

ENGLISH SECTION (Hindi terms in brackets)

A Square and a Cube

Class 8 Maths (Ganita Prakash Part 1) • Chapter 1 • Detailed Notes + All Textbook Solutions +

Board Questions (2026-27)

Chapter Review in Easy Language

1. The locker puzzle (लॉकर पहेली)

Queen Ratnamanjuri's will has 100 lockers and 100 people. Person k toggles every k th locker (opens if closed, closes if open). A locker ends open only if it is toggled an odd number of times. The number of toggles of locker N = the number of factors of N (locker 6: factors 1, 2, 3, 6 $\rightarrow$ 4 toggles $\rightarrow$ closed). Factors come in partner pairs (1×6 , 2×3), so the count is even, except when a pair is the same number (6×6 for 36). So only squares have an odd number of factors, and the open lockers are 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100. Lockers toggled exactly twice are the primes (factors 1 and itself): 2, 3, 5, 7, 11 $\rightarrow$ code 2-3-5-7-11.

2. Square numbers (वर्ग संख्याएँ)

A square number is a number multiplied by itself: $n \times n = n^2$ (read 'n squared'). It is the area of a square of side n . Squares of natural numbers are perfect squares: 1, 4, 9, 16, 25, ... Squares of fractions and decimals also exist: $(3/5)^2 = 9/25$, $(2.5)^2 = 6.25$.

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	7	49	13	169	19	361	25	625
2	4	8	64	14	196	20	400	26	676
3	9	9	81	15	225	21	441	27	729
4	16	10	100	16	256	22	484	28	784
5	25	11	121	17	289	23	529	29	841
6	36	12	144	18	324	24	576	30	900

3. Patterns in perfect squares (पूर्ण वर्गों के पैटर्न)

- **Units digit:** a square ends in 0, 1, 4, 5, 6 or 9 – never in 2, 3, 7, 8. So a number ending in 2, 3, 7, 8 is **definitely not** a square. But ending in 0, 1, 4, 5, 6, 9 does **not** guarantee a square (26 ends in 6, not a square).
- Number ends in 1 or 9 $\rightarrow$ square ends in 1. Ends in 4 or 6 $\rightarrow$ square ends in 6. Ends in 2 or 8 $\rightarrow$ square ends in 4. Ends in 3 or 7 $\rightarrow$ square ends in 9.

► **Zeros:** a number with k zeros at the end has a square with **$2k$ zeros** ($10^2 = 100$, $200^2 = 40000$, $1000^2 = 1000000$). So a square has an **even number of zeros** at the end.

► **Parity:** square of an **even** number is even; square of an **odd** number is odd.

4. Squares, odd numbers and triangular numbers

► **Sum of first n odd numbers = n^2 :** $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ (inverted L-shapes add the next odd number). Hence $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$, the **n th odd number is $2n - 1$** .

► **Test for a square:** subtract 1, 3, 5, 7, ... in turn. If you reach **exactly 0**, it is a perfect square and the **number of steps = its root** ($25 \rightarrow 5$ steps $\rightarrow 5^2$). If you cross 0 ($38 \rightarrow -11$), it is not a square.

► **Next square from the previous:** $36^2 = 35^2 + 71 = 1225 + 71 = 1296$ (36th odd number = $2 \times 36 - 1 = 71$).

► **Numbers between consecutive squares:** between n^2 and $(n + 1)^2$ there are **$2n$ numbers**. (Between 1^2 and 2^2 : 2; 2^2 and 3^2 : 4.)

► **Triangular numbers** 1, 3, 6, 10, 15, ... : sum of two **consecutive** triangular numbers is a square: $1 + 3 = 2^2$, $3 + 6 = 3^2$, $6 + 10 = 4^2$, $10 + 15 = 5^2$.

5. Square roots (वर्गमूल)

If $y = x^2$ then x is a **square root** of y , written $\sqrt{y}$. Every perfect square has **two integer roots**, one positive and one negative: $\sqrt{64} = \pm 8$ ($8^2 = 64$ and $(-8)^2 = 64$). In this chapter $\sqrt{\quad}$ means the **positive root**. Area of square 49 sq cm $\rightarrow$ side = $\sqrt{49} = 7$ cm.

Four ways to find a square root

(1) **Listing:** $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, ... $24^2 = 576 \rightarrow \sqrt{576} = 24$. (2) **Repeated subtraction of odd numbers:** $81 - 1 - 3 - \dots$ reaches 0 at the 9th step $\rightarrow \sqrt{81} = 9$ (slow for big numbers). (3)

Prime factorisation: pair up equal primes; one prime from each pair gives the root. $324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3^2)^2 \rightarrow \sqrt{324} = 18$. $156 = 2^2 \times 3 \times 13$ - cannot be paired $\rightarrow$ **not** a square. (4)

Estimation: $\sqrt{1936}$: between $40^2 = 1600$ and $50^2 = 2500$; last digit 6 $\rightarrow$ root ends in 4 or 6; $45^2 = 2025 > 1936$ so root is below 45 $\rightarrow$ **44**.

Estimating $\sqrt{250}$: $15^2 = 225$ and $16^2 = 256$, so **$15 < \sqrt{250} < 16$** ; 256 is much closer, so $\sqrt{250} \approx 15.8$ (just below 16). **Akhil's cloth:** area 125 cm^2 ; $11^2 = 121$ and $12^2 = 144$, so the biggest whole-number square handkerchief has **side 11 cm** (a 15 cm one is impossible).

6. Cube numbers (घन संख्याएँ)

A **cube number** is a number multiplied by itself **three times**: $n \times n \times n = n^3$. It is the **volume of a cube of side n** (4×4 layer of 16, four layers = 64 unit cubes). Perfect cubes: 1, 8, 27, 64, 125,

216, ... 9 is **not** a cube, nor is any number from 10 to 26. Cubes of fractions, decimals and negatives also exist: $(4/6)^3 = 64/216$, $(-6)^3 = -216$.

n	n ³	n	n ³	n	n ³	n	n ³	n	n ³
1	1	6	216	11	1331	16	4096		
2	8	7	343	12	1728	17	4913		
3	27	8	512	13	2197	18	5832		
4	64	9	729	14	2744	19	6859		
5	125	10	1000	15	3375	20	8000		

- ▶ **Last digits of cubes** can be any of 0–9: 1→1, 2→8, 3→7, 4→4, 5→5, 6→6, 7→3, 8→2, 9→9, 0→0. Cube of an odd number is odd, of an even number is even.
- ▶ **Count by digits:** 1-digit cubes: 1, 8 (2); 2-digit: 27, 64 (2); 3-digit: 125, 216, 343, 512, 729 (5).
- ▶ **Zeros:** a number with k end zeros has a cube with **3k zeros**, so a cube **cannot end in exactly two zeros** (00).
- ▶ **Taxicab numbers:** smallest sum of two cubes in two ways is $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (Hardy–Ramanujan number). Next: $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$; $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$.
- ▶ **Cubes and odd numbers:** $1 = 1^3$; $3 + 5 = 2^3$; $7 + 9 + 11 = 3^3$; $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$... so $91 + 93 + \dots + 109$ (10 terms) = $10^3 = 1000$.

7. Cube roots (घनमूल)

If $y = x^3$ then x is the **cube root**, written $\sqrt[3]{y}$. $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{1000} = 10$, in general $\sqrt[3]{n^3} = n$. By **prime factorisation:** group the primes in **triplets**; one prime from each triplet gives the root. $3375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3 \rightarrow \sqrt[3]{3375} = 15$. $500 = 2^2 \times 5^3$ – the 2s cannot form a triplet → **not** a cube. In the prime factorisation of a cube, **each prime appears a multiple of 3 times** ($12^3 = 2^6 \times 3^3$). $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{512} = 8$, $\sqrt[3]{729} = 9$. **Successive differences:** squares reach a constant after 2 levels (2, 2, 2); cubes after 3 levels (1, 8, 27, 64, 125, 216 → 7, 19, 37, 61, 91 → 12, 18, 24, 30 → 6, 6, 6).

8. A pinch of history (थोड़ा इतिहास)

The **Babylonians (about 1700 BCE)** made clay-tablet lists of squares and cubes for land measurement and building. In Sanskrit, **varga** = square (figure, area and power), **ghana** = cube, **varga-varga** = 4th power (used from the 3rd century BCE). **Aryabhata (499 CE)** defined varga as a square figure of four equal sides and its area. The root of a plant is **mula**: **varga-mula** = square root, **ghana-mula** = cube root (used from the 1st century BCE; later Arabic jidhr

and Latin radix). **Pada** was another word for root; **Brahmagupta (628 CE)** said the pada of a krti (square) is that of which it is a square.

