7$)

प्र.1 परिमाप 44 सेमी। त्रिज्या?

उत्तर- $2 \times 22/7 \times r = 44$, इसलिए $r = 44 \times 7 \div 44 =$ **7 सेमी** ।

प्र.2 r = 7, 10, 12 सेमी की परिधि (3 सार्थक अंकों तक)

उत्तर- (i) $2 \times 22/7 \times 7 =$ **44.0 सेमी** ।

(ii) $2 \times 22/7 \times 10 = 62.857$, यानी **62.9 सेमी** ।

(iii) $2 \times 22/7 \times 12 = 75.43$, यानी **75.4 सेमी** ।

प्र.3 चाप की लंबाई: (i) $r = 3.5$ सेमी, 60° (ii) $r = 6.3$ मी, 120°

उत्तर- (i) $2 \times 22/7 \times 3.5 \times 60/360 = 22 \times 1/6 =$ **3.67 सेमी** ।

(ii) $2 \times 22/7 \times 6.3 \times 120/360 = 39.6 \div 3 =$ **13.2 मी** ।

प्र.4 त्रिज्यखंड का परिमाप, $r = 14$ सेमी, कोण 75°

उत्तर- चाप $= 2 \times 22/7 \times 14 \times 75/360 = 88 \times 5/24 = 18.33$ सेमी।

दो त्रिज्याएँ जोड़ो: $18.33 + 14 + 14 =$ **46.33 सेमी** ।

प्र.5 चित्र 6.14 की आकृतियों के परिमाप (चाप आधे या चौथाई वृत्त के हैं)

उत्तर- (i) आयत 80 मी, दोनों सिरों पर व्यास 60 मी के अर्धवृत्त: $2 \times 80 + 60\pi = 160 + 188.57 =$ **348.57 मी** ।

(ii) बाहरी अर्धवृत्त (व्यास 12) + भीतरी अर्धवृत्त (व्यास 8) + आधार के दो टुकड़े 2-2 सेमी: $6\pi + 4\pi + 4 = 10\pi + 4 =$ **35.43 सेमी** ।

(iii) भुजा 10 के वर्ग की हर भुजा पर अर्धवृत्त: $4 \times (\pi \times 5) = 20\pi =$ **62.86 सेमी** ।

(iv) भुजा 12 के समबाहु त्रिभुज की हर भुजा पर अर्धवृत्त: $3 \times (\pi \times 6) = 18\pi =$ **56.57 सेमी** ।

(v) हर छोटे वर्ग की भुजा 14 सेमी। त्रिज्या 14 के चार चौथाई वृत्त मिलकर । पूरा वृत्त $= 28\pi$, और व्यास 14 के चार अर्धवृत्त $4 \times 7\pi = 28\pi$। कुल $= 56\pi =$ **176 सेमी** ।

(vi) बड़ा अर्धवृत्त $d = 28$: $14\pi = 44$। चार छोटे अर्धवृत्त $d = 7$: $4 \times 3.5\pi = 44$। कुल **88 सेमी** ।

(vii) समकोण त्रिभुज 6, 8, 10, हर भुजा पर अर्धवृत्त: $\pi(5 + 4 + 3) = 12\pi =$ **37.71 सेमी** ।

(viii) बड़ा अर्धवृत्त $d = 12$: 6π, और तीन छोटे $d = 4$: $3 \times 2\pi = 6\pi$। कुल $12\pi =$ **37.71 सेमी** ।

(ix) बड़ा अर्धवृत्त ($r = 10$) 10π, और दो छोटे ($r = 5$) $5\pi + 5\pi$। कुल $20\pi =$ **62.86 सेमी** ।

प्र.6 टायर का व्यास 56 सेमी

उत्तर- (i) एक चक्कर = परिधि = 22/7 × 56 = **176 सेमी** ।

(ii) 10 किमी = 1,000,000 सेमी। चक्कर = 1,000,000 ÷ 176 ≈ **5682** ।

प्र.7 चित्र 6.15 में सब पंखुड़ियों का कुल परिमाप

उत्तर- (i) पंखुड़ियाँ त्रिज्या 7 के 4 अर्धवृत्तों से बनी हैं (वर्ग की भुजा 14), कुल = 4 × 7π = 28π = **88 सेमी** ।

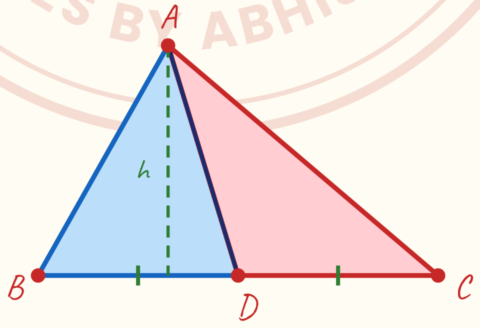
(ii) षट्भुज की भुजा 42। हर पंखुड़ी में त्रिज्या 42 के दो 60° चाप हैं, हर चाप 42π/3। 6 पंखुड़ियाँ × 2 चाप × 14π = 168π = **528 सेमी** ।

प्र.8 दो वृत्तों के परिमापों का अनुपात 5 : 4। त्रिज्याओं का अनुपात?

