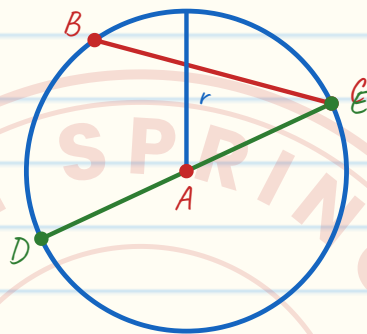


5.1 What is a circle? Words we will use

Take a point A on a page. Now mark every point that is exactly 5 cm away from A. All those points together make a **circle**. The fixed point A is the **centre**, and the fixed distance 5 cm is the **radius**. This is also called a **locus**: the path of all points that follow one rule.



centre A, chord BC, diameter DE, radius r

Word	Meaning
Chord	a line segment joining two points on the circle (BC)
Diameter	the longest chord, it passes through the centre (DE)
Radius	centre to any point on the circle, half of the diameter
Arc	a piece of the circle between two points
Semicircle	half circle, cut by a diameter

Teacher's Note: Diameter = $2 \times$ radius. All radii of one circle are equal. Remember this one line, we use it in every proof of this chapter.

5.2 Symmetries of a circle

Cut a paper circle and fold it in half so that the two halves sit exactly on top of each other. The fold line is a **line of reflection symmetry**. Fold again in a different direction, and the second crease cuts the first at one point. That

point is the **centre**. So every diameter is a line of symmetry, and there are **infinitely many** of them. A circle also looks the same after turning by **any angle** about its centre. This is **rotational symmetry**.

Think and Reflect (solved)

Q.1 Rotations and lines of symmetry of a square, pentagon, hexagon?

Ans. Square: **4** rotations (90° , 180° , 270° , 360°) and **4** lines.

Regular pentagon: **5** rotations and **5** lines.

Regular hexagon: **6** rotations and **6** lines.

Pattern: a regular n -sided shape has n rotations and n lines. A circle is like $n = \infty$.

Q.2 Longest chord when $r = 5$? Smallest chord?

Ans. The longest chord is the diameter $= 2 \times 5 = \mathbf{10 \text{ units}}$.

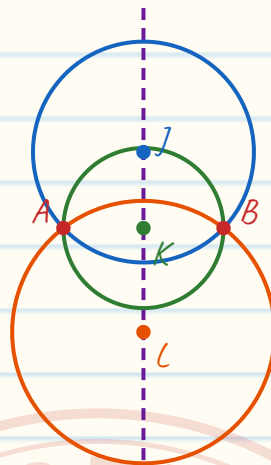
There is **no smallest** chord. Keep the two end points closer and closer, the chord keeps getting smaller but never becomes zero.

Q.3 Locus of points equidistant from two given points?

Ans. It is the **perpendicular bisector** of the segment joining them. It is a straight line, not a circle.

5.3 How many circles?

One point A: infinitely many circles pass through it. **Two points A and B:** the centre must be equally far from A and B, so the centre lies on the **perpendicular bisector of AB**. Every point of that line can be a centre. So again **infinitely many** circles.

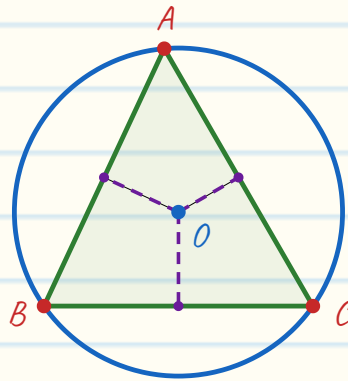


Circles through A and B: centres K, J, L on the bisector

Move the centre along the bisector away from AB: the radius gets **bigger**, and the circle looks **less curved** (flatter near AB). The smallest circle has its centre at the midpoint of AB, so its radius is $AB \div 2$. There is **no largest** circle.

Three points: if A, B, C are **not on one line**, the centre must be on the bisector of AB and also on the bisector of BC. Two lines meet in **only one point**. So exactly **one** circle passes through them.

Theorem 1: Through 3 non-collinear points, exactly one circle passes.



Circumcircle: O is where bisectors meet

This circle is the **circumcircle** of triangle ABC, its centre is the **circumcentre** and its radius is the **circumradius**. To find it: draw bisectors of two sides and see where they meet.

Teacher's Note: Where is the circumcentre? **Acute triangle:** inside. **Right triangle:** on the middle of the longest side (hypotenuse). **Obtuse triangle:** outside.

Think and Reflect (solved)

Q.1 How many circles pass through two points?

Ans. Infinitely many.

Q.2 Circles of all radii? Smallest? Largest?

Ans. Every radius $\geq AB/2$ is possible. Smallest radius = $AB/2$. There is no largest.

Q.3 Moving away along the bisector, radius increases or decreases?

Ans. It increases.

Q.4 More curved or less curved?

Ans. Less curved, the circle gets flatter near A and B.

Q.5 How many squares have A and B on their boundary?

Ans. 3 squares: with AB as a side on one side, with AB as a side on the other side, and with AB as the diagonal.

Exercise Set 5.1 (solved)

Q.1 Triangle with $AB = 5$ cm, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$. Circumcircle. Centre inside or outside?

Ans. $\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$. All angles are less than 90° , so it is an **acute** triangle.

Steps: draw $AB = 5$ cm. Make 70° at A and 60° at B , rays meet at C . Draw bisectors of AB and BC . Their meeting point is O . With compass, put point at O and pencil at A , draw the circle.

Radius measures about **3.26 cm**. The centre is **inside** the triangle.

Q.2 $AB = 5$ cm, $\angle A = 100^\circ$, $AC = 4$ cm.

Ans. $\angle A = 100^\circ$ is bigger than 90° , so it is an **obtuse** triangle.

Draw $AB = 5$, make 100° at A , cut $AC = 4$. Join BC (about 6.92 cm).

Bisect AB and AC . They meet at O .

Radius is about **3.52 cm**. The centre is **outside** the triangle (on the other side of BC from A).

Q.3 $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 7$. Measure OA , OB , OC .

Ans. Check: $6^2 = 36$ is less than $7^2 + 7^2 = 98$, so no obtuse angle. The triangle is **acute**, the centre is inside.

$OA = OB = OC \approx$ **3.87 cm** (all three are radii, so they must be equal).

Q.4 Least possible radius of a circle through A and B ?

Ans. $AB/2$, the circle with AB as its diameter.

Think, Draw and Infer (solved)

Q.1 Collinear points A, B, C . Is there P with $PA = PB = PC$?

Ans. No. The bisector of AB and the bisector of BC are both perpendicular to the same line, so they are **parallel** and never meet. No point P exists, so **no circle** passes through three collinear points.

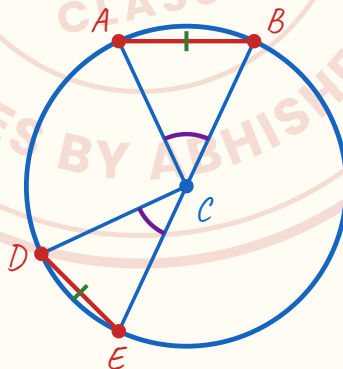
Hence a straight line can cut a circle in **at most 2 points**. You cannot draw a line cutting it at 3 points.

Q.2 Other triangles congruent to ABC with the same circumcircle?

Ans. Yes, **infinitely many**. Keep the circle, and place the same triangle in a rotated position. Its three corners still lie on the same circle.

5.4 Chords and the angles they subtend

A chord AB joined to the centre C makes the angle $\angle ACB$. We say the chord **subtends** this angle at the centre.



Equal chords $AB = DE$, equal angles at C

Theorem 2: Equal chords subtend equal angles at the centre.

Why? In triangles ACB and DCE : $AC = DC$ (radii), $BC = EC$ (radii), $AB = DE$ (given). By **SSS** the triangles are congruent, so $\angle ACB = \angle DCE$.

Theorem 3 (converse): If two chords subtend equal angles at the centre, they are equal.

Why? Now $AC = DC$, $BC = EC$ and $\angle ACB = \angle DCE$. By **SAS** the triangles are congruent, so $AB = DE$.