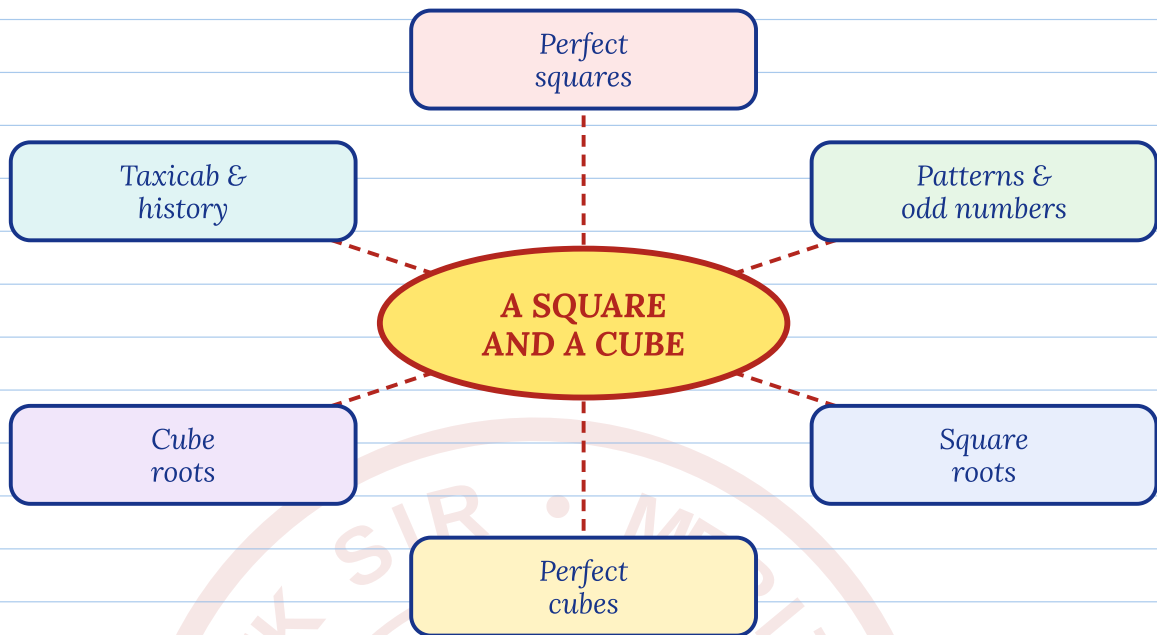
Important Terms (Glossary)

Term	Meaning
Perfect square	Square of a natural number (1, 4, 9, 16, ...).
Perfect cube	Cube of a natural number (1, 8, 27, 64, ...).
Square root ($\sqrt{}$)	x such that $x^2 = y$; positive root is $\sqrt{y}$.
Cube root ($\sqrt[3]{}$)	x such that $x^3 = y$.
Partner factors	Pair of factors whose product is the number.
Prime factorisation	Writing a number as a product of primes.
Toggle	Open if closed, close if open.
Triangular number	1, 3, 6, 10, 15, ... (dots in a triangle).
Taxicab number	Sum of two cubes in two different ways.
Varga / Ghana / Mula	Sanskrit for square / cube / root.

Quick Revision & Formulas

- ▶ $n^2 = n \times n$; $n^3 = n \times n \times n$; only squares have an odd number of factors.
- ▶ Squares end in 0, 1, 4, 5, 6, 9 (never 2, 3, 7, 8); zeros at the end are even in number.
- ▶ $1 + 3 + 5 + \dots$ (n terms) $= n^2$; n th odd number $= 2n - 1$; $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$.
- ▶ Numbers between n^2 and $(n + 1)^2 = 2n$.
- ▶ Consecutive triangular numbers add to a square.
- ▶ Square root by prime factors: pair up (2 equal); cube root: triplets (3 equal).
- ▶ Cube of odd is odd, of even is even; k end zeros $\rightarrow 3k$ zeros in cube (never exactly 00).
- ▶ $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$; $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$; $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$.

Diagrams, Tables & Flowcharts



Concept map of Chapter 1

Odd numbers build squares

Sum of first n odd numbers = n^2

1 $1 = 1^2$	1 + 3 $4 = 2^2$	1 + 3 + 5 $9 = 3^2$	1 + 3 + 5 + 7 $16 = 4^2$	1 + 3 + 5 + 7 + 9 $25 = 5^2$
----------------	--------------------	------------------------	-----------------------------	---------------------------------

Test: $25 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 = 0$ after 5 steps, so $\sqrt{25} = 5$

Visual: each new odd number gives the next square

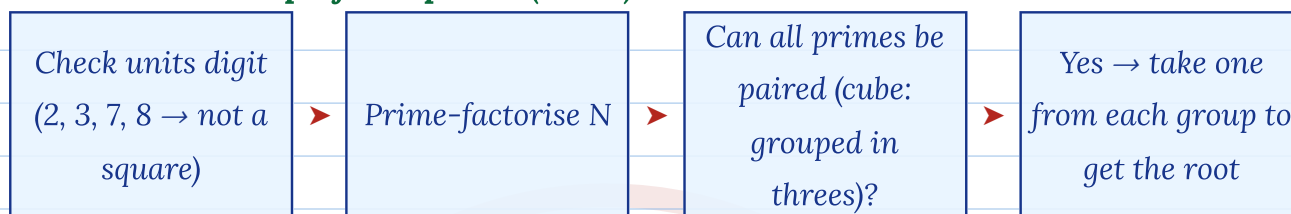
Table 1: Last digit of n and of n^2 and n^3

Last digit of n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Last digit of n^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
Last digit of n^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Table 2: Squares vs cubes

Point	Squares	Cubes
Formula	$n \times n = n^2$	$n \times n \times n = n^3$
Geometric meaning	area of square	volume of cube
Last digits	0, 1, 4, 5, 6, 9	any of 0–9

End zeros	2k (even)	3k
Prime factors	pairs	triplets
Differences become constant	after 2 levels (2)	after 3 levels (6)

Flowchart: Is N a perfect square? (cube?)**Textbook Solutions (All Questions)**

Page 2 – Does every number have an even number of factors? Can you find more numbers with an odd number of factors? Page 3 – Which lockers remain open? Which five lockers are touched exactly twice?

Ans. No – a pair like 2×2 or 6×6 has the same number twice, so squares have an odd number of factors (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 → open lockers). Touched exactly twice = primes: 2, 3, 5, 7, 11 (code 2-3-5-7-11).

Pages 4–5 (Math Talk) – Write 5 numbers that are surely not squares by looking at the units digit. Next two squares ending in 1 after 1^2 , 9^2 , 11^2 , 19^2 , 21^2 , 29^2 . Which of 38^2 , 34^2 , 46^2 , 56^2 , 74^2 , 82^2 end in 6?

Ans. Numbers ending in 2, 3, 7 or 8, e.g. 22, 33, 47, 58, 1003 – none is a square. Squares ending in 1 come from numbers ending in 1 or 9: next are $31^2 = 961$ and $39^2 = 1521$. Ending in 6 needs the base to end in 4 or 6: 34^2 , 46^2 , 56^2 , 74^2 (38^2 ends in 4, 82^2 ends in 4).

Page 5 – Number ending in 3 zeros: zeros in its square? Relation between zeros of a number and its square? Can squares have only an even number of end zeros? Parity of a number and its square?

Ans. Six zeros (3×2). Zeros in the square are double the zeros in the number; yes, always, so squares have only an even number of end zeros. Square of an even number is even; square of an odd number is odd (same parity).

Pages 6–7 – Is $1225 + 71 = 36^2$? Use $35^2 = 1225$ to find 36^2 . How many numbers lie between two consecutive squares? How many squares in each block of 100 up to 1000? Largest square below 1000?

Ans. The 36th odd number is $2 \times 36 - 1 = 71$, so $36^2 = 1225 + 71 = 1296$. If p and q are consecutive squares, there are $(q - p - 1)$ numbers between them; between n^2 and $(n + 1)^2$ there are $2n$. Squares in blocks of 100: 1–100: 10; 101–200: 4; 201–300: 3; 301–400: 3; 401–500: 2; 501–600: 2; 601–700: 2; 701–800: 2; 801–900: 2; 901–1000: 1. Largest square below 1000 = $31^2 = 961$.

Page 8 – Triangular numbers 1, 3, 6, 10, 15: draw the next term and relate to squares. Find $\sqrt{81}$ using odd-number subtraction; is $\sqrt{729}$ possible this way?