उत्तर- परिमाप = 2πr, यानी परिमाप r के समानुपाती है। त्रिज्याओं का अनुपात भी **5 : 4** है।

6.4 क्षेत्रफल जो आप पहले से जानते हैं

आयत: **ab** । वर्ग: **a^2** । समांतर चतुर्भुज: **आधार × ऊँचाई = bh** (एक तरफ से त्रिभुज काटकर दूसरी तरफ चिपकाओ तो आयत बन जाता है)। त्रिभुज: दो प्रतियाँ मिलकर समांतर चतुर्भुज बनाती हैं, इसलिए क्षेत्रफल = **½ × आधार × ऊँचाई** । समांतर चतुर्भुज की भुजाएँ वही रखकर उसे दबाया जा सकता है, इसलिए केवल भुजाओं से उसका क्षेत्रफल तय **नहीं** होता।



ध्यिका AD त्रिभुज को दो बराबर क्षेत्रफलों में बाँटत

प्रमेय: माध्यिका त्रिभुज को बराबर क्षेत्रफल वाले दो त्रिभुजों में बाँटती है।

कारण: त्रिभुज ABD और ACD के आधार बराबर हैं (BD = DC) और ऊँचाई h एक ही है, इसलिए दोनों का क्षेत्रफल ½ × (BC/2) × h। देखने में अलग हैं पर क्षेत्रफल बराबर।

सोचो! परिमाप 40 वाले आयत: **अनंत** हैं। सबसे बड़ा क्षेत्रफल **वर्ग 10 × 10 = 100** का है। **सबसे छोटा** क्षेत्रफल नहीं होता (बहुत पतले आयत का क्षेत्रफल 0 के पास चला जाता है)।

6.5 हेरन का सूत्र

भुजाएँ a, b, c हों तो **अर्ध-परिमाप** $s = (a + b + c)/2$। तब:

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

जाँच 1: समबाहु त्रिभुज, भुजा a

चरण 1: $s = 3a/2$। क्षेत्रफल = $\sqrt{(3a/2)(a/2)(a/2)(a/2)} = \sqrt{3a^4/16} = $ **$(\sqrt{3}/4)a^2$** ।
यह ½ × a × (√3/2)a के बराबर है ✓।

जाँच 2: त्रिभुज 3, 4, 5

चरण 1: $s = 6$। क्षेत्रफल = $\sqrt{6 \times 3 \times 2 \times 1} = \sqrt{36} =$ **6** । और ½ × 3 × 4 = 6 ✓।

दो और सूत्र: क्षेत्रफल = **$abc/(4R)$** (R = परित्रिज्या) और क्षेत्रफल = **$r(a + b + c)/2$** (r = अंतःत्रिज्या)।

ब्रह्मगुप्त का सूत्र चक्रीय चतुर्भुज के लिए, भुजाएँ a, b, c, d और $s = (a + b + c + d)/2$:

$$\text{क्षेत्रफल} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

शिक्षक की बात: चक्रीय क्यों? भुजा 3 वाला समचतुर्भुज कोण के अनुसार 9, 8.01 या 5.41 क्षेत्रफल का हो सकता है। यानी केवल चार भुजाओं से क्षेत्रफल तय नहीं होता। $d = 0$ रखने पर ब्रह्मगुप्त का सूत्र हेरन का सूत्र बन जाता है। इसे **सामान्यीकरण** कहते हैं; हेरन का सूत्र **विशेष रूप** है।

आयत का वर्गीकरण (बौधायन): क्षेत्रफल ab का वर्ग बनाने के लिए $((a+b)/2)^2 - ((a-b)/2)^2 = ab$ का प्रयोग करो। वर्ग की भुजा उस समकोण त्रिभुज की एक भुजा है जिसका कर्ण $(a+b)/2$ और दूसरी भुजा $(a-b)/2$ है।

प्रश्नावली 6.2 (हल सहित)

प्र.1 त्रिभुज ADE का क्षेत्रफल (आयत ABCD, AD = 8, DC = 10, E, BC पर)

उत्तर- आधार AD = 8 सेमी और E, AD से 10 सेमी दूर है, इसलिए क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 8 \times 10$ = **40 सेमी²** ।