Exercise Set 5.2 (solved)

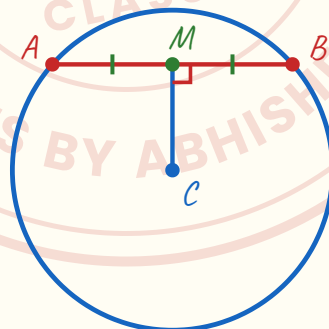
Q.1 Show that the triangle formed by a chord and the centre is isosceles.

Ans. Chord AB , centre C . CA and CB are both radii, so **$CA = CB$** . Two equal sides means an isosceles triangle.

Q.2 If two such triangles have equal bases, they are congruent.

Ans. Triangle 1 has sides r, r, AB . Triangle 2 has sides r, r, DE . Given $AB = DE$. All three sides match, so by **SSS** they are congruent.

5.5 Midpoints and perpendicular bisectors of chords



$CM \perp AB$, so $AM = MB$

Theorem 4: The line from the centre to the midpoint of a chord is perpendicular to the chord.

Why? M is the midpoint, so $AM = BM$. $CA = CB$ (radii), and CM is common. By **SSS**, triangle $CMA \cong CMB$. So $\angle CMA = \angle CMB$. They make a straight line, so each is $180^\circ \div 2 = 90^\circ$.

Theorem 5: The perpendicular from the centre to a chord bisects the chord.

Corollary: The perpendicular bisector of a chord passes through the centre.

Exercise Set 5.3 (solved)

Q.1 Why does the perpendicular from the centre bisect the chord?

Ans. Given $\angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$. Triangles CMA and CMB are right triangles with hypotenuse $CA = CB$ (radii) and the side CM common. By **RHS**, they are congruent. So **$AM = BM$** .

Q.2 Isosceles triangle ABC inscribed in a circle, $AB = AC$. Show the altitude from A passes through the centre.

Ans. The centre O is equally far from B and C , so O lies on the perpendicular bisector of BC . A is also equally far from B and C ($AB = AC$), so A is also on that bisector.

The line through A and O is the perpendicular bisector of BC . That is the altitude from A . So the altitude **passes through O** .

Q.3 Parallel chords 6 cm and 8 cm on opposite sides of the centre, $r = 5$ cm. Distance between midpoints?

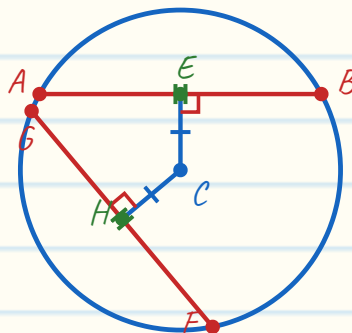
Ans. Perpendicular from the centre bisects the chord. For the 6 cm chord: half = 3, so distance $d_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$.

For the 8 cm chord: half = 4, so $d_2 = \sqrt{25 - 16} = 3$.

Opposite sides, so the midpoints are $4 + 3 = 7$ cm apart.

5.6 Distance of a chord from the centre

The distance of a chord from the centre means the **perpendicular** distance, the shortest path from the centre to the chord.



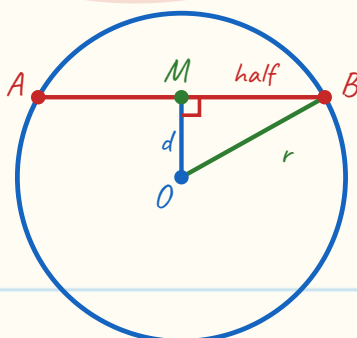
Equal chords, equal distances from C

Theorem 6: Equal chords are at equal distance from the centre.

Theorem 7 (converse): Chords at equal distance from the centre are equal.

Theorem 8: A longer chord is nearer to the centre. (The diameter, the longest, is at distance 0.)

Key formula. In the right triangle OMB (see figure): $r^2 = d^2 + (\text{half chord})^2$



$$\text{Half chord}^2 = r^2 - d^2$$

$$\text{chord length} = 2\sqrt{r^2 - d^2}$$

Exercise Set 5.4 (solved)

Q.1 Use Baudhāyana-Pythagoras to show Theorem 6.

Ans. Two equal chords, so equal halves h . In each right triangle $d^2 = r^2 - h^2$. Same r and same h , so same d . **Distances are equal.**

Q.2 $CE \perp AB$, $CH \perp GH$, $CE = CH$. Show $AB = GF$.

Ans. Distances from the centre are equal ($CE = CH$). By Theorem 7, the chords are equal. Hence **$AB = GF$** . (Or use RHS on the right triangles formed with the radii.)

Q.3 Same, using Pythagoras.

Ans. $(\text{Half } AB)^2 = r^2 - CE^2$ and $(\text{half } GF)^2 = r^2 - CH^2$. Since $CE = CH$, the right sides are equal. So half $AB = \text{half } GF$, and **$AB = GF$** .

Exercise Set 5.5 (solved)

Q.1 $r = 7$ cm, distance = 6 cm. Chord?

Ans. Half chord $= \sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}$.

Chord $= 2\sqrt{13} \approx 7.21$ cm.

Q.2 Why is chord $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$?

Ans. The perpendicular bisects the chord. In the right triangle with sides d , half chord, and hypotenuse r : $\text{half chord}^2 = r^2 - d^2$. Double it. So **chord** $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

Q.3 In a circle $r = 5$, chord AB is 4 away, chord CD is 2 away. Is $CD = 2 \times AB$?

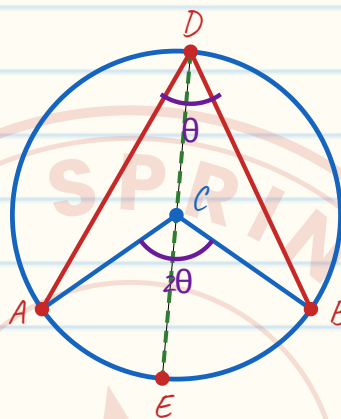
Ans. $AB = 2\sqrt{25 - 16} = 2 \times 3 = 6$.

$CD = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21} \approx 9.17$.

$2 \times AB = 12$, not 9.17. So **No**.

5.7 Angle subtended by an arc

An arc AB also "sees" an angle: at the centre (**central angle**) and at any point D on the rest of the circle (**inscribed angle**).

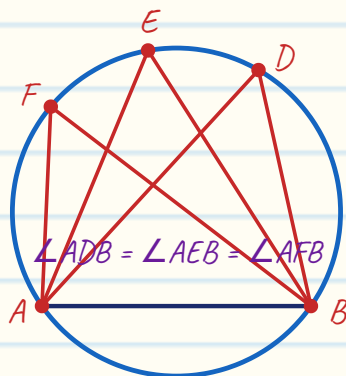


Central angle 2θ , angle on circle θ

Theorem 9: The angle at the centre is twice the angle at the circle. $\angle ACB = 2 \times \angle ADB$.

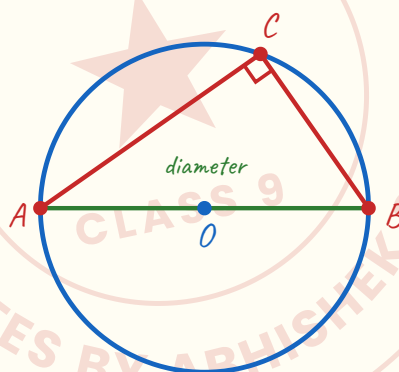
Idea of the proof: draw DC and extend it to E . Triangle ACD is isosceles ($CA = CD$). Its outside angle ACE is twice the angle ADC . Same for BCE and BDC . Add both: the central angle $ACB = 2 \times (ADC + CDB) = 2 \times ADB$.

Result 1: all angles on the same side, made by one arc, are **equal**. They are all half of the same central angle.



Same arc AB, same angle from D, E, F

Result 2: if the arc is a **semicircle**, the central angle is 180° , so the angle in a semicircle is $180^\circ \div 2 = 90^\circ$.



Angle in a semicircle is 90°

Teacher's Note: Whenever you see a diameter and a third point on the circle, think " 90° ".

Exercise Set 5.6 (solved)

Q.1 $\angle AOB = 60^\circ$, $r = 12$. Chord AB?

Ans. $OA = OB = 12$ and $\angle AOB = 60^\circ$. The other two angles are equal, 60° each. So the triangle is **equilateral**.

$AB = 12 \text{ cm}$.

Q.2 (i) Are there X, Y on the same side of AB with $\angle AXB \neq \angle AYB$?

Ans. No. Both are half of the same central angle.