Ans. Next triangular number $15 + 21 = 36$ (and $10 + 15 = 25 = 5^2$): adding two consecutive triangular numbers gives a square. $81 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17 = 0$ in 9 steps, so $\sqrt{81} = 9$. Yes, 729 works (27 steps) but is long.

Page 9 – Check whether 1156 and 2800 are perfect squares by prime factorisation. Find $\sqrt{1936}$ by estimation. Estimate $\sqrt{250}$.

Ans. $1156 = 2 \times 2 \times 17 \times 17 = (2 \times 17)^2 = 34^2$, so a perfect square ($\sqrt{1156} = 34$). $2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7$ – the single 7 has no partner, so not a square. $\sqrt{1936} = 44$ (between 40 and 45, last digit 4). $\sqrt{250}$ lies between 15 and 16, about 15.8.

Figure it Out (page 10) – Q1. Which are not perfect squares: (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089? Q2. Which of 64^2 , 108^2 , 292^2 , 36^2 ends in 4? Q3. Given $125^2 = 15625$, value of 126^2 ?

Ans. Q1: (i) ends in 2, (ii) ends in 8, (iii) ends in 7 → not squares; (iv) $1089 = 33^2$ is a square. Q2: 108^2 ($8^2 = 64$) and 292^2 ($2^2 = 4$) end in 4; 64^2 and 36^2 end in 6. Q3: $126^2 = 125^2 + 125 + 126 = 15625 + 251$, so option (iv).

Q4. Side of a square of area 441 m^2 . Q5. Smallest square number divisible by 4, 9 and 10. Q6. Smallest number to multiply 9408 so that it becomes a perfect square; find the root.

Ans. Q4: $\sqrt{441} = 21 \text{ m}$ ($441 = 3^2 \times 7^2$). Q5: $\text{LCM}(4, 9, 10) = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$; the 5 is unpaired, so multiply by 5: $180 \times 5 = 900 = 30^2$. Q6: $9408 = 2^6 \times 3 \times 7^2$; the single 3 is unpaired, so multiply by 3 → $28224 = (2^3 \times 3 \times 7)^2$, root = $8 \times 3 \times 7 = 168$.

Q7. How many numbers lie between the squares of (i) 16 and 17 (ii) 99 and 100? Q8. Fill: $4^2 + 5^2 + 20^2 = (__)^2$; $9^2 + 10^2 + (__)^2 = (__)^2$. Q9. How many tiny squares are in the picture?

Prime factorisation of the number.

Ans. Q7: between n^2 and $(n + 1)^2$ there are $2n$ numbers: (i) $2 \times 16 = 32$ (ii) $2 \times 99 = 198$. Q8: pattern $n^2 + (n + 1)^2 + (n(n + 1))^2 = (n^2 + n + 1)^2$: $16 + 25 + 400 = 441 = 21^2$; for $n = 9$: $81 + 100 +$

90^2 (8100) = $8281 = 91^2$. Answers: 21; 90 and 91. Q9 (from the picture): 9 rows $\times$ 9 columns = 81 tiles, each with $5 \times 5 = 25$ tiny squares $\rightarrow 81 \times 25 = 2025 = 3^4 \times 5^2 (= 45^2)$.

Pages 12–13 – (Math Talk) possible last digits of cubes; number of cubes with 1, 2 and 3 digits; can a cube end with exactly two zeroes? Find the two ways to write 4104 and 13832 as a sum of two positive cubes.

Ans. Last digits of cubes can be any digit 0–9 (1 $\rightarrow$ 1, 2 $\rightarrow$ 8, 3 $\rightarrow$ 7, 4 $\rightarrow$ 4, 5 $\rightarrow$ 5, 6 $\rightarrow$ 6, 7 $\rightarrow$ 3, 8 $\rightarrow$ 2, 9 $\rightarrow$ 9, 0 $\rightarrow$ 0). 1-digit cubes: 1, 8 (2); 2-digit: 27, 64 (2); 3-digit: 125, 216, 343, 512, 729 (5). No – k zeros at the end of a number give 3k zeros in the cube. $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ (8 + 4096; 729 + 3375). $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ (8 + 13824; 5832 + 8000).

Pages 14–15 – What is $91 + 93 + 95 + \dots + 109$ without calculating? Find $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{729}$. Compute successive differences of cubes until constant.

Ans. The series 1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; ... has n terms for n^3 , and 91 ... 109 is the 10th group (10 odd terms) $\rightarrow$ sum = $10^3 = 1000$. $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{512} = 8$, $\sqrt[3]{729} = 9$. Cubes 1, 8, 27, 64, 125, 216 $\rightarrow$ level 1: 7, 19, 37, 61, 91 $\rightarrow$ level 2: 12, 18, 24, 30 $\rightarrow$ level 3: 6, 6, 6 (constant after 3 levels; squares become constant (2) after 2 levels).

Figure it Out (page 16) – Q1. Cube roots of 27000 and 10648. Q2. Number to multiply 1323 by to make a cube. Q3. True or false with reasons: (i) cube of any odd number is even (ii) no perfect cube ends in 8 (iii) cube of a 2-digit number may be 3-digit (iv) cube of a 2-digit number may have 7 or more digits (v) cubes have an odd number of factors.

Ans. Q1: $27000 = 27 \times 1000 = 3^3 \times 10^3 \rightarrow \sqrt[3]{} = 30$. $10648 = 2^3 \times 11^3 \rightarrow \sqrt[3]{} = 22$. Q2: $1323 = 3^3 \times 7^2$; the 7s are only two, so multiply by 7: $3^3 \times 7^3 = 9261 = 21^3$. Q3: (i) False – odd $\times$ odd $\times$ odd is odd ($3^3 = 27$). (ii) False – $12^3 = 1728$ ends in 8. (iii) False – smallest 2-digit cube is $10^3 = 1000$ (4 digits). (iv) False – largest is $99^3 = 970299$ (6 digits). (v) False – $8 = 2^3$ has 4 factors (1, 2, 4, 8), even.

Q4. 1331 is a perfect cube – guess its cube root without factorising; also guess $\sqrt[3]{4913}$, $\sqrt[3]{12167}$, $\sqrt[3]{32768}$. Q5. Which is greatest: (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$?

Ans. Q4: Use the last digit and the range. 1331: ends in 1 $\rightarrow$ root ends in 1; $10^3 = 1000$ and $20^3 = 8000$, so root = 11. 4913: ends in 3 $\rightarrow$ root ends in 7; between 10^3 and 20^3 (≥ 1000) and $17^3 \rightarrow 17$. 12167: ends in 7 $\rightarrow$ root ends in 3; between $20^3 = 8000$ and $30^3 = 27000 \rightarrow 23$. 32768: ends in 8 $\rightarrow$ root ends in 2; between 30^3 and $40^3 \rightarrow 32$. Q5: $(a^3 - (a-1)^3 = 3a^2 - 3a + 1$ and $a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$): (i) $67^3 - 66^3 = 13267$; (ii) $43^3 - 42^3 = 5419$; (iii) 133; (iv) 85. Greatest = (i) $67^3 - 66^3$.

Puzzle 'Square Pairs!' – Arrange 1 to 17 in a row so every adjacent pair adds to a square. Can

it be done in more than one way? Do the same for 1 to 32 in a circle.

Ans. 1 to 17: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8, 17 (sums 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 25). Only one way (plus its reverse): 17 can only pair with 8 ($17 + 8 = 25$) and 16 only with 9 ($16 + 9 = 25$), so 16 and 17 must be the two ends, which forces the rest. 1 to 32 circle: 1, 8, 28, 21, 4, 32, 17, 19, 30, 6, 3, 13, 12, 24, 25, 11, 5, 31, 18, 7, 29, 20, 16, 9, 27, 22, 14, 2, 23, 26, 10, 15 and back to 1 ($15 + 1 = 16$). (Arrangements checked by computer.)

Board-Pattern Questions – 1 Mark

1. How many factors does a perfect square have – even or odd? (1)

Ans. Odd.

2. Write the square of 25. (1)

Ans. 625.

3. Can a square end in 7? (1)

Ans. No (squares never end in 2, 3, 7, 8).

4. Write the n th odd number. (1)

Ans. $2n - 1$.

5. How many zeros does $(500)^2$ have at the end? (1)

Ans. Four (2×2).

6. Find $\sqrt{729}$. (1)

Ans. 27.

7. Find $\sqrt[3]{1728}$. (1)

Ans. 12.

8. How many numbers lie between 9^2 and 10^2 ? (1)

Ans. $2 \times 9 = 18$.

9. Write the Hardy–Ramanujan number. (1)

Ans. 1729 ($= 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$).