प्र.2 समलंब चतुर्भुज, समांतर भुजाएँ 40, 20 और बराबर भुजाएँ 26

उत्तर- समांतर भुजाओं के अंतर का आधा = $(40 - 20)/2 = 10$। ऊँचाई = $\sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{576} = 24$।

क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times (40 + 20) \times 24$ = **720 सेमी²** ।

प्र.3 भुजाएँ 8 और 11, परिमाप 32

उत्तर- तीसरी भुजा = $32 - 19 = 13$। $s = 16$। क्षेत्रफल = $\sqrt{16 \times 8 \times 5 \times 3} = \sqrt{1920} = 8\sqrt{30} \approx$ **43.8 सेमी²** ।

प्र.4 भुजाओं का अनुपात 3 : 5 : 7, परिमाप 300 मी

उत्तर- भुजाएँ = 60, 100, 140 मी। $s = 150$। क्षेत्रफल = $\sqrt{150 \times 90 \times 50 \times 10} = \sqrt{6,750,000} = 1500\sqrt{3} \approx$ **2598 मी²** ।

प्र.5 समचतुर्भुज के विकर्ण d और 2d, क्षेत्रफल 128

उत्तर- क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d \times 2d = d^2 = 128$, इसलिए $d = \sqrt{128} = 8\sqrt{2} \approx$ **11.3 सेमी** (छोटा विकर्ण)।

प्र.6 समांतर चतुर्भुज ABCD की भुजा AB पर P, Q। क्षेत्रफल(PCD) : क्षेत्रफल(QCD)?

उत्तर- दोनों त्रिभुजों का आधार CD एक ही है और ऊँचाई भी एक (समांतर रेखाओं AB और CD के बीच की दूरी)। अनुपात = **1 : 1** ।

प्र.7 समांतर चतुर्भुज PQRS के विकर्ण PR पर O। क्षेत्रफल(PSO) = क्षेत्रफल(PQO)

उत्तर- विकर्ण PR, QS के मध्य बिंदु से जाता है, इसलिए Q और S रेखा PR से **बराबर दूरी** पर हैं। त्रिभुज PSO और PQO का आधार PO उभयनिष्ठ है और ऊँचाइयाँ बराबर, इसलिए **क्षेत्रफल बराबर** ।

प्र.8 चतुर्भुज के मध्य बिंदु जोड़ने पर बना समांतर चतुर्भुज = चतुर्भुज का आधा

उत्तर- चतुर्भुज ABCD में AB, BC, CD, DA के मध्य बिंदु P, Q, R, S लो। PQ, AC के समांतर और उसका आधा है, इसलिए त्रिभुज BPQ की भुजाएँ त्रिभुज BAC की आधी हैं, यानी क्षेत्रफल ¼ । इसी तरह DRS और ADC। दोनों मिलकर पूरे का ¼।

त्रिभुज APS और CQR भी मिलकर ¼। चारों कोने के त्रिभुज = पूरे का ½। इसलिए बीच का समांतर चतुर्भुज = **½** ।

प्र.9 माध्यिका AD, AD पर P। क्षेत्रफल(ABP) = क्षेत्रफल(ACP)

उत्तर- माध्यिका से क्षेत्रफल(ABD) = क्षेत्रफल(ACD)। त्रिभुज PBC में PD माध्यिका है, इसलिए क्षेत्रफल(PBD) = क्षेत्रफल(PCD)। घटाओ: **क्षेत्रफल(ABP) = क्षेत्रफल(ACP)** ।

प्र.10 वर्ग ABCD के अंदर P। लाल (PAB + PCD) और हरे (PBC + PDA) का अनुपात

उत्तर- P से AB और CD तक की ऊँचाइयों का योग भुजा s है, इसलिए लाल = ½ × s × s = $s^2/2$। हरा भी यही। अनुपात = **1 : 1** ।

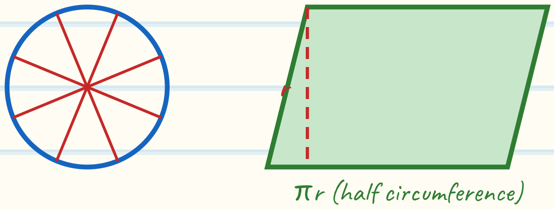
प्र.11 D, AB का मध्य बिंदु, CQ ∥ PD। क्षेत्रफल(BPQ) = ½ क्षेत्रफल(ABC)

उत्तर- त्रिभुज DPQ और DPC का आधार DP एक है और ये समांतर रेखाओं PD और CQ के बीच हैं, इसलिए क्षेत्रफल(DPQ) = क्षेत्रफल(DPC)।