(ii) If $\angle AXB = \angle AYB$, are X and Y on the same side?

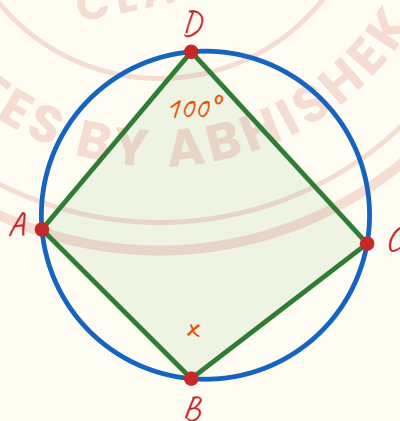
Ans. Not always. If AB is a diameter, both angles are 90° even when X and Y are on opposite sides. Otherwise (AB not a diameter) yes, they must be on the same side.

(iii) If $\angle AXB = \angle AYB$ and X, Y not on the given circle, does the circle through A, B, X pass through Y ?

Ans. Yes, if X and Y are on the same side of AB . Equal angles on the same side mean the points are concyclic (Theorem 10 below).

Q.3 Find x in Fig. 5.26.

Ans. The figure has a cyclic quadrilateral with an angle of 100° opposite to x . Opposite angles add to 180° : $x + 100^\circ = 180^\circ$, so $x = 80^\circ$.

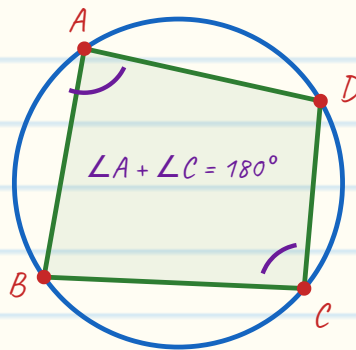


Find x (Fig. 5.26)

5.8 Cyclic quadrilaterals and concyclic points

A quadrilateral whose four corners lie on one circle is a **cyclic quadrilateral**.

Four points on one circle are called **concyclic**.



Cyclic quadrilateral ABCD

Theorem 10: If a line segment sees equal angles from two points on the same side, the four points are concyclic.

Theorem 11: Opposite angles of a cyclic quadrilateral add up to 180° .

Why? Diagonal BD divides the circle in two arcs. $\angle A$ is half of the central angle of one arc, $\angle C$ is half of the central angle of the other arc. The two central angles add to 360° . So $\angle A + \angle C = 360^\circ \div 2 = 180^\circ$.

Theorem 12 (converse): If opposite angles of a quadrilateral add to 180° , it is cyclic.

Check: angles 80° , 110° , 100° , 70° in order

Step 1: Opposite pairs: $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ and $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$.

Step 2: Both pairs are 180° , so **yes, it is cyclic**.

Teacher's Note: Exterior angle of a cyclic quadrilateral = the opposite inner angle. (Because inner angle + opposite = 180° and inner angle + exterior = 180° .)

End-of-Chapter Exercises (solved)

Q.1 Chord 5 cm from centre, $r = 13$. Chord length?

Ans. Half chord $= \sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12$. Chord = **24 cm**.

Q.2 An arc subtends 70° at the centre. Angle at a point on the circle?

Ans. Half of $70^\circ = 35^\circ$.

Q.3 Diameter 26 cm, so $r = 13$. Chord 24 cm. Distance from centre?

Ans. Half chord = 12. $d = \sqrt{(169 - 144)} = \sqrt{25} = 5$ cm.

Q.4 $r = 15$, distance = 9. Chord?

Ans. Half chord $= \sqrt{(225 - 81)} = \sqrt{144} = 12$. Chord = **24 cm**.

Q.5 Prove the perpendicular bisector of a chord passes through the centre.

Ans. The centre O is at equal distance from both end points A and B (both are radii). Every point equidistant from A and B lies on the perpendicular bisector of AB . So **O lies on it**.

Q.6 AB diameter, C on the circle. $\angle ACB$?

Ans. The arc AB is a semicircle: central angle 180° . The angle at C is half: **90°** .

Q.7 Cyclic $ABCD$. $\angle A = 75^\circ$, $\angle C$? $\angle B = 110^\circ$, $\angle D$?

Ans. Opposite angles add to 180° . $\angle C = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. $\angle D = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Q.8 $\angle P = (2x + 10)^\circ$, $\angle R = (3x - 20)^\circ$.

Ans. P and R are opposite: $2x + 10 + 3x - 20 = 180$, so $5x - 10 = 180$, $5x = 190$, **$x = 38$** .

$\angle P = 76 + 10 = 86^\circ$. $\angle R = 114 - 20 = 94^\circ$. Check: $86 + 94 = 180$
✓.

Q.9 Chord 16 cm, distance 6 cm. Radius?

Ans. Half chord = 8. $r = \sqrt{(64 + 36)} = \sqrt{100} = 10 \text{ cm}$.

Q.10 Cyclic quadrilateral with sides 5, 5, 12, 12. Area?

Ans. In a cyclic quadrilateral with sides 5, 12, 5, 12 (a rectangle), area = $5 \times 12 = 60$.

Or if the equal sides are together (a kite), the diagonal is 13 ($5^2 + 12^2 = 13^2$), and two right triangles give $2 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 60$. Same answer, 60 square units.

Q.11 Is the centre of the circumcircle inside or outside the quadrilateral?

Ans. Take any 3 vertices and check if the triangle is obtuse. The centre is **inside** the quadrilateral when no three corners form an obtuse triangle, that is, when every side shows an acute angle at the other corners. If a side makes an obtuse angle at some other corner, the centre falls **outside**.

Q.12 Two equal chords cross. Show their parts are equal.

Ans. Chords AB and CD cross at P, $AB = CD$. Their distances from the centre are equal (Theorem 6), so the right triangles from O to the chords with the common hypotenuse OP are congruent (RHS). So the parts of one chord match the parts of the other: **$AP = CP$ and $PB = PD$** .

Q.13 Draw a circle where a 6 cm chord is 3 cm from the centre.

Ans. Draw chord AB = 6 cm and its midpoint M. At M draw a perpendicular and mark O at 3 cm from M. $OA = OB = \sqrt{(9 + 9)} = 3\sqrt{2} \approx 4.24 \text{ cm}$. Draw the circle with centre O and radius OA. Triangle OAB is the circumcircle idea from the hint.

Q.14 Show a rectangle is the only parallelogram that can be inscribed in a circle.

Ans. A parallelogram has equal opposite angles. A cyclic quadrilateral has opposite angles adding to 180° . So each angle is $180^\circ \div 2 = 90^\circ$. A parallelogram with a right angle is a **rectangle**.

Q.15 Rectangle inscribed in a circle: diagonals meet at the centre.

Ans. Each angle of the rectangle is 90° , so each diagonal sees a 90° angle, which means it is a **diameter** (converse of the semicircle result). Two diameters meet at the **centre**.

Q.16 Midpoints of all chords of a fixed length?

Ans. By Theorem 6, all such chords are at the same distance d from the centre. So their midpoints are all at distance d from O . They form a **circle with the same centre** (concentric), radius d .

Q.17 Chords $AB = AC$. Show the centre lies on the bisector of $\angle BAC$.

Ans. Join OA, OB, OC . $OA = OA$ (common), $OB = OC$ (radii), $AB = AC$ (given). By **SSS**, $\triangle OAB \cong \triangle OAC$. So $\angle OAB = \angle OAC$, and AO bisects $\angle BAC$. The centre **lies on the bisector**.

Q.18 Parallel chords 10 and 24, same side, 7 cm apart. Radius?

Ans. Halves: 5 and 12. Distances: $\sqrt{r^2 - 25}$ and $\sqrt{r^2 - 144}$. On the same side, their difference is 7.

Try $r = 13$: $\sqrt{169 - 25} = 12$ and $\sqrt{169 - 144} = 5$. $12 - 5 = 7 \checkmark$.

So $r = 13$ cm.

Q.19 Regular hexagon in a circle of radius r .

Ans. Each central angle = $360^\circ \div 6 = 60^\circ$. The triangle is equilateral, so **side** = r .

Distance of a side from the centre = height of that triangle = $(\sqrt{3}/2) \times r$.

Q.20 $MNOP$ in a circle, MN diameter. $\angle MOP$ and $\angle MNP$?

Ans. Both see the same arc MP from points on the circle (O and N , on the same side of MP). So $\angle MOP = \angle MNP$.