10. What is $(-6)^3$? (1)

Ans. -216.

11. Which Sanskrit word means cube? (1)

Ans. Ghana.

12. Is 500 a perfect cube? (1)

Ans. No ($500 = 2^2 \times 5^3$).

Board-Pattern Questions – 3 Marks**1. Check by prime factorisation whether 1764 is a perfect square; find its root. (3)**

Ans. $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = (2 \times 3 \times 7)^2 = 42^2$. Every prime appears in a pair, so it is a perfect square and $\sqrt{1764} = 42$.

2. By what smallest number should 1100 be multiplied to get a perfect square? Find the root. (3)

Ans. $1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11$. The 11 is unpaired, so multiply by 11: $12100 = (2 \times 5 \times 11)^2 = 110^2$.

3. Find $\sqrt[3]{3375}$ and show that 500 is not a perfect cube. (3)

Ans. $3375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$, so $\sqrt[3]{3375} = 15$. $500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$: the two 2s cannot make a triplet, so 500 is not a cube.

4. Show that 49 is the sum of the first 7 odd numbers and that 50 is not a perfect square using odd-number subtraction. (3)

Ans. $49 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 = 0$ (7 steps), so $49 = 7^2$ and is the sum of the first 7 odd numbers. $50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 = 1$, next subtract 15 $\rightarrow -14$, so we cross 0 without reaching it: 50 is not a perfect square.

5. Express 1729 as the sum of two cubes in two ways and name the numbers of this type. (3)

Ans. $1729 = 1^3 + 12^3 = (1 + 1728) = 9^3 + 10^3 = (729 + 1000)$. Numbers that can be written as the sum of two cubes in two different ways are called taxicab numbers (next: 4104, 13832).

Board-Pattern Questions – 5 Marks**1. Explain the locker puzzle: why do exactly the lockers 1, 4, 9, ..., 100 stay open and why is the passcode 2-3-5-7-11? (5)**

Ans. A locker N is toggled once by each person whose number is a factor of N, so the number of toggles = number of factors of N. It stays open only if toggled an odd number of times. Factors come in partner pairs ($a \times b = N$), which gives an even count – unless $a = b$, i.e. N is a perfect square, where the middle factor has no partner. So only squares 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 have an odd number of factors and stay open. A locker toggled exactly twice has exactly two factors, 1 and itself, i.e. it is prime; the first five primes are 2, 3, 5, 7, 11.

2. Describe four methods of finding a square root, using examples. (5)

Ans. (i) Listing squares: $21^2 = 441$, $24^2 = 576$, so $\sqrt{576} = 24$. (ii) Repeated subtraction of odd numbers 1, 3, 5, ... until 0: 81 gives 0 after 9 steps, so $\sqrt{81} = 9$. (iii) Prime factorisation: $324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3 \times 3)^2$, so $\sqrt{324} = 18$. (iv) Estimation: $\sqrt{1936}$ lies between 40 and 50; last digit 6 means root ends in 4 or 6; $45^2 = 2025 > 1936$, so the root is 44.

3. Compare squares and cubes: definition, last digits, end zeros, prime-factor grouping and successive differences. Find $\sqrt[3]{10648}$ and the smallest number to multiply 1323 by to get a cube. (5)

Ans. Square: $n \times n$; ends in 0, 1, 4, 5, 6, 9; k end zeros give $2k$; prime factors group in pairs; differences become constant (2) at level 2. Cube: $n \times n \times n$; last digit can be 0–9; k end zeros give $3k$; primes group in triplets; differences become constant (6) at level 3. $10648 = 2^3 \times 11^3$
 $\rightarrow \sqrt[3]{10648} = 22$. $1323 = 3^3 \times 7^2$, so multiply by 7 to get $3^3 \times 7^3 = 9261 = 21^3$.



हिन्दी भाग (Hindi Section)

एक वर्ग और एक घन

कक्षा 8 गणित (गणित प्रकाश भाग 1) • अध्याय 1 • विस्तृत नोट्स + सभी पाठ्यपुस्तक हल + बोर्ड प्रश्न (2026-27)

आसान भाषा में अध्याय की समीक्षा

1. लॉकर पहेली

रानी रत्नमंजरी की वसीयत में 100 लॉकर और 100 व्यक्ति हैं। व्यक्ति k हर k वाँ लॉकर बदलता है (बंद हो तो खोलता, खुला हो तो बंद)। लॉकर अंत में तभी खुला रहता है जब वह विषम बार बदला जाए। लॉकर N के बदले जाने की संख्या = N के गुणनखंडों की संख्या (लॉकर 6: गुणनखंड 1, 2, 3, 6 → 4 बार → बंद)। गुणनखंड साथी जोड़ियों में आते हैं ($1 \times 6, 2 \times 3$), इसलिए संख्या सम होती है, सिवाय तब जब जोड़ी की दोनों संख्याएँ बराबर हों (36 के लिए 6×6)। अतः केवल वर्ग संख्याओं के गुणनखंड विषम होते हैं और खुले लॉकर 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 हैं। ठीक दो बार बदले लॉकर अभाज्य संख्याएँ हैं (गुणनखंड 1 और स्वयं): 2, 3, 5, 7, 11 → कोड 2-3-5-7-11।

2. वर्ग संख्याएँ

वर्ग संख्या वह है जो किसी संख्या को उसी से गुणा करने पर बने: $n \times n = n^2$ (' n का वर्ग')। यह भुजा n वाले वर्ग का क्षेत्रफल है। प्राकृत संख्याओं के वर्ग पूर्ण वर्ग हैं: 1, 4, 9, 16, 25, ... भिन्नों और दशमलवों के वर्ग भी होते हैं: $(3/5)^2 = 9/25$, $(2.5)^2 = 6.25$ ।

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
1	1	7	49	13	169	19	361	25	625
2	4	8	64	14	196	20	400	26	676
3	9	9	81	15	225	21	441	27	729
4	16	10	100	16	256	22	484	28	784
5	25	11	121	17	289	23	529	29	841
6	36	12	144	18	324	24	576	30	900

3. पूर्ण वर्गों के पैटर्न

- इकाई अंक: वर्ग 0, 1, 4, 5, 6 या 9 पर समाप्त होता है – 2, 3, 7, 8 पर कभी नहीं। अतः 2, 3, 7, 8 पर समाप्त संख्या निश्चित रूप से वर्ग नहीं। पर 0, 1, 4, 5, 6, 9 पर समाप्त होना वर्ग होने की गारंटी नहीं (26, 6 पर समाप्त पर वर्ग नहीं)।
- संख्या 1 या 9 पर समाप्त → वर्ग 1 पर समाप्त। 4 या 6 पर समाप्त → वर्ग 6 पर। 2 या 8 पर → वर्ग 4 पर। 3 या 7 पर → वर्ग 9 पर।

► **शून्य**: जिस संख्या के अंत में k शून्य हों, उसके वर्ग में $2k$ शून्य होते हैं ($10^2 = 100$, $200^2 = 40000$)। अतः वर्ग के अंत में शून्य सम संख्या में होते हैं।

► **समता**: सम संख्या का वर्ग सम; विषम संख्या का वर्ग विषम।

4. वर्ग, विषम संख्याएँ और त्रिकोणीय संख्याएँ

► **पहली n विषम संख्याओं का योग $= n^2$** : $1 = 1^2$, $1 + 3 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$ (उल्टे L-आकार अगली विषम संख्या जोड़ते हैं)। अतः $n^2 - (n - 1)^2 = 2n - 1$, n -वीं विषम संख्या $2n - 1$ है।

► **वर्ग की जाँच**: क्रम से 1, 3, 5, 7, ... घटाओ। ठीक 0 आए तो पूर्ण वर्ग है और चरणों की संख्या = मूल ($25 \rightarrow 5$ चरण $\rightarrow 5^2$)। 0 पार हो जाए ($38 \rightarrow -11$) तो वर्ग नहीं।

► **पिछले वर्ग से अगला वर्ग**: $36^2 = 35^2 + 71 = 1225 + 71 = 1296$ (36 वीं विषम संख्या $= 2 \times 36 - 1 = 71$)।

► **क्रमागत वर्गों के बीच संख्याएँ**: n^2 और $(n + 1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ होती हैं। (1^2 और 2^2 के बीच: 2; 2^2 और 3^2 के बीच: 4)।

► **त्रिकोणीय संख्याएँ** 1, 3, 6, 10, 15, ... : दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं का योग वर्ग होता है: $1 + 3 = 2^2$, $3 + 6 = 3^2$, $6 + 10 = 4^2$, $10 + 15 = 5^2$ ।