क्षेत्रफल(BPQ) = क्षेत्रफल(BPD) + क्षेत्रफल(DPQ) = क्षेत्रफल(BPD) + क्षेत्रफल(DPC) = क्षेत्रफल(BDC) = **½ क्षेत्रफल(ABC)** (CD माध्यिका है)।

6.6 वृत्त का क्षेत्रफल

वृत्त को बहुत पतली कतरनों में काटो और बारी-बारी से रखो। लगभग **समांतर चतुर्भुज** बनता है जिसका आधार = आधी परिधि = **πr** और ऊँचाई = **r** ।



वृत्त की कतरनों से समांतर चतुर्भुज

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi r \times r = \pi r^2$

आर्किमिडीज़ ने कहा: क्षेत्रफल = ½ × परिधि × त्रिज्या = ½ × $2\pi r \times r = \pi r^2$। पुराने मान: बेबीलोन $A \approx C^2/12$; मिस्र $A \approx (8d/9)^2$।

त्रिज्यखंड (पिज़्ज़ा के टुकड़े जैसा, कोण θ°): क्षेत्रफल = $\pi r^2 \times \theta/360$। अर्धवृत्त = $\pi r^2/2$, चतुर्थांश = $\pi r^2/4$। **वृत्तखंड** चाप और उसकी जीवा के बीच का भाग है।

त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल = $\pi r^2 \times \theta/360$

प्रश्नावली 6.3 (हल सहित)

प्र.1 त्रिज्यखंड, $r = 7$, कोण 60°

उत्तर- 22/7 × 49 × 60/360 = 154/6 = **25.67 सेमी²** ।

प्र.2 परिधि 44 सेमी वाले वृत्त का चतुर्थांश

उत्तर- 2 × 22/7 × r = 44, इसलिए r = 7। चतुर्थांश = ¼ × 22/7 × 49 = **38.5 सेमी²** ।

प्र.3 मिनट की सुई 7 सेमी, 10 मिनट में घेरा क्षेत्रफल

उत्तर- 10 मिनट = 60° (क्योंकि 60 मिनट = 360°)। क्षेत्रफल = 22/7 × 49 × 60/360 = **25.67 सेमी²** ।

प्र.4 $r = 10$, जीवा 90° अंतरित करती है ($\pi = 3.14$)

उत्तर- (i) लघु त्रिज्यखंड = 3.14 × 100 × 90/360 = **78.5 सेमी²** ।

(ii) दीर्घ त्रिज्यखंड = 3.14 × 100 × 270/360 = **235.5 सेमी²** ।

प्र.5 $r = 15$, जीवा 60° अंतरित करती है ($\pi = 3.14$, $\sqrt{3} = 1.73$)

उत्तर- त्रिज्यखंड = 3.14 × 225 × 60/360 = 117.75। त्रिभुज OAB समबाहु है, भुजा 15: क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4) \times 225 = 97.31$।

लघु वृत्तखंड = 117.75 − 97.31 = **20.44 सेमी²** ।

वृत्त = 3.14 × 225 = 706.5। **दीर्घ वृत्तखंड** = 706.5 − 20.44 = **686.06 सेमी²** ।

प्र.6 दो वाइपर, फल 28 सेमी, हर एक 120° घूमता है

उत्तर- एक वाइपर: 22/7 × 784 × 120/360 = 821.33। दो वाइपर: **1642.67 सेमी²** ।

प्र.7 60° की जीवा का लघु वृत्तखंड = $r^2(\pi/6 - \sqrt{3}/4)$

उत्तर- त्रिज्यखंड = $\pi r^2/6$। त्रिभुज OAB समबाहु: $(\sqrt{3}/4)r^2$। अंतर = $\mathbf{\pi r^2(1/6 - \sqrt{3}/(4\pi))}$ = $r^2(\pi/6 - \sqrt{3}/4)$।

प्र.8 त्रिज्या r के वृत्त में समबाहु त्रिभुज। क्षेत्रफलों का अनुपात?