Q.21 Exterior angle of a cyclic quadrilateral = interior opposite angle.

Ans. $\angle CDE + \angle CDA = 180^\circ$ (straight line). $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ (opposite angles of a cyclic quadrilateral). So $\angle CDE = \angle ABC$.

Q.22 No chord is longer than the diameter.

Ans. For a chord AB , $OA + OB = 2r$ (diameter). In triangle OAB , $AB < OA + OB$ (triangle inequality), unless A, O, B are in a line. So $AB \leq 2r$.

Q.23 Shortest chord through an inside point A is perpendicular to OA .

Ans. Chord length = $2\sqrt{(r^2 - d^2)}$, where d is the distance from the centre. The shortest chord needs the biggest d . The distance d from O to a chord through A is at most OA , and equals OA exactly when the chord is perpendicular to OA . So that chord is the shortest.

Q.24 Use Fig. 5.30 to justify that the angle in a semicircle is 90° .

Ans. AB is the diameter, O the centre, C on the circle. $OA = OC = OB$, so triangles OAC and OBC are isosceles. Their base angles are a and b . The angles of triangle ABC : $a + (a + b) + b = 180^\circ$, so $2(a + b) = 180^\circ$, and $a + b = 90^\circ$. The angle at C is $a + b = 90^\circ$.

Q.25 Chords CC' and $DD' \perp$ diameter AB . MM' joins midpoints of CD and $C'D'$. Prove $MM' \perp AB$.

Ans. AB is a line of symmetry (reflection). C' is the mirror image of C and D' is the mirror image of D . So the midpoint M' of $C'D'$ is the mirror image

of the midpoint M of CD . The line MM' joins a point to its mirror image, so it is **perpendicular to the mirror AB** .

Q.26 Opposite angles of a cyclic quadrilateral add to 180° (using the figure).

Ans. Join the centre O to all four corners. Four isosceles triangles are formed.

Call their base angles x_1, x_2, x_3, x_4 .

Each angle of the quadrilateral is the sum of two base angles. The

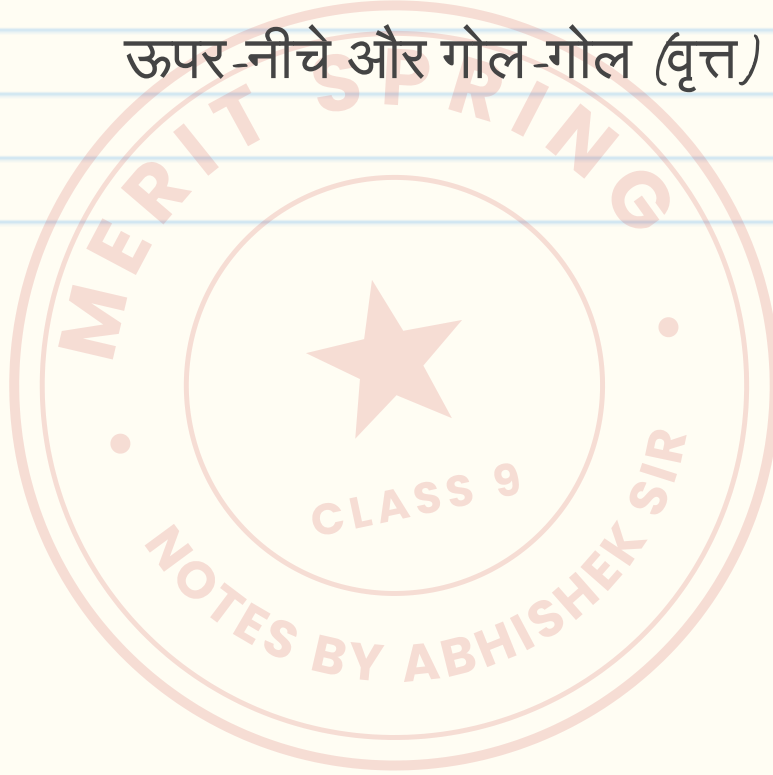
angles of the four triangles together: $2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 360^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$. So $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180^\circ$.

Opposite angles use all four x values, so they add to 180° .

Teacher's Note: Chapter summary: (1) Perpendicular from centre bisects chord. (2) Equal chords: equal central angles and equal distance from the centre. (3) Central angle = $2 \times$ angle on circle. (4) Angle in a semicircle = 90° . (5) Opposite angles of a cyclic quadrilateral = 180° .

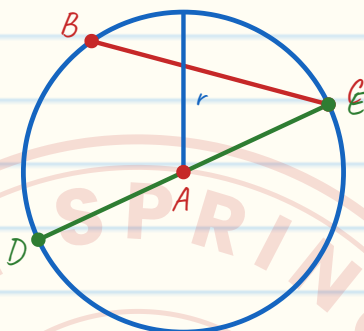
हिंदी संस्करण

ऊपर-नीचे और गोल-गोल (वृत्त)



5.1 वृत्त क्या है? कुछ शब्द

कागज़ पर एक बिंदु A लो। अब A से ठीक 5 सेमी दूर जितने भी बिंदु हैं, सब चिह्नित करो। ये सब मिलकर **वृत्त** बनाते हैं। स्थिर बिंदु A **केंद्र** है, और स्थिर दूरी 5 सेमी **त्रिज्या** है। इसे **बिंदुपथ (locus)** भी कहते हैं: एक नियम मानने वाले सब बिंदुओं का रास्ता।



केंद्र A, जीवा BC, व्यास DE, त्रिज्या r

शब्द	मतलब
जीवा	वृत्त के दो बिंदुओं को जोड़ने वाला रेखाखंड (BC)
व्यास	सबसे लंबी जीवा, केंद्र से होकर जाती है (DE)
त्रिज्या	केंद्र से वृत्त के किसी बिंदु तक, व्यास की आधी
चाप	दो बिंदुओं के बीच वृत्त का टुकड़ा
अर्धवृत्त	आधा वृत्त, व्यास से कटा हुआ

शिक्षक की बात: व्यास = $2 \times$ त्रिज्या। एक वृत्त की सब त्रिज्याएँ बराबर होती हैं। ये एक लाइन याद रखो, पूरे अध्याय के हर प्रमाण में काम आएगी।

5.2 वृत्त की सममिति

कागज़ का वृत्त काटो और उसे ऐसे मोड़ो कि दोनों आधे हिस्से ठीक एक-दूसरे पर बैठें। मोड़ की रेखा **परावर्तन सममिति की रेखा** है। अब दूसरी दिशा में मोड़ो, दूसरी तह पहली तह को एक बिंदु पर काटेगी। वही बिंदु **केंद्र** है। यानी हर व्यास सममिति की रेखा है, और ऐसी **अनंत** रेखाएँ हैं। वृत्त को केंद्र पर **किसी भी कोण** से घुमाओ, वह वैसा ही दिखता है। यह **घूर्णन सममिति** है।

सोचो और विचार करो (हल सहित)

प्र.1 वर्ग, पंचभुज, षट्भुज की घूर्णन और सममिति रेखाएँ?

उत्तर- वर्ग: 4 घूर्णन (90° , 180° , 270° , 360°) और 4 रेखाएँ।

सम पंचभुज: 5 घूर्णन और 5 रेखाएँ।

सम षट्भुज: 6 घूर्णन और 6 रेखाएँ।

पैटर्न: n भुजा वाली सम आकृति में n घूर्णन और n रेखाएँ। वृत्त मानो $n = \infty$ है।

प्र.2 $r = 5$ हो तो सबसे लंबी जीवा? सबसे छोटी जीवा?

उत्तर- सबसे लंबी जीवा व्यास है $= 2 \times 5 = 10$ इकाई।

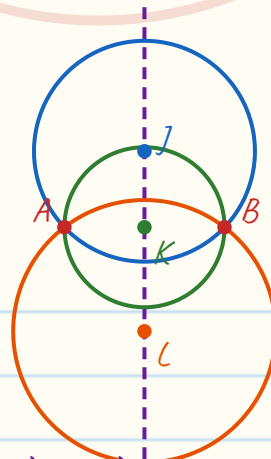
सबसे छोटी जीवा नहीं होती। दोनों सिरे पास-पास लाते जाओ, जीवा छोटी होती जाएगी, पर शून्य कभी नहीं बनेगी।

प्र.3 दो दिए बिंदुओं से समान दूरी वाले बिंदुओं का बिंदुपथ?