5. वर्गमूल

यदि $y = x^2$ तो x , y का वर्गमूल है, $\sqrt{y}$ लिखते हैं। हर पूर्ण वर्ग के दो पूर्णांक मूल होते हैं, एक धनात्मक और एक ऋणात्मक: $\sqrt{64} = \pm 8$ ($8^2 = 64$ और $(-8)^2 = 64$)। इस अध्याय में $\sqrt{\quad}$ का अर्थ धनात्मक मूल है। वर्ग का क्षेत्रफल 49 वर्ग सेमी $\rightarrow$ भुजा $= \sqrt{49} = 7$ सेमी।

वर्गमूल निकालने के चार तरीके

(1) सूची बनाना: $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, ... $24^2 = 576 \rightarrow \sqrt{576} = 24$ । (2) विषम संख्याओं का बार-बार घटाना: $81 - 1 - 3 - \dots$ 9वें चरण पर 0 $\rightarrow \sqrt{81} = 9$ (बड़ी संख्याओं के लिए धीमा)। (3) अभाज्य गुणनखंडन: समान अभाज्यों के जोड़े बनाओ; हर जोड़े से एक अभाज्य लेने पर मूल मिलता है। $324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3^2)^2 \rightarrow \sqrt{324} = 18$ । $156 = 2^2 \times 3 \times 13$ - जोड़े नहीं बनते $\rightarrow$ वर्ग नहीं। (4) अनुमान: $\sqrt{1936}$: $40^2 = 1600$ और $50^2 = 2500$ के बीच; अंतिम अंक 6 $\rightarrow$ मूल 4 या 6 पर समाप्त; $45^2 = 2025 > 1936$ इसलिए मूल 45 से कम $\rightarrow 44$ ।

$\sqrt{250}$ का अनुमान: $15^2 = 225$ और $16^2 = 256$, अतः $15 < \sqrt{250} < 16$; 256 बहुत पास है, इसलिए $\sqrt{250} \approx 15.8$ (16 से थोड़ा कम)। **अखिल का कपड़ा**: क्षेत्रफल 125 सेमी²; $11^2 = 121$ और $12^2 = 144$, इसलिए पूर्णांक भुजा वाला सबसे बड़ा वर्गाकार रुमाल 11 सेमी भुजा का होगा (15 सेमी का असंभव)।

6. घन संख्याएँ

घन संख्या वह है जो किसी संख्या को तीन बार गुणा करने पर बने: $n \times n \times n = n^3$ । यह भुजा n वाले घन का आयतन है (4×4 की परत में 16, चार परतें = 64 इकाई घन)। पूर्ण घन: 1, 8, 27, 64, 125, 216, ... 9 घन नहीं है, न 10 से 26 तक कोई संख्या। भिन्नों, दशमलवों और ऋणात्मक संख्याओं के घन भी होते हैं: $(4/6)^3 = 64/216$, $(-6)^3 = -216$ ।

n	n ³	n	n ³	n	n ³	n	n ³	n	n ³
1	1	6	216	11	1331	16	4096		
2	8	7	343	12	1728	17	4913		
3	27	8	512	13	2197	18	5832		
4	64	9	729	14	2744	19	6859		
5	125	10	1000	15	3375	20	8000		

- ▶ घनों के अंतिम अंक 0-9 में कोई भी हो सकते हैं: $1 \rightarrow 1$, $2 \rightarrow 8$, $3 \rightarrow 7$, $4 \rightarrow 4$, $5 \rightarrow 5$, $6 \rightarrow 6$, $7 \rightarrow 3$, $8 \rightarrow 2$, $9 \rightarrow 9$, $0 \rightarrow 0$ । विषम का घन विषम, सम का घन सम।
- ▶ अंकों के अनुसार गिनती: 1-अंक घन: 1, 8 (2); 2-अंक: 27, 64 (2); 3-अंक: 125, 216, 343, 512, 729 (5)।
- ▶ शून्य: जिस संख्या के अंत में k शून्य हों उसके घन में $3k$ शून्य होते हैं, इसलिए घन ठीक दो शून्यों (00) पर समाप्त नहीं हो सकता।
- ▶ टैक्सीकैब संख्याएँ: दो घनों के योग के रूप में दो प्रकार से लिखी जाने वाली सबसे छोटी संख्या $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$ (हार्डी-रामानुजन संख्या)। अगली: $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$; $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ ।
- ▶ घन और विषम संख्याएँ: $1 = 1^3$; $3 + 5 = 2^3$; $7 + 9 + 11 = 3^3$; $13 + 15 + 17 + 19 = 4^3 \dots$
अतः $91 + 93 + \dots + 109$ (10 पद) = $10^3 = 1000$ ।

7. घनमूल

यदि $y = x^3$ तो x घनमूल है, $\sqrt[3]{y}$ लिखते हैं। $\sqrt[3]{8} = 2$, $\sqrt[3]{1000} = 10$, सामान्यतः $\sqrt[3]{(n^3)} = n$ ।
अभाज्य गुणनखंडन से: अभाज्यों को तिकड़ियों में बाँटो; हर तिकड़ी से एक अभाज्य लेने पर मूल मिलता है। $3375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3 \rightarrow \sqrt[3]{3375} = 15$ । $500 = 2^2 \times 5^3$ - 2 की तिकड़ी नहीं बनती $\rightarrow$ घन नहीं। किसी घन के अभाज्य गुणनखंडन में हर अभाज्य 3 के गुणज बार आता है ($12^3 = 2^6 \times 3^3$)। $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{512} = 8$, $\sqrt[3]{729} = 9$ । क्रमिक अंतर: वर्गों में 2 स्तर बाद अंतर स्थिर (2, 2, 2); घनों में 3 स्तर बाद (1, 8, 27, 64, 125, 216 $\rightarrow$ 7, 19, 37, 61, 91 $\rightarrow$ 12, 18, 24, 30 $\rightarrow$ 6, 6, 6)।

8. थोड़ा इतिहास

बेबीलोनवासियों (लगभग 1700 ई.पू.) ने भूमि-माप और निर्माण के लिए मिट्टी की पट्टिकाओं पर वर्गों और घनों की सूचियाँ बनाईं। संस्कृत में वर्ग = वर्ग (आकृति, क्षेत्रफल और घात), घन = घन,

वर्ग-वर्ग = चौथी घात (तीसरी शताब्दी ई.पू. से प्रयोग)। **आर्यभट (499 ई.)** ने वर्ग को चार समान भुजाओं की आकृति और उसका क्षेत्रफल बताया। पौधे की जड़ को **मूल** कहते हैं: **वर्ग-मूल** = वर्गमूल, **घन-मूल** = घनमूल (पहली शताब्दी ई.पू. से; बाद में अरबी जिज़्र और लैटिन रेडिक्स)। पद भी मूल का नाम था; **ब्रह्मगुप्त (628 ई.)** ने कहा कि कृति (वर्ग) का पद वह है जिसका वह वर्ग है।

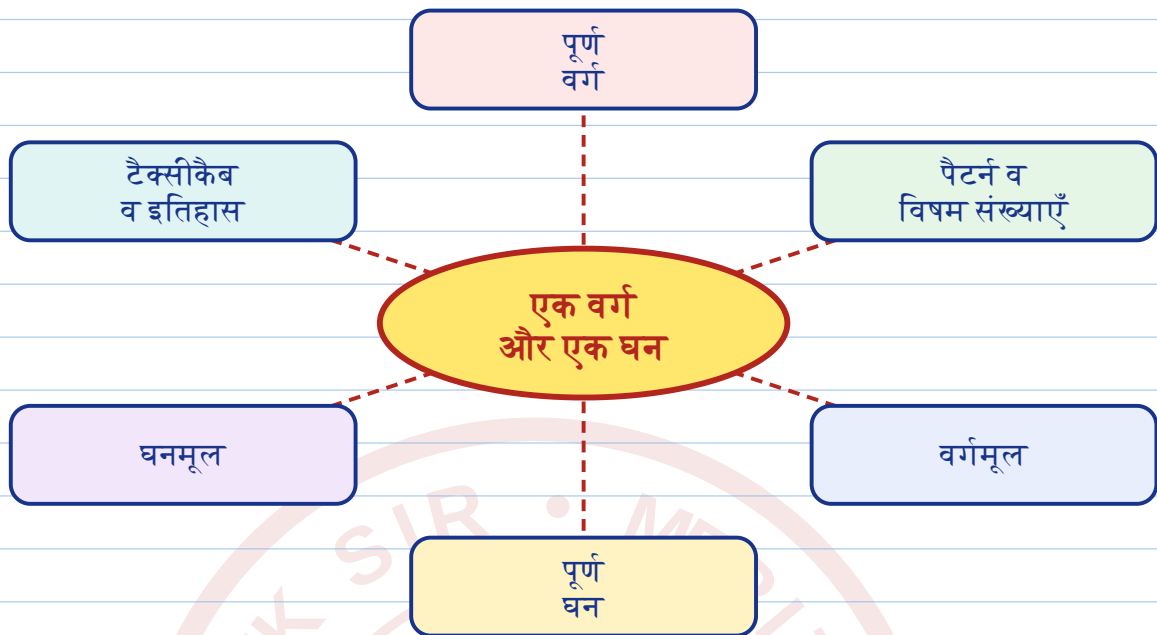
महत्वपूर्ण शब्द (शब्दावली)