उत्तर- भुजा = $r\sqrt{3}$, इसलिए क्षेत्रफल = $(\sqrt{3}/4) \times 3r^2 = 3\sqrt{3}r^2/4$। अनुपात = $3\sqrt{3}r^2/4 \div \pi r^2$ = $\mathbf{3\sqrt{3}/(4\pi) \approx 0.413}$ ।

प्र.9 वृत्त में वर्ग

उत्तर- विकर्ण = $2r$, इसलिए भुजा² = $2r^2$ = क्षेत्रफल। अनुपात = $2r^2/\pi r^2$ = $\mathbf{2/\pi \approx 0.637}$ ।

प्र.10 वृत्त में षट्भुज

उत्तर- भुजा r के छह समबाहु त्रिभुज: $6 \times (\sqrt{3}/4)r^2 = 3\sqrt{3}r^2/2$। अनुपात = $\mathbf{3\sqrt{3}/(2\pi) \approx 0.827}$ । यह प्रश्न 8 के उत्तर का ठीक दुगुना है, क्योंकि षट्भुज का क्षेत्रफल अंतःस्थ समबाहु त्रिभुज का दुगुना होता है।

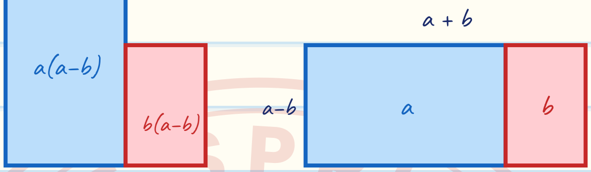
अध्याय के अंत की प्रश्नावली (हल सहित)

प्र.1 सर्वसमिकाओं के क्षेत्रफल मॉडल

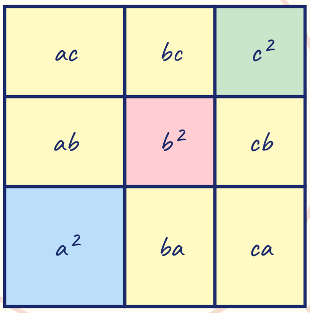
उत्तर- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ भुजा $a + b$ का बड़ा वर्ग है जो 4 टुकड़ों में कटा है।

$(a + b)(a - b)$ के लिए: $a \times a$ का वर्ग लो और कोने से $b \times b$ हटा दो। L-आकार को दो आयतों में काटकर अगल-बगल रखो, तो $(a + b) \times (a - b)$ का आयत बनता है।

$(a + b + c)^2$ के लिए: भुजा $a + b + c$ का वर्ग 3×3 जाल में कटा है। टुकड़े a^2, b^2, c^2 और ab, bc, ca दो-दो।



$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$



$(a+b+c)^2$ के 9 टुकड़े

MERIT SPRING NOTES BY ABHISHEK SIR

प्र.2 समद्विबाहु, परिमाप 40, बराबर भुजाएँ 15

उत्तर- आधार = $40 - 30 = 10$। ऊँचाई = $\sqrt{(225 - 25)} = 10\sqrt{2}$। क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times 10 \times 10\sqrt{2} = 50\sqrt{2} \approx$ **70.7 सेमी²** (हेरन: $s = 20$, $\sqrt{(20 \times 5 \times 5 \times 10)} = \sqrt{5000}$ ✓)।

प्र.3 समद्विबाहु, आधार 10, क्षेत्रफल 60

उत्तर- $\frac{1}{2} \times 10 \times h = 60$, इसलिए $h = 12$। बराबर भुजा = $\sqrt{(5^2 + 12^2)}$ = **13 सेमी** ।

प्र.4 समकोण त्रिभुज, क्षेत्रफल 54, एक भुजा 12

उत्तर- दूसरी भुजा = $2 \times 54 \div 12 = 9$। कर्ण = $\sqrt{(144 + 81)} = 15$। परिमाप = $12 + 9 + 15$ = **36 सेमी** ।

प्र.5 भुजाएँ 2 : 3 : 4, परिमाप 45

उत्तर- भुजाएँ 10, 15, 20। s = 22.5। क्षेत्रफल = √(22.5 × 12.5 × 7.5 × 2.5) = 75√15/4 ≈ **72.6 सेमी²** ।

प्र.6 त्रिभुज 7, 24, 25: दो तरीकों से

उत्तर- समकोण त्रिभुज (49 + 576 = 625): ½ × 7 × 24 = **84 सेमी²** ।
हेरन: s = 28, √(28 × 21 × 4 × 3) = √7056 = **84 सेमी²** ✓।

प्र.7 साइकिल के पहिये का व्यास 60 सेमी, 100 चक्कर

उत्तर- परिधि = 22/7 × 60 = 188.57 सेमी। दूरी = 100 × 188.57 = 18857 सेमी ≈ **188.6 मी** ।

प्र.8 परिधि 66 सेमी वाले वृत्त का चतुर्थांश

उत्तर- r = 66 × 7/44 = 10.5। क्षेत्रफल = ¼ × 22/7 × 10.5² = **86.625 सेमी²** ।

प्र.9 कार के पहिये की त्रिज्या 28 सेमी

उत्तर- एक चक्कर = 2 × 22/7 × 28 = **176 सेमी** । । किमी = 100,000 सेमी, इसलिए चक्कर = 100,000 ÷ 176 ≈ **568** ।

प्र.10 क्षेत्रफल और परिमाप दोनों बराबर: क्या आयत सर्वांगसम हैं?