उत्तर- उन्हें जोड़ने वाले रेखाखंड का लंब समद्विभाजक। यह सीधी रेखा है, वृत्त नहीं।

5.3 कितने वृत्त?

एक बिंदु A: उससे अनंत वृत्त जाते हैं। दो बिंदु A और B: केंद्र A और B से बराबर दूरी पर होना चाहिए, इसलिए केंद्र AB के लंब समद्विभाजक पर होगा। उस रेखा का हर बिंदु केंद्र हो सकता है। इसलिए फिर अनंत वृत्त।

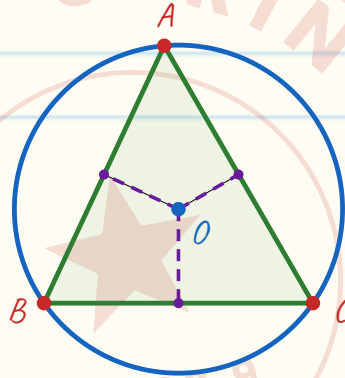


A और B से जाते वृत्त: केंद्र K, J, L समद्विभाजक प.

केंद्र को समद्विभाजक पर AB से दूर ले जाओ: त्रिज्या **बढ़ती** है और वृत्त **कम मुड़ा हुआ** (AB के पास ज्यादा सीधा) दिखता है। सबसे छोटे वृत्त का केंद्र AB का मध्य बिंदु होता है, त्रिज्या **$AB \div 2$** । **सबसे बड़ा** वृत्त नहीं होता।

तीन बिंदु: अगर A, B, C **एक रेखा में नहीं** हैं, तो केंद्र AB के समद्विभाजक पर भी होगा और BC के समद्विभाजक पर भी। दो रेखाएँ **केवल एक बिंदु** पर मिलती हैं। इसलिए ठीक **एक** वृत्त बनेगा।

प्रमेय 1: तीन असरेख बिंदुओं से ठीक एक वृत्त जाता है।



परिवृत्त: O वहाँ जहाँ समद्विभाजक मिलते हैं

यह वृत्त त्रिभुज ABC का **परिवृत्त** है, इसका केंद्र **परिकेंद्र** और त्रिज्या **परित्रिज्या** है। निकालने का तरीका: दो भुजाओं के लंब समद्विभाजक खींचो, जहाँ मिलें वही केंद्र।

शिक्षक की बात: परिकेंद्र कहाँ होता है? **न्यूनकोण त्रिभुज:** अंदर। **समकोण त्रिभुज:** सबसे लंबी भुजा (कर्ण) के मध्य में। **अधिककोण त्रिभुज:** बाहर।

सोचो और विचार करो (हल सहित)

प्र.1 दो बिंदुओं से कितने वृत्त जाते हैं?

उत्तर- अनंत।

प्र.2 क्या हर त्रिज्या संभव है? सबसे छोटी? सबसे बड़ी?

उत्तर- हर त्रिज्या $\geq AB/2$ संभव है। सबसे छोटी = $AB/2$ । **सबसे बड़ी नहीं** होती।

प्र.3 समद्विभाजक पर दूर जाने पर त्रिज्या बढ़ती है या घटती?

उत्तर- बढ़ती है।

प्र.4 ज्यादा मुड़ा हुआ या कम?

उत्तर- कम मुड़ा हुआ, A और B के पास वृत्त ज्यादा सीधा लगता है।

प्र.5 A और B को सीमा पर रखकर कितने वर्ग बनते हैं?

उत्तर- 3 वर्ग: AB एक भुजा हो (एक तरफ), AB एक भुजा हो (दूसरी तरफ), और AB विकर्ण हो।

प्रश्नावली 5.1 (हल सहित)

प्र.1 $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 60^\circ$ वाला त्रिभुज। परिवृत्त। केंद्र अंदर या बाहर?

उत्तर- $\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 60^\circ = 50^\circ$ । सब कोण 90° से छोटे हैं, इसलिए **न्यूनकोण** त्रिभुज है।

विधि: $AB = 5$ सेमी खींचो। A पर 70° और B पर 60° बनाओ, किरणें C पर मिलेंगी। AB और BC के लंब समद्विभाजक खींचो। मिलने का बिंदु O है। कंपास की नोक O पर, पेंसिल A पर रखकर वृत्त खींचो।

त्रिज्या लगभग **3.26 सेमी** आएगी। केंद्र त्रिभुज के **अंदर** है।

प्र.2 $AB = 5$ सेमी, $\angle A = 100^\circ$, $AC = 4$ सेमी।

उत्तर- $\angle A = 100^\circ$ है, 90° से बड़ा, इसलिए **अधिककोण** त्रिभुज है।

$AB = 5$ खींचो, A पर 100° बनाओ, $AC = 4$ काटो। BC जोड़ो (लगभग 6.92 सेमी)।

AB और AC को समद्विभाजित करो। O पर मिलेंगे।

त्रिज्या लगभग **3.52 सेमी**। केंद्र त्रिभुज के **बाहर** है (BC के उस पार जहाँ A नहीं है)।

प्र.3 $AB = 6$, $BC = 7$, $CA = 7$ । OA, OB, OC मापो।

उत्तर- जाँच: $6^2 = 36 < 7^2 + 7^2 = 98$, यानी कोई अधिक कोण नहीं। त्रिभुज **न्यूनकोण** है, केंद्र अंदर।

$OA = OB = OC \approx$ **3.87 सेमी** (तीनों त्रिज्याएँ हैं, इसलिए बराबर होंगी)।

प्र.4 A और B से जाने वाले वृत्त की न्यूनतम त्रिज्या?

उत्तर- $AB/2$, वह वृत्त जिसका व्यास AB है।

सोचो, बनाओ और निष्कर्ष निकालो (हल सहित)

प्र.1 सरेख बिंदु A, B, C। क्या ऐसा P है कि $PA = PB = PC$?

उत्तर- नहीं। AB का समद्विभाजक और BC का समद्विभाजक दोनों एक ही रेखा पर लंब हैं, इसलिए **समांतर** हैं और कभी नहीं मिलते। कोई P नहीं है, इसलिए तीन सरेख बिंदुओं से **कोई वृत्त नहीं** जाता।

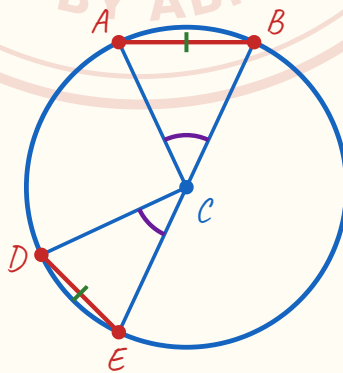
अतः कोई सीधी रेखा वृत्त को **अधिकतम 2 बिंदुओं** पर काट सकती है। 3 बिंदुओं पर काटने वाली रेखा नहीं खींच सकते।

प्र.2 क्या ABC के सर्वांगसम और त्रिभुज उसी परिवृत्त में हो सकते हैं?

उत्तर- हाँ, अनंत। वृत्त वही रखो और वही त्रिभुज घुमाकर रखो। तीनों शीर्ष फिर भी उसी वृत्त पर रहेंगे।

5.4 जीवाएँ और उनके बनाए कोण

जीवा AB को केंद्र C से जोड़ने पर कोण $\angle ACB$ बनता है। हम कहते हैं जीवा केंद्र पर यह कोण **अंतरित** करती है।



समान जीवाएँ $AB = DE$, C पर समान कोण

प्रमेय 2: समान जीवाएँ केंद्र पर समान कोण अंतरित करती हैं।

क्यों? त्रिभुज ACB और DCE में: $AC = DC$ (त्रिज्या), $BC = EC$ (त्रिज्या), $AB = DE$ (दिया है)। **SSS** से त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए $\angle ACB = \angle DCE$ ।

प्रमेय 3 (विलोम): केंद्र पर समान कोण अंतरित करने वाली जीवाएँ समान होती हैं।

क्यों? अब $AC = DC$, $BC = EC$ और $\angle ACB = \angle DCE$ । **SAS** से त्रिभुज सर्वांगसम हैं, इसलिए $AB = DE$ ।

प्रश्नावली 5.2 (हल सहित)