शब्द	अर्थ / परिभाषा
पूर्ण वर्ग	प्राकृत संख्या का वर्ग (1, 4, 9, 16, ...)
पूर्ण घन	प्राकृत संख्या का घन (1, 8, 27, 64, ...)
वर्गमूल	वह x जिसका वर्ग y हो; धनात्मक मूल $\sqrt{y}$ ।
घनमूल	वह x जिसका घन y हो।
साथी गुणनखंड	गुणनखंडों की जोड़ी जिनका गुणनफल संख्या हो।
अभाज्य गुणनखंडन	संख्या को अभाज्यों के गुणनफल में लिखना।
बंदलना	बंद हो तो खोलना, खुला हो तो बंद करना।
त्रिकोणीय संख्या	1, 3, 6, 10, 15, ... (त्रिभुज में बिंदु)।
टैक्सीकैब संख्या	दो घनों का योग जो दो भिन्न तरीकों से बने।
वर्ग / घन / मूल	वर्ग / घन / जड़ के संस्कृत नाम।

त्वरित पुनरावृत्ति व सूत्र

- ▶ $n^2 = n \times n$; $n^3 = n \times n \times n$; केवल वर्गों के गुणनखंड विषम संख्या में।
- ▶ वर्ग 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 पर समाप्त (2, 3, 7, 8 पर कभी नहीं); अंत के शून्य सम संख्या में।
- ▶ $1 + 3 + 5 + \dots$ (n पद) $= n^2$; n -वीं विषम $= 2n - 1$; $(n + 1)^2 = n^2 + (2n + 1)$ ।
- ▶ n^2 और $(n + 1)^2$ के बीच संख्याएँ $= 2n$ ।
- ▶ क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं का योग वर्ग होता है।
- ▶ अभाज्य गुणनखंडों से वर्गमूल: जोड़े (2 समान); घनमूल: तिकड़ी (3 समान)।
- ▶ विषम का घन विषम, सम का घन सम; k अंत शून्य $\rightarrow$ घन में $3k$ शून्य (ठीक 00 कभी नहीं)।
- ▶ $1729 = 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$; $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$; $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ ।

चित्र, तालिकाएँ और फ्लोचार्ट



अध्याय 1 का अवधारणा-मानचित्र

विषम संख्याओं से वर्ग

पहली n विषम संख्याओं का योग $= n^2$

1 $1 = 1^2$	$1 + 3$ $4 = 2^2$	$1 + 3 + 5$ $9 = 3^2$	$1 + 3 + 5 + 7$ $16 = 4^2$	$1 + 3 + 5 + 7 + 9$ $25 = 5^2$
------------------	----------------------	--------------------------	-------------------------------	-----------------------------------

जाँच: $25 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 = 0$ (5 चरण), अतः $\sqrt{25} = 5$

चित्र: हर नई विषम संख्या अगला वर्ग देती है

तालिका 1: n , n^2 और n^3 का अंतिम अंक

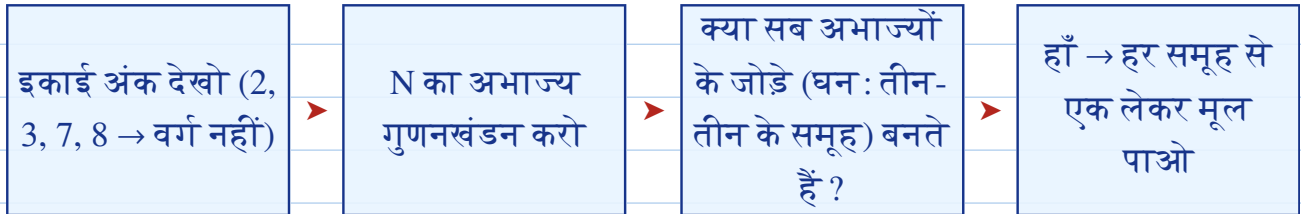
n का अंतिम अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2 का अंतिम अंक	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
n^3 का अंतिम अंक	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

तालिका 2: वर्ग बनाम घन

बिंदु	वर्ग	घन
सूत्र	$n \times n = n^2$	$n \times n \times n = n^3$
ज्यामितीय अर्थ	वर्ग का क्षेत्रफल	घन का आयतन
अंतिम अंक	0, 1, 4, 5, 6, 9	0-9 में कोई भी

अंत के शून्य	2k (सम)	3k
अभाज्य गुणनखंड	जोड़े	तिकड़ी
अंतर स्थिर होते हैं	2 स्तर बाद (2)	3 स्तर बाद (6)

फ्लोचार्ट: क्या N पूर्ण वर्ग (घन) है?



पाठ्यपुस्तक के हल (सभी प्रश्न)

पृष्ठ 2 – क्या हर संख्या के गुणनखंड सम संख्या में होते हैं? क्या विषम गुणनखंड वाली और संख्याएँ मिलती हैं? पृष्ठ 3 – कौन-से लॉकर खुले रहेंगे? कौन-से पाँच लॉकर ठीक दो बार छुए गए?

उत्तर: नहीं – 2×2 या 6×6 जैसी जोड़ी में वही संख्या दो बार आती है, इसलिए वर्गों के गुणनखंड विषम होते हैं (1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 → खुले लॉकर)। ठीक दो बार छुए = अभाज्य: 2, 3, 5, 7, 11 (कोड 2-3-5-7-11)।

पृष्ठ 4-5 (गणित चर्चा) – इकाई अंक देखकर 5 ऐसी संख्याएँ लिखो जो निश्चित रूप से वर्ग नहीं हैं। $1^2, 9^2, 11^2, 19^2, 21^2, 29^2$ के बाद 1 पर समाप्त होने वाले अगले दो वर्ग। $38^2, 34^2, 46^2, 56^2, 74^2, 82^2$ में कौन 6 पर समाप्त होते हैं?

उत्तर: 2, 3, 7 या 8 पर समाप्त संख्याएँ, जैसे 22, 33, 47, 58, 1003 – कोई भी वर्ग नहीं। 1 पर समाप्त वर्ग 1 या 9 पर समाप्त संख्याओं से बनते हैं: अगले $31^2 = 961$ और $39^2 = 1521$ । 6 के लिए आधार 4 या 6 पर समाप्त हो: $34^2, 46^2, 56^2, 74^2$ (38^2 और 82^2 4 पर समाप्त)।

पृष्ठ 5 – 3 शून्य वाली संख्या के वर्ग में कितने शून्य? संख्या और उसके वर्ग के शून्यों में संबंध? क्या वर्गों में अंत के शून्य केवल सम संख्या में होते हैं? संख्या और वर्ग की समता?

उत्तर: छह शून्य (3×2)। वर्ग में शून्य संख्या के शून्यों के दुगने होते हैं; हाँ, सदा, इसलिए वर्गों के अंत में शून्य केवल सम संख्या में होते हैं। सम का वर्ग सम; विषम का वर्ग विषम (समान समता)।

पृष्ठ 6-7 – क्या $1225 + 71 = 36^2$? $35^2 = 1225$ से 36^2 निकालो। दो क्रमागत वर्गों के बीच कितनी संख्याएँ? 1000 तक हर 100 के खंड में कितने वर्ग? 1000 से छोटा सबसे बड़ा वर्ग?

उत्तर: 36वीं विषम संख्या $2 \times 36 - 1 = 71$, अतः $36^2 = 1225 + 71 = 1296$ । p और q क्रमागत वर्ग हों तो उनके बीच $(q - p - 1)$ संख्याएँ; n^2 और $(n + 1)^2$ के बीच $2n$ । 100 के खंडों में वर्ग: 1-100: 10; 101-200: 4; 201-300: 3; 301-400: 3; 401-500: 2; 501-600: 2; 601-700: 2; 701-800: 2; 801-900: 2; 901-1000: 1। 1000 से छोटा सबसे बड़ा वर्ग $= 31^2 = 961$ ।

पृष्ठ 8 – त्रिकोणीय संख्याएँ 1, 3, 6, 10, 15: अगला पद बनाओ और वर्गों से संबंध बताओ। विषम संख्याएँ घटाकर $\sqrt{81}$ निकालो; क्या $\sqrt{729}$ ऐसे संभव है?