उत्तर- भुजाएँ a, b जहाँ a + b = p और ab = A। a और b समीकरण $x^2 - px + A = 0$ के मूल हैं, इसलिए जोड़ी {a, b} तय है। **हाँ** , आयत सर्वांगसम हैं।

प्र.11 समांतर चतुर्भुज से समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल

उत्तर- समलंब की दूसरी प्रति उलटकर जोड़ दो। आधार (a + b) और ऊँचाई h का समांतर चतुर्भुज बनता है। समलंब उसका आधा है: **½(a + b)h** ।

प्र.12 समलंब को दो त्रिभुजों में बाँटकर

उत्तर- विकर्ण से दो त्रिभुज बनते हैं, आधार a और b, ऊँचाई h वही। क्षेत्रफल = ½ah + ½bh = **½(a + b)h** ।

प्र.13 दो समान समलंब से समांतर चतुर्भुज

उत्तर- दूसरे समलंब को 180° घुमाकर एक भुजा से जोड़ दो। समांतर चतुर्भुज का आधार = $a + b$, ऊँचाई = h, क्षेत्रफल = $(a + b)h$। एक समलंब = **$\frac{1}{2}(a + b)h$** ।

प्र.14 पतंग का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

उत्तर- (i) बीजगणित: विकर्ण समकोण पर कटते हैं; लंबा विकर्ण d_1 भागों x और y में कटता है, $x + y = d_1$। दो त्रिभुज: $\frac{1}{2} \times d_2 \times x + \frac{1}{2} \times d_2 \times y$ = **$\frac{1}{2} d_1 d_2$** ।

(ii) ज्यामिति: पतंग के चारों ओर $d_1 \times d_2$ का आयत बनाओ। पतंग ठीक उस आयत की आधी है।

प्र.15 पैमाना बदलना

उत्तर- (i) भुजाएँ $2a$, $2b$: क्षेत्रफल $4ab$, चार गुना। ABCD की 4 प्रतियाँ आ जाती हैं (2×2) ✓।

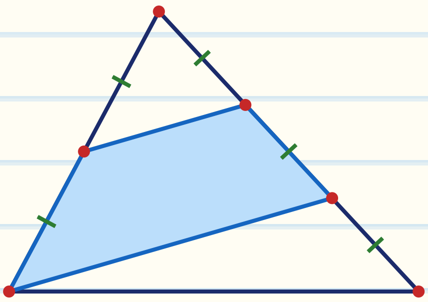
(ii) त्रिभुज की भुजाएँ दुगुनी: क्षेत्रफल × 4। मध्य बिंदु जोड़ने पर 4 सर्वांगसम छोटे त्रिभुज बनते हैं, इसलिए 4 प्रतियाँ आ जाती हैं ✓।

(iii) भुजाएँ तिगुनी: क्षेत्रफल × 9। भुजाओं को तीन बराबर भागों में बाँटकर 9 सर्वांगसम त्रिभुज बनते हैं, इसलिए 9 प्रतियाँ आ जाती हैं ✓।

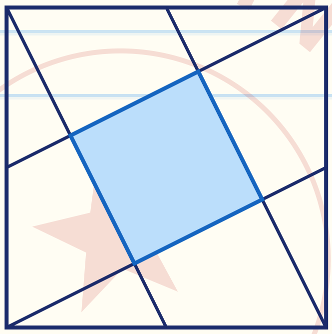
प्र.16 रंगा हुआ भाग कितना?

उत्तर- **चित्र 6.43:** P एक भुजा का मध्य बिंदु है, Q और S दूसरी भुजा के त्रिभाजन बिंदु। रंगा चतुर्भुज त्रिभुज का **1/2** है।

चित्र 6.44: भुजा 2, रेखाएँ $2x + y = 2$ और $2x + y = 4$ आदि। भीतरी वर्ग के शीर्ष (0.4, 1.2), (1.2, 1.6), … हैं, इसलिए भुजा² = 0.8। 4 में से 0.8 = **1/5** ।



चित्र 6.43: रंगा भाग = 1/2



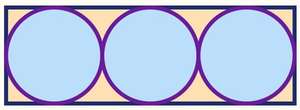
चित्र 6.44: रंगा भाग = 1/5

MERIT SPRING CLASS 9 NOTES BY ABHISHEK SIR

प्र.17 आयत में वृत्त

उत्तर- चित्र 6.45: $6r \times 2r$ के आयत में त्रिज्या r के 3 वृत्त: $3\pi r^2 \div 12r^2 =$ **$\pi/4$** ।