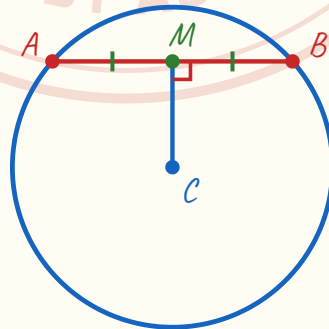
प्र.1 दिखाओ कि जीवा और केंद्र से बना त्रिभुज समद्विबाहु है।

उत्तर- जीवा AB , केंद्र C । CA और CB दोनों त्रिज्याएँ हैं, इसलिए $CA = CB$ । दो भुजाएँ बराबर, यानी समद्विबाहु त्रिभुज।

प्र.2 ऐसे दो त्रिभुजों के आधार बराबर हों तो वे सर्वांगसम हैं।

उत्तर- त्रिभुज 1 की भुजाएँ r, r, AB । त्रिभुज 2 की r, r, DE दिया है $AB = DE$ । तीनों भुजाएँ मिलती हैं, इसलिए **SSS** से सर्वांगसम।

5.5 जीवा का मध्य बिंदु और लंब समद्विभाजक



$CM \perp AB$, इसलिए $AM = MB$

प्रमेय 4: केंद्र से जीवा के मध्य बिंदु तक की रेखा जीवा पर लंब होती है।

क्यों? M मध्य बिंदु है, इसलिए $AM = BM$ । $CA = CB$ (त्रिज्या) और CM उभयनिष्ठ है। **SSS** से $\triangle CMA \cong \triangle CMB$ । इसलिए $\angle CMA = \angle CMB$ । दोनों सीधी रेखा बनाते हैं, इसलिए हर एक $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ ।

प्रमेय 5: केंद्र से जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

परिणाम: जीवा का लंब समद्विभाजक केंद्र से होकर जाता है।

प्रश्नावली 5.3 (हल सहित)

प्र.1 केंद्र से जीवा पर लंब जीवा को क्यों समद्विभाजित करता है?

उत्तर- दिया है $\angle CMA = \angle CMB = 90^\circ$ । त्रिभुज CMA और CMB समकोण हैं, कर्ण $CA = CB$ (त्रिज्या) और भुजा CM उभयनिष्ठ। **RHS** से सर्वांगसम। इसलिए **$AM = BM$** ।

प्र.2 वृत्त में समद्विबाहु त्रिभुज ABC , $AB = AC$ । दिखाओ A से शीर्षलंब केंद्र से जाता है।

उत्तर- केंद्र O , B और C से बराबर दूरी पर है, इसलिए O , BC के लंब समद्विभाजक पर है। A भी B और C से बराबर दूरी पर है ($AB = AC$), इसलिए A भी उसी समद्विभाजक पर है। A और O से जाने वाली रेखा BC का लंब समद्विभाजक है। यही A से शीर्षलंब है। अतः शीर्षलंब **O से होकर जाता है।**

प्र.3 6 सेमी और 8 सेमी की समांतर जीवाएँ केंद्र के विपरीत ओर, $r = 5$ सेमी। मध्य बिंदुओं के बीच दूरी?

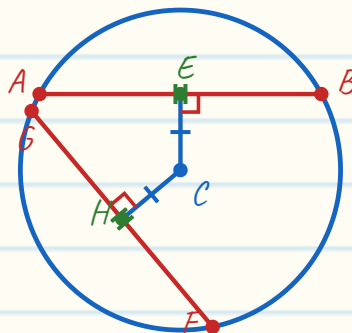
उत्तर- केंद्र से लंब जीवा को आधा करता है। 6 सेमी वाली: आधी = 3, इसलिए $d_1 = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$ ।

8 सेमी वाली: आधी = 4, इसलिए $d_2 = \sqrt{25 - 16} = 3$ ।

विपरीत ओर हैं, इसलिए मध्य बिंदु $4 + 3 = 7$ सेमी दूर हैं।

5.6 जीवा की केंद्र से दूरी

केंद्र से जीवा की दूरी का मतलब **लंबवत** दूरी, यानी सबसे छोटा रास्ता।



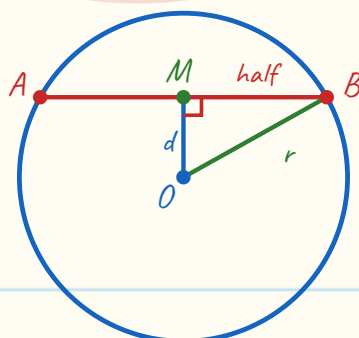
समान जीवाएँ, C से समान दूरी

प्रमेय 6: समान जीवाएँ केंद्र से समान दूरी पर होती हैं।

प्रमेय 7 (विलोम): केंद्र से समान दूरी वाली जीवाएँ समान होती हैं।

प्रमेय 8: बड़ी जीवा केंद्र के ज्यादा पास होती है। (व्यास सबसे लंबा है, उसकी दूरी 0 है।)

मुख्य सूत्र। समकोण त्रिभुज OMB में (चित्र देखो): $r^2 = d^2 + (\text{आधी जीवा})^2$



$$(\text{आधी जीवा})^2 = r^2 - d^2$$

$$\text{जीवा की लंबाई} = 2 \sqrt{r^2 - d^2}$$

प्रश्नावली 5.4 (हल सहित)

प्र.1 बौधायन-पाइथागोरस से प्रमेय 6 सिद्ध करो।

उत्तर- दो समान जीवाएँ, इसलिए आधी जीवाएँ बराबर h । हर समकोण त्रिभुज में $d^2 = r^2 - h^2$ ।
 r वही, h वही, इसलिए d वही। **दूरियाँ बराबर हैं।**

प्र.2 $CE \perp AB$, $CH \perp GF$, $CE = CH$ दिखाओ $AB = GF$ ।

उत्तर- केंद्र से दूरियाँ बराबर हैं ($CE = CH$)। प्रमेय 7 से जीवाएँ बराबर हैं। इसलिए **$AB = GF$** ।
(या त्रिज्याओं के साथ बने समकोण त्रिभुजों में RHS लगाओ।)

प्र.3 पाइथागोरस से हल करो।

उत्तर- (आधी AB)² = $r^2 - CE^2$ और (आधी GF)² = $r^2 - CH^2$ । $CE = CH$ हैं, इसलिए दाएँ पक्ष बराबर। अतः आधी $AB =$ आधी GF , यानी **$AB = GF$** ।

प्रश्नावली 5.5 (हल सहित)

प्र.1 $r = 7$ सेमी, लंबवत दूरी = 6 सेमी। जीवा?

उत्तर- आधी जीवा = $\sqrt{7^2 - 6^2} = \sqrt{49 - 36} = \sqrt{13}$
जीवा = **$2\sqrt{13} \approx 7.21$ सेमी**।

प्र.2 जीवा = $2\sqrt{r^2 - d^2}$ क्यों है?

उत्तर- लंब जीवा को आधा करता है। समकोण त्रिभुज में भुजाएँ d , आधी जीवा और कर्ण r :
(आधी जीवा)² = $r^2 - d^2$ । इसे दुगुना करो। **जीवा = $2\sqrt{r^2 - d^2}$** ।

प्र.3 $r = 5$ के वृत्त में जीवा AB केंद्र से 4 दूर, जीवा CD 2 दूर। क्या $CD = 2 \times AB$?