उत्तर: अगली त्रिकोणीय संख्या $15 + 21 = 36$ (और $10 + 15 = 25 = 5^2$): दो क्रमागत

त्रिकोणीय संख्याओं का योग वर्ग होता है। $81 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 - 15 - 17 = 0$, 9 चरणों में, अतः $\sqrt{81} = 9$ । हाँ, 729 भी (27 चरण) संभव है पर लंबा।

पृष्ठ 9 – अभाज्य गुणनखंडन से जाँचो कि 1156 और 2800 पूर्ण वर्ग हैं या नहीं। अनुमान से $\sqrt{1936}$ निकालो। $\sqrt{250}$ का अनुमान लगाओ।

उत्तर: $1156 = 2 \times 2 \times 17 \times 17 = (2 \times 17)^2 = 34^2$, अतः पूर्ण वर्ग ($\sqrt{1156} = 34$)। $2800 = 2^4 \times 5^2 \times 7$ – अकेले 7 का जोड़ा नहीं, इसलिए वर्ग नहीं। $\sqrt{1936} = 44$ (40 और 45 के बीच, अंतिम अंक 4)। $\sqrt{250}$, 15 और 16 के बीच, लगभग 15.8।

Figure it Out (पृष्ठ 10) – प्र1. कौन पूर्ण वर्ग नहीं: (i) 2032 (ii) 2048 (iii) 1027 (iv) 1089? प्र2. 64^2 , 108^2 , 292^2 , 36^2 में किसका अंतिम अंक 4 है? प्र3. $125^2 = 15625$ दिया है, 126^2 का मान?

उत्तर: प्र1: (i) 2 पर, (ii) 8 पर, (iii) 7 पर समाप्त → वर्ग नहीं; (iv) $1089 = 33^2$ वर्ग है। प्र2: 108^2 ($8^2 = 64$) और 292^2 ($2^2 = 4$) का अंतिम अंक 4; 64^2 और 36^2 का 6। प्र3: $126^2 = 125^2 + 125 + 126 = 15625 + 251$, अतः विकल्प (iv)।

प्र4. क्षेत्रफल 441 मी^2 वाले वर्ग की भुजा। प्र5. 4, 9 और 10 से विभाज्य सबसे छोटी वर्ग संख्या।

प्र6. 9408 को किस सबसे छोटी संख्या से गुणा करें कि गुणनफल पूर्ण वर्ग हो; मूल निकालो।

उत्तर: प्र4: $\sqrt{441} = 21 \text{ मी}$ ($441 = 3^2 \times 7^2$)। प्र5: $\text{LCM}(4, 9, 10) = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$; 5 अकेला है, इसलिए 5 से गुणा: $180 \times 5 = 900 = 30^2$ । प्र6: $9408 = 2^6 \times 3 \times 7^2$; अकेला 3 बिना जोड़ी, इसलिए 3 से गुणा → $28224 = (2^3 \times 3 \times 7)^2$, मूल = $8 \times 3 \times 7 = 168$ ।

प्र7. इनके वर्गों के बीच कितनी संख्याएँ: (i) 16 और 17 (ii) 99 और 100? प्र8. भरो: $4^2 + 5^2 + 20^2 = (\quad)^2$; $9^2 + 10^2 + (\quad)^2 = (\quad)^2$ । प्र9. चित्र में कितने छोटे वर्ग हैं? संख्या का अभाज्य गुणनखंडन लिखो।

उत्तर: प्र7: n^2 और $(n+1)^2$ के बीच $2n$ संख्याएँ: (i) $2 \times 16 = 32$ (ii) $2 \times 99 = 198$ । प्र8: पैटर्न $n^2 + (n+1)^2 + (n(n+1))^2 = (n^2 + n + 1)^2$: $16 + 25 + 400 = 441 = 21^2$; $n = 9$ के लिए: $81 + 100 + 90^2$ (8100) = $8281 = 91^2$ । उत्तर: 21; 90 और 91। प्र9 (चित्र से): 9 पंक्तियाँ $\times$ 9 स्तंभ = 81 टाइलें, हर में $5 \times 5 = 25$ छोटे वर्ग → $81 \times 25 = 2025 = 3^4 \times 5^2 (= 45^2)$ ।

पृष्ठ 12-13 – (गणित चर्चा) घनों के संभावित अंतिम अंक; 1, 2 और 3 अंकों वाले घनों की संख्या; क्या घन ठीक दो शून्यों पर समाप्त हो सकता है? 4104 और 13832 को दो धनात्मक घनों के योग के रूप में दो प्रकार से लिखो।

उत्तर: घनों के अंतिम अंक 0-9 में कोई भी हो सकते हैं (1→1, 2→8, 3→7, 4→4, 5→5, 6→6, 7→3, 8→2, 9→9, 0→0)। 1-अंक घन: 1, 8 (2); 2-अंक: 27, 64 (2); 3-अंक: 125, 216, 343, 512, 729 (5)। नहीं – संख्या के अंत में k शून्य हों तो घन में $3k$ शून्य। $4104 = 2^3 + 16^3 = 9^3 + 15^3$ ($8 + 4096$; $729 + 3375$)। $13832 = 2^3 + 24^3 = 18^3 + 20^3$ ($8 + 13824$; $5832 + 8000$)।

पृष्ठ 14-15 – बिना गणना किए $91 + 93 + 95 + \dots + 109$ क्या है? $\sqrt[3]{64}$, $\sqrt[3]{512}$, $\sqrt[3]{729}$ निकालो। घनों के क्रमिक अंतर तब तक निकालो जब तक स्थिर न हों।

उत्तर: श्रेणी 1; 3 + 5; 7 + 9 + 11; ... में n^3 के लिए n पद होते हैं और 91 ... 109 दसवाँ समूह (10 विषम पद) है $\rightarrow$ योग = $10^3 = 1000$ । $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{512} = 8$, $\sqrt[3]{729} = 9$ । घन 1, 8, 27, 64, 125, 216 $\rightarrow$ स्तर 1: 7, 19, 37, 61, 91 $\rightarrow$ स्तर 2: 12, 18, 24, 30 $\rightarrow$ स्तर 3: 6, 6, 6 (3 स्तर बाद स्थिर; वर्ग 2 स्तर बाद स्थिर (2) होते हैं)।

Figure it Out (पृष्ठ 16) – प्र1. 27000 और 10648 के घनमूल। प्र2. 1323 को किस संख्या से गुणा करें कि घन बने? प्र3. सत्य/असत्य, कारण सहित: (i) किसी विषम संख्या का घन सम होता है (ii) 8 पर समाप्त कोई पूर्ण घन नहीं (iii) 2-अंकीय संख्या का घन 3-अंकीय हो सकता है (iv) 2-अंकीय संख्या के घन में 7 या अधिक अंक हो सकते हैं (v) घनों के गुणनखंड विषम संख्या में होते हैं।

उत्तर: प्र1: $27000 = 27 \times 1000 = 3^3 \times 10^3 \rightarrow \sqrt[3]{27000} = 30$ । $10648 = 2^3 \times 11^3 \rightarrow \sqrt[3]{10648} = 22$ । प्र2: $1323 = 3^3 \times 7^2$; 7 केवल दो हैं, इसलिए 7 से गुणा: $3^3 \times 7^3 = 9261 = 21^3$ । प्र3: (i) असत्य – विषम $\times$ विषम $\times$ विषम विषम होता है ($3^3 = 27$)। (ii) असत्य – $12^3 = 1728$, 8 पर समाप्त। (iii) असत्य – सबसे छोटा 2-अंकीय घन $10^3 = 1000$ (4 अंक)। (iv) असत्य – सबसे बड़ा $99^3 = 970299$ (6 अंक)। (v) असत्य – $8 = 2^3$ के 4 गुणनखंड (1, 2, 4, 8), सम।

प्र4. 1331 पूर्ण घन है – बिना गुणनखंडन के उसका घनमूल अनुमान से बताओ; $\sqrt[3]{4913}$, $\sqrt[3]{12167}$, $\sqrt[3]{32768}$ भी। प्र5. सबसे बड़ा कौन: (i) $67^3 - 66^3$ (ii) $43^3 - 42^3$ (iii) $67^2 - 66^2$ (iv) $43^2 - 42^2$?