चित्र 6.46: $8r \times 2r$ में 4 वृत्त: $4\pi r^2 \div 16r^2 =$ **$\pi/4$** ।



चित्र 6.45: 3 वृत्त

प्र.18 पंक्ति में n वृत्त

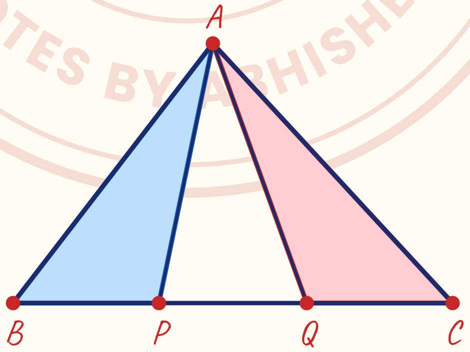
उत्तर- आयत = $2nr \times 2r = 4nr^2$। वृत्त = $n\pi r^2$। भिन्न = **$\pi/4 \approx 78.5\%$** चाहे 10, 20, 50 या कोई भी n हो। n कट जाता है, इसलिए हर n के लिए सिद्ध हो गया।

प्र.19 नौ आयत, बड़े आयत का क्षेत्रफल 72

उत्तर- हर छोटे आयत की भुजाएँ l और w मानो। ऊपर की पंक्ति में 4 लेटे हुए l, नीचे 5 खड़े w।
लंबाई बराबर: $4l = 5w$। क्षेत्रफल: $9lw = 72$, $lw = 8$।
$l = 5w/4$, तो $5w^2/4 = 8$, $w^2 = 32/5$, $w = 4\sqrt{10}/5$, $l = \sqrt{10}$।
परिमाप = $2(l + w) = 2 \times 1.8\sqrt{10} = 18\sqrt{10}/5 \approx$ **11.38 सेमी** ।

प्र.20 त्रिभाजन वाले त्रिभुज बराबर हैं

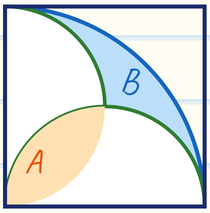
उत्तर- नीले और लाल त्रिभुज का शीर्ष A एक है, आधार BP = QC (आधार के तीन बराबर भाग) और ऊँचाई एक। इसलिए क्षेत्रफल **बराबर** हैं।
दोबारा जोड़ने के लिए: नीले त्रिभुज को उसकी दो तिरछी भुजाओं के मध्य बिंदु जोड़ने वाली रेखा से काटो। ऊपर का छोटा त्रिभुज 180° घुमाकर समलंब से जोड़ो, समांतर चतुर्भुज बनेगा। उसमें से एक समकोण त्रिभुज काटकर खिसकाओ तो आधार BP और ऊँचाई $h/2$ का आयत बनता है। यही कदम उलटे करके लाल त्रिभुज बन जाएगा।



प्र20: आधार BP = QC, ऊँचाई समान

प्र.21 चौथाई वृत्त और दो अर्धवृत्त: A = B

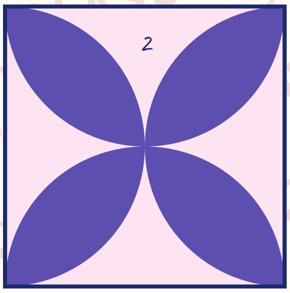
उत्तर- वर्ग की भुजा a। चौथाई वृत्त (केंद्र शीर्ष पर) = $\pi a^2/4$। भुजाओं पर दो अर्धवृत्त: $2 \times \pi a^2/8 = \pi a^2/4$। दोनों बराबर हैं।
चौथाई वृत्त = (दोनों अर्धवृत्त) − A + B। कुल बराबर हैं, इसलिए **A = B** ।



प्र21: क्षेत्रफल A = क्षेत्रफल B

प्र.22 चार पंखुड़ी का फूल, वर्ग की भुजा 2

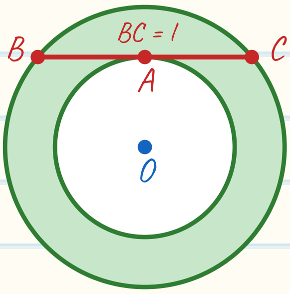
उत्तर- हर पंखुड़ी त्रिज्या 1 के दो चौथाई वृत्तों से बनी है: परिमाप π। **परिमाप = $4\pi \approx 12.57$।**
चार अर्धवृत्तों का कुल क्षेत्रफल 2π वर्ग (क्षेत्रफल 4) को एक बार और पंखुड़ियों को दो बार ढकता है। पंखुड़ी क्षेत्रफल = $2\pi - 4$। **क्षेत्रफल = $2\pi - 4 \approx 2.28$ वर्ग इकाई।**