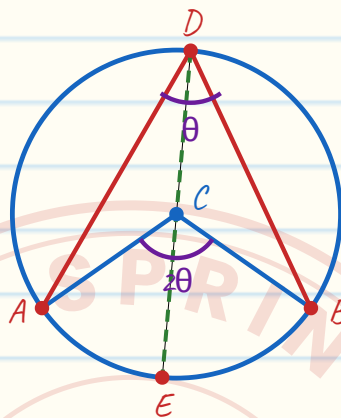
उत्तर- $AB = 2\sqrt{25 - 16} = 2 \times 3 = 6$ ।

$CD = 2\sqrt{25 - 4} = 2\sqrt{21} \approx 9.17$ ।

$2 \times AB = 12$, न कि 9.17। इसलिए **नहीं**।

5.7 चाप द्वारा अंतरित कोण

चाप AB भी एक कोण "देखता" है: केंद्र पर (**केंद्रीय कोण**) और वृत्त के शेष भाग के किसी बिंदु D पर (**अंतर्लिखित कोण**)।

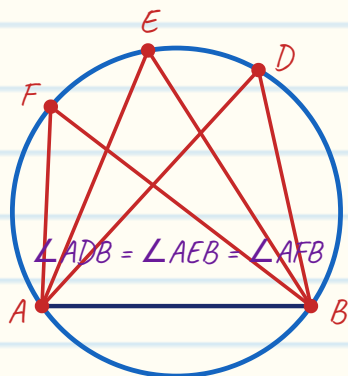


केंद्रीय कोण 2θ , परिधि पर कोण θ

प्रमेय 9: केंद्र पर कोण, परिधि पर कोण का दुगुना होता है। $\angle ACB = 2 \times \angle ADB$

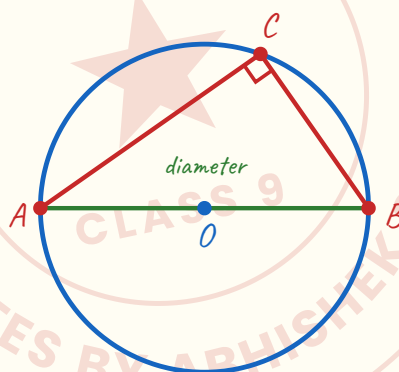
प्रमाण का विचार: DC खींचकर E तक बढ़ाओ। त्रिभुज ACD समद्विबाहु है ($CA = CD$)। उसका बाह्य कोण ACE, कोण ADC का दुगुना है। BCE और BDC के लिए भी यही। दोनों जोड़ो: केंद्रीय कोण $ACB = 2 \times (ADC + CDB) = 2 \times ADB$

नतीजा 1: एक ही चाप से एक ही तरफ बने सब कोण **बराबर** होते हैं। सब एक ही केंद्रीय कोण के आधे हैं।



वही चाप AB, D, E, F से वही कोण

नतीजा 2: चाप अर्धवृत्त हो तो केंद्रीय कोण 180° होता है, इसलिए अर्धवृत्त में कोण $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ ।



अर्धवृत्त में कोण 90° होता है

शिक्षक की बात: जब भी व्यास और वृत्त पर तीसरा बिंदु दिखे, " 90° " सोचो।

प्रश्नावली 5.6 (हल सहित)

प्र.1 $\angle AOB = 60^\circ$, $r = 12$ । जीवा AB?

उत्तर- $OA = OB = 12$ और $\angle AOB = 60^\circ$ । बाकी दो कोण बराबर हैं, 60° प्रत्येक। इसलिए त्रिभुज समबाहु है।

$AB = 12$ सेमी ।

प्र.2 (i) क्या AB के एक ही तरफ X, Y हैं जहाँ $\angle AXB \neq \angle AYB$?

उत्तर- नहीं। दोनों एक ही केंद्रीय कोण के आधे हैं।

(ii) अगर $\angle AXB = \angle AYB$ हो तो क्या X, Y एक ही तरफ होंगे?

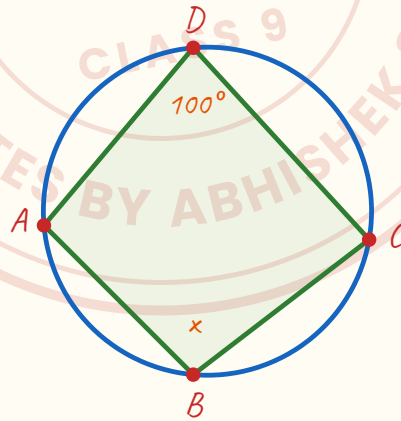
उत्तर- हमेशा नहीं। अगर AB व्यास है तो X, Y विपरीत तरफ होने पर भी दोनों कोण 90° हैं। नहीं तो (AB व्यास न हो) हाँ, एक ही तरफ होंगे।

(iii) अगर $\angle AXB = \angle AYB$ और X, Y दिए वृत्त पर नहीं हैं, तो क्या A, B, X से जाने वाला वृत्त Y से भी जाएगा?

उत्तर- हाँ, अगर X और Y, AB के एक ही तरफ हों। एक तरफ समान कोण का मतलब बिंदु एक वृत्त पर हैं (नीचे प्रमेय 10)।

प्र.3 चित्र 5.26 में x ज्ञात करो।

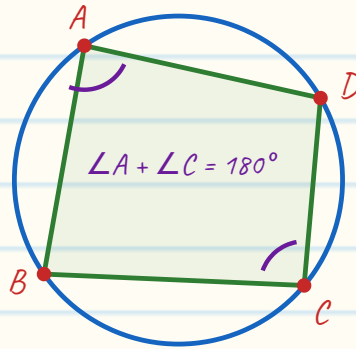
उत्तर- चित्र में चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें x के सामने 100° का कोण है।
सम्मुख कोणों का योग 180° : $x + 100^\circ = 180^\circ$, इसलिए **$x = 80^\circ$** ।



x ज्ञात करो (चित्र 5.26)

5.8 चक्रीय चतुर्भुज और समवृत्तीय बिंदु

जिस चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक वृत्त पर हों वह **चक्रीय चतुर्भुज** है। एक वृत्त पर स्थित चार बिंदु **समवृत्तीय (concyclic)** कहलाते हैं।



चक्रीय चतुर्भुज ABCD

प्रमेय 10: अगर कोई रेखाखंड एक ही तरफ के दो बिंदुओं से समान कोण बनाए, तो चारों बिंदु एक वृत्त पर हैं।

प्रमेय 11: चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° होता है।

क्यों? विकर्ण BD वृत्त को दो चापों में बाँटता है। $\angle A$ एक चाप के केंद्रीय कोण का आधा है, $\angle C$ दूसरे चाप के केंद्रीय कोण का आधा। दोनों केंद्रीय कोण मिलकर 360° हैं। इसलिए $\angle A + \angle C = 360^\circ \div 2 = 180^\circ$ ।

प्रमेय 12 (विलोम): जिस चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° हो, वह चक्रीय है।

जाँच: क्रम से कोण $80^\circ, 110^\circ, 100^\circ, 70^\circ$

चरण 1: सम्मुख जोड़े: $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$ और $110^\circ + 70^\circ = 180^\circ$ ।

चरण 2: दोनों जोड़े 180° हैं, इसलिए **हाँ, यह चक्रीय है**।

शिक्षक की बात: चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण = सम्मुख अंतः कोण। (क्योंकि अंतः कोण + सम्मुख = 180° और अंतः कोण + बाह्य = 180°)

अध्याय के अंत की प्रश्नावली (हल सहित)

प्र.1 जीवा केंद्र से 5 सेमी दूर, $r = 13$ । जीवा की लंबाई?

उत्तर- आधी जीवा = $\sqrt{(169 - 25)} = \sqrt{144} = 12$ । जीवा = **24 सेमी**।

प्र.2 चाप केंद्र पर 70° अंतरित करता है। वृत्त के बिंदु पर कोण?

उत्तर- 70° का आधा = **35°** ।

प्र.3 व्यास 26 सेमी, यानी $r = 13$ । जीवा 24 सेमी। केंद्र से दूरी?

उत्तर- आधी जीवा = 12। $d = \sqrt{(169 - 144)} = \sqrt{25} = 5$ सेमी।

प्र.4 $r = 15$, दूरी = 9। जीवा?

उत्तर- आधी जीवा = $\sqrt{(225 - 81)} = \sqrt{144} = 12$ । जीवा = **24 सेमी**।

प्र.5 सिद्ध करो जीवा का लंब समद्विभाजक केंद्र से जाता है।

उत्तर- केंद्र O, सिरों A और B से बराबर दूरी पर है (दोनों त्रिव्याप्त)। A और B से बराबर दूरी वाला हर बिंदु AB के लंब समद्विभाजक पर होता है। इसलिए **O उस पर है**।

प्र.6 AB व्यास, C वृत्त पर। $\angle ACB$?

उत्तर- चाप AB अर्धवृत्त है। केंद्रीय कोण 180° । C पर कोण उसका आधा: **90°** ।

प्र.7 चक्रीय ABCD। $\angle A = 75^\circ$ तो $\angle C$? $\angle B = 110^\circ$ तो $\angle D$?

उत्तर- सम्मुख कोणों का योग 180° । $\angle C = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$ । $\angle D = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$ ।

प्र.8 $\angle P = (2x + 10)^\circ$, $\angle R = (3x - 20)^\circ$ ।

उत्तर- P और R सम्मुख हैं: $2x + 10 + 3x - 20 = 180$, तो $5x - 10 = 180$, $5x = 190$, **$x = 38$** ।

$\angle P = 76 + 10 = 86^\circ$ । $\angle R = 114 - 20 = 94^\circ$ । जाँच: $86 + 94 = 180$ ✓।

प्र.9 जीवा 16 सेमी, दूरी 6 सेमी। त्रिव्या?

उत्तर- आधी जीवा = 8। $r = \sqrt{(64 + 36)} = \sqrt{100} = 10$ सेमी।

प्र.10 चक्रीय चतुर्भुज की भुजाएँ 5, 5, 12, 12। क्षेत्रफल?

उत्तर- भुजाएँ क्रम से 5, 12, 5, 12 हों (आयत), तो क्षेत्रफल = $5 \times 12 = 60$ ।

या बराबर भुजाएँ साथ-साथ हों (पतंग), तो विकर्ण 13 है ($5^2 + 12^2 = 13^2$), और दो समकोण त्रिभुज: $2 \times \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 60$ । उत्तर वही, **60 वर्ग इकाई** ।

प्र.11 चतुर्भुज का परिकेंद्र अंदर है या बाहर?

उत्तर- कोई भी 3 शीर्ष लो और देखो कि त्रिभुज अधिककोण है या नहीं। केंद्र चतुर्भुज के **अंदर** तब है जब कोई तीन शीर्ष अधिककोण त्रिभुज न बनाएँ, यानी हर भुजा बाकी शीर्षों पर न्यून कोण बनाए। अगर कोई भुजा किसी शीर्ष पर अधिक कोण बनाए तो केंद्र **बाहर** होगा।

प्र.12 दो समान जीवाएँ कटती हैं। दिखाओ उनके भाग बराबर हैं।

उत्तर- जीवाएँ AB और CD, P पर कटती हैं, $AB = CD$ । केंद्र से उनकी दूरियाँ बराबर हैं (प्रमेय 6), तो उभयनिष्ठ कर्ण OP वाले समकोण त्रिभुज सर्वांगसम हैं (RHS)। इसलिए एक जीवा के भाग दूसरी के संगत भागों के बराबर: **$AP = CP$ और $PB = PD$** ।

प्र.13 ऐसा वृत्त बनाओ जिसमें 6 सेमी की जीवा केंद्र से 3 सेमी पर हो।

उत्तर- जीवा $AB = 6$ सेमी खींचो, मध्य बिंदु M। M पर लंब खींचो और M से 3 सेमी पर O चिह्नित करो। $OA = OB = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$ सेमी । केंद्र O, त्रिज्या OA से वृत्त खींचो। संकेत के अनुसार यह त्रिभुज OAB का परिवृत्त है।

प्र.14 दिखाओ आयत ही वह समांतर चतुर्भुज है जो वृत्त में बन सकता है।

उत्तर- समांतर चतुर्भुज में सम्मुख कोण बराबर होते हैं। चक्रीय चतुर्भुज में सम्मुख कोणों का योग 180° । इसलिए हर कोण $180^\circ \div 2 = 90^\circ$ । समकोण वाला समांतर चतुर्भुज **आयत** है।

प्र.15 वृत्त में आयत: विकर्णों का कटान बिंदु केंद्र है।

उत्तर- आयत का हर कोण 90° है, इसलिए हर विकर्ण 90° कोण देखता है, यानी वह **व्यास** है (अर्धवृत्त वाले नतीजे का विलोम)। दो व्यास **केंद्र** पर मिलते हैं।

प्र.16 एक निश्चित लंबाई की सब जीवाओं के मध्य बिंदुओं का आकार?

उत्तर- प्रमेय 6 से ऐसी सब जीवाएँ केंद्र से एक ही दूरी d पर हैं। इसलिए सब मध्य बिंदु O से दूरी d पर हैं। वे **उसी केंद्र वाला वृत्त** (संकेंद्रिक) बनाते हैं, त्रिज्या d।

प्र.17 जीवाएँ $AB = AC$ । दिखाओ केंद्र $\angle BAC$ के समद्विभाजक पर हैं।

उत्तर- OA, OB, OC जोड़ो। $OA = OA$ (उभयनिष्ठ), $OB = OC$ (त्रिज्या), $AB = AC$ (दिया)।

SSS से $\triangle OAB \cong \triangle OAC$ । इसलिए $\angle OAB = \angle OAC$, और AO कोण $\angle BAC$ को समद्विभाजित करता है। केंद्र **समद्विभाजक पर हैं**।

प्र.18 समांतर जीवाएँ 10 और 24, एक ही ओर, 7 सेमी दूर। त्रिज्या?

उत्तर- आधी जीवाएँ: 5 और 12। दूरियाँ: $\sqrt{r^2 - 25}$ और $\sqrt{r^2 - 144}$ । एक ही ओर हैं, इसलिए अंतर 7।

$$r = 13 \text{ आज़माओ: } \sqrt{169 - 25} = 12 \text{ और } \sqrt{169 - 144} = 5 \mid 12 - 5 = 7 \checkmark$$

अतः **$r = 13$ सेमी**।

प्र.19 त्रिज्या r के वृत्त में सम षट्भुज।

उत्तर- हर केंद्रीय कोण $= 360^\circ \div 6 = 60^\circ$ । त्रिभुज समबाहु है, इसलिए **भुजा $= r$** ।

भुजा की केंद्र से दूरी $=$ उस त्रिभुज की ऊँचाई $= (\sqrt{3}/2) \times r$ ।

प्र.20 $MNOP$ वृत्त में, MN व्यास। $\angle MOP$ और $\angle MNP$?

उत्तर- दोनों वृत्त के बिंदुओं (O और N , MP के एक ही तरफ) से चाप MP को देखते हैं। इसलिए **$\angle MOP = \angle MNP$** ।

प्र.21 चक्रीय चतुर्भुज का बाह्य कोण $=$ सम्मुख अंतः कोण।

उत्तर- $\angle CDE + \angle CDA = 180^\circ$ (सीधी रेखा)। $\angle ABC + \angle CDA = 180^\circ$ (चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण)। इसलिए **$\angle CDE = \angle ABC$** ।

प्र.22 कोई जीवा व्यास से लंबी नहीं होती।

उत्तर- जीवा AB के लिए $OA + OB = 2r$ (व्यास)। त्रिभुज OAB में $AB < OA + OB$ (त्रिभुज असमिका), जब तक A, O, B एक रेखा में न हों। इसलिए **$AB \leq 2r$** ।

प्र.23 भीतरी बिंदु A से जाने वाली सबसे छोटी जीवा OA पर लंब होती है।

उत्तर- जीवा की लंबाई $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$, d केंद्र से दूरी है। सबसे छोटी जीवा के लिए d सबसे बड़ा चाहिए। A से जाने वाली जीवा के लिए d, OA से ज्यादा नहीं हो सकता, और ठीक OA तब होता है जब जीवा **OA पर लंब** हो। इसलिए वही जीवा सबसे छोटी है।

प्र.24 चित्र 5.30 से सिद्ध करो कि अर्धवृत्त में कोण 90° होता है।

उत्तर- AB व्यास, O केंद्र, C वृत्त पर। $OA = OC = OB$, इसलिए त्रिभुज OAC और OBC समद्विबाहु हैं। उनके आधार कोण a और b हैं।

त्रिभुज ABC के कोण: $a + (a + b) + b = 180^\circ$, तो $2(a + b) = 180^\circ$, यानी $a + b = 90^\circ$ । C पर कोण $a + b = 90^\circ$ ।

प्र.25 जीवाएँ CC' और DD' व्यास AB पर लंब। MM' जीवाओं CD और C'D' के मध्य बिंदु जोड़ता है। सिद्ध करो $MM' \perp AB$ ।

उत्तर- AB सममिति (परावर्तन) की रेखा है। C' बिंदु C का और D' बिंदु D का प्रतिबिंब है। इसलिए C'D' का मध्य बिंदु M', CD के मध्य बिंदु M का प्रतिबिंब है। MM' एक बिंदु को उसके प्रतिबिंब से जोड़ती है, इसलिए यह दर्पण AB पर लंब है।

प्र.26 चित्र से सिद्ध करो चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योग 180° ।

उत्तर- केंद्र O को चारों शीर्षों