उत्तर: प्र4: अंतिम अंक और सीमा का प्रयोग करो। 1331: 1 पर समाप्त $\rightarrow$ मूल 1 पर समाप्त; $10^3 = 1000$ और $20^3 = 8000$, अतः मूल = 11। 4913: 3 पर समाप्त $\rightarrow$ मूल 7 पर समाप्त; 10^3 और 20^3 के बीच $\rightarrow 17$ । 12167: 7 पर समाप्त $\rightarrow$ मूल 3 पर समाप्त; $20^3 = 8000$ और $30^3 = 27000$ के बीच $\rightarrow 23$ । 32768: 8 पर समाप्त $\rightarrow$ मूल 2 पर समाप्त; 30^3 और 40^3 के बीच $\rightarrow 32$ । प्र5: $(a^3 - (a-1)^3 = 3a^2 - 3a + 1$ और $a^2 - (a-1)^2 = 2a - 1$): (i) $67^3 - 66^3 = 13267$; (ii) $43^3 - 42^3 = 5419$; (iii) 133; (iv) 85। सबसे बड़ा = (i) $67^3 - 66^3$ ।

पहेली 'वर्ग जोड़ियाँ!' – 1 से 17 को पंक्ति में ऐसे रखो कि हर पास-पास की जोड़ी का योग वर्ग हो। क्या एक से अधिक तरीके हैं? 1 से 32 को वृत्त में रखो।

उत्तर: 1 से 17: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8, 17 (योग 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 16, 25, 16, 9, 25)। केवल एक तरीका (और उसका उलटा): 17 केवल 8 के साथ ($17 + 8 = 25$) और 16 केवल 9 के साथ ($16 + 9 = 25$) जुड़ सकता है, इसलिए 16 और 17 दोनों सिरों पर होंगे, जिससे बाकी क्रम तय हो जाता है। 1 से 32 वृत्त: 1, 8, 28, 21, 4, 32, 17, 19, 30, 6, 3, 13, 12, 24, 25, 11, 5, 31, 18, 7, 29, 20, 16, 9, 27, 22, 14, 2, 23, 26, 10, 15 और फिर 1 ($15 + 1 = 16$)। (व्यवस्थाएँ कंप्यूटर से जाँची गई हैं)।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 1 अंक**1. पूर्ण वर्ग के गुणनखंड सम होते हैं या विषम? (1)****उत्तर:** विषम।**2. 25 का वर्ग लिखो। (1)****उत्तर:** 625।**3. क्या वर्ग 7 पर समाप्त हो सकता है? (1)****उत्तर:** नहीं (वर्ग 2, 3, 7, 8 पर कभी नहीं)।**4. n -वीं विषम संख्या लिखो। (1)****उत्तर:** $2n - 1$ ।**5. $(500)^2$ के अंत में कितने शून्य? (1)****उत्तर:** चार (2×2)।**6. $\sqrt{729}$ ज्ञात करो। (1)****उत्तर:** 27।**7. $\sqrt[3]{1728}$ ज्ञात करो। (1)****उत्तर:** 12।**8. 9^2 और 10^2 के बीच कितनी संख्याएँ? (1)****उत्तर:** $2 \times 9 = 18$ ।**9. हार्डी-रामानुजन संख्या लिखो। (1)****उत्तर:** 1729 ($= 1^3 + 12^3 = 9^3 + 10^3$)।**10. $(-6)^3$ का मान? (1)****उत्तर:** -216।**11. घन के लिए संस्कृत शब्द कौन-सा है? (1)****उत्तर:** घन।**12. क्या 500 पूर्ण घन है? (1)****उत्तर:** नहीं ($500 = 2^2 \times 5^3$)।**बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 3 अंक****1. अभाज्य गुणनखंडन से जाँचो कि 1764 पूर्ण वर्ग है या नहीं; मूल निकालो। (3)****उत्तर:** $1764 = 2^2 \times 3^2 \times 7^2 = (2 \times 3 \times 7)^2 = 42^2$ । हर अभाज्य जोड़े में है, इसलिए पूर्ण वर्ग है और $\sqrt{1764} = 42$ ।**2. 1100 को किस सबसे छोटी संख्या से गुणा करें कि पूर्ण वर्ग मिले? मूल निकालो। (3)****उत्तर:** $1100 = 2^2 \times 5^2 \times 11$ । 11 अकेला है, इसलिए 11 से गुणा: $12100 = (2 \times 5 \times 11)^2 = 110^2$ ।

3. $\sqrt[3]{3375}$ निकालो और दिखाओ कि 500 पूर्ण घन नहीं है। (3)

उत्तर: $3375 = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$, अतः $\sqrt[3]{3375} = 15$ । $500 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$: दो 2 की तिकड़ी नहीं बनती, इसलिए 500 घन नहीं।

4. विषम संख्याएँ घटाकर दिखाओ कि 49 पहली 7 विषम संख्याओं का योग है और 50 पूर्ण वर्ग नहीं। (3)

उत्तर: $49 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 = 0$ (7 चरण), अतः $49 = 7^2$ और यह पहली 7 विषम संख्याओं का योग है। $50 - 1 - 3 - 5 - 7 - 9 - 11 - 13 = 1$, अगला 15 घटाने पर -14, 0 पर बिना रुके पार: 50 पूर्ण वर्ग नहीं।

5. 1729 को दो घनों के योग के रूप में दो प्रकार से लिखो और इस प्रकार की संख्याओं का नाम बताओ। (3)

उत्तर: $1729 = 1^3 + 12^3 = (1 + 1728) = 9^3 + 10^3 = (729 + 1000)$ । जो संख्याएँ दो घनों के योग के रूप में दो भिन्न तरीकों से लिखी जा सकें, टैक्सीकैब संख्याएँ कहलाती हैं (अगली: 4104, 13832)।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 5 अंक

1. लॉकर पहली समझाओ: ठीक 1, 4, 9, ..., 100 ही खुले क्यों रहते हैं और कोड 2-3-5-7-11 क्यों है? (5)

उत्तर: लॉकर N को वह हर व्यक्ति एक बार बदलता है जिसका क्रमांक N का गुणनखंड हो, अतः बदलने की संख्या = N के गुणनखंडों की संख्या। यह तभी खुला रहता है जब विषम बार बदला जाए। गुणनखंड साथी जोड़ियों ($a \times b = N$) में आते हैं, जिससे संख्या सम होती है – सिवाय $a = b$ के, यानी N पूर्ण वर्ग, जहाँ बीच के गुणनखंड का साथी नहीं होता। इसलिए केवल वर्ग 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100 के गुणनखंड विषम होते हैं और वे खुले रहते हैं। ठीक दो बार बदला लॉकर वह है जिसके ठीक दो गुणनखंड 1 और स्वयं हों, यानी अभाज्य; पहले पाँच अभाज्य 2, 3, 5, 7, 11 हैं।

2. उदाहरण सहित वर्गमूल निकालने के चार तरीके बताओ। (5)

उत्तर: (i) वर्ग सूची: $21^2 = 441$, $24^2 = 576$, अतः $\sqrt{576} = 24$ । (ii) विषम संख्याएँ 1, 3, 5, ... 0 आने तक घटाना: 81 में 9 चरण बाद 0, अतः $\sqrt{81} = 9$ । (iii) अभाज्य गुणनखंडन: $324 = 2^2 \times 3^4 = (2 \times 3 \times 3)^2$, अतः $\sqrt{324} = 18$ । (iv) अनुमान: $\sqrt{1936}$, 40 और 50 के बीच; अंतिम अंक 6 → मूल 4 या 6 पर समाप्त; $45^2 = 2025 > 1936$, इसलिए मूल 44।

3. वर्ग और घन की तुलना करो: परिभाषा, अंतिम अंक, अंत के शून्य, अभाज्य गुणनखंडों का समूहन और क्रमिक अंतर। $\sqrt[3]{10648}$ और 1323 को गुणा करने की सबसे छोटी संख्या निकालो ताकि घन मिले। (5)

उत्तर: वर्ग: $n \times n$; 0, 1, 4, 5, 6, 9 पर समाप्त; k अंत शून्य से $2k$; अभाज्य जोड़ों में; अंतर स्तर 2 पर स्थिर (2)। घन: $n \times n \times n$; अंतिम अंक 0-9 कुछ भी; k अंत शून्य से $3k$; अभाज्य

तिकड़ियों में; अंतर स्तर 3 पर स्थिर (6)। $10648 = 2^3 \times 11^3 \rightarrow \sqrt[3]{10648} = 22$ । $1323 = 3^3 \times 7^2$,
इसलिए 7 से गुणा करो: $3^3 \times 7^3 = 9261 = 21^3$ ।