प्र22: चार पंखुड़ियों वाला फूल

प्र.23 दो संकेंद्रिक वृत्त, BC = l छोटे वृत्त को छूती है

उत्तर- A, BC का मध्य बिंदु है, इसलिए AB = l/2। समकोण त्रिभुज OAB: $R^2 = r^2 + (l/2)^2$।
छल्ले का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2) = \pi \times l^2/4$ = **¼ πl^2** ।



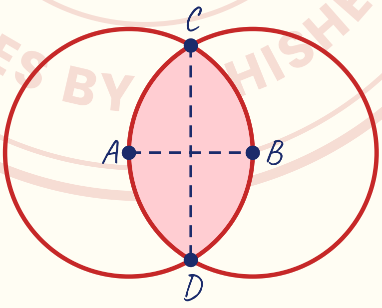
प्र23: दो वृत्तों के बीच का छल्ला

प्र.24 समकोण त्रिभुज की भुजाओं पर अर्धवृत्त

उत्तर- अर्धवृत्तों के क्षेत्रफल: $\pi a^2/8$, $\pi b^2/8$, $\pi c^2/8$। $a^2 + b^2 = c^2$ है, इसलिए दोनों भुजाओं वाले अर्धवृत्त मिलकर कर्ण वाले अर्धवृत्त के बराबर हैं: **$A + B = C$** ।

प्र.25 दो वृत्तों के लेंस का क्षेत्रफल

उत्तर- त्रिभुज ABC समबाहु है, इसलिए हर चाप 120° का है। लेंस = 2 × (120° का त्रिज्यखंड − त्रिभुज) = $2(\pi r^2/3 - \sqrt{3}r^2/4)$ = **$r^2(2\pi/3 - \sqrt{3}/2) \approx 1.23r^2$** ।



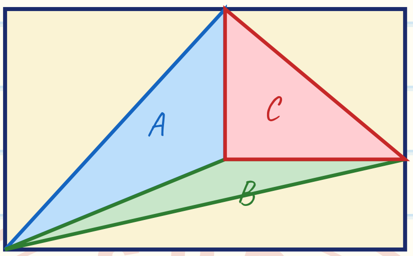
प्र25: रंगा हुआ लेंस

प्र.26 आयत = $2(A + C)(B + C)/C$

उत्तर- आयत $W \times H$ मानो। बिंदु P बाएँ से x और नीचे से y दूरी पर है। $A = ½x(H - y)$, $B = ½(W - x)y$, $C = ½(W - x)(H - y)$।

$(A + C) = ½(H - y)W$ और $(B + C) = ½(W - x)H$। गुणनफल $= ¼WH(W - x)(H - y) = ¼WH \times 2C = WHC/2$।

इसलिए $WH =$ **$2(A + C)(B + C)/C$** ।

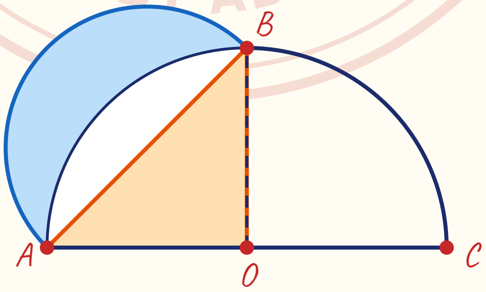


प्र26: आयत में त्रिभुज A, B, C

प्र.27 दोनों रंगे क्षेत्र बराबर हैं

उत्तर- त्रिज्या r, $AB = r\sqrt{2}$। AB पर अर्धवृत्त की त्रिज्या $r\sqrt{2}/2$, क्षेत्रफल $= ½ \times \pi \times r^2/2 = \pi r^2/4$। चौथाई वृत्त OAB का क्षेत्रफल $\pi r^2/4$। दोनों बराबर।

चंद्रक = अर्धवृत्त − वृत्तखंड; त्रिभुज OAB = चौथाई वृत्त − वही वृत्तखंड। इसलिए **चंद्रक = त्रिभुज** (हिप्पोक्रेटीज़ का चंद्रक)।



प्र27: नीला चंद्रक = नारंगी त्रिभुज

शिक्षक की बात: अध्याय सार: $C = 2\pi r$। चाप $= 2\pi r \times \theta/360$। त्रिभुज $= ½bh$। हेरन: $\sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$। वृत्त $= \pi r^2$। त्रिज्यखंड $= \pi r^2 \times \theta/360$। ब्रह्मगुप्त: चक्रीय चतुर्भुज के लिए $\sqrt{[(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)]}$। π अपरिमेय है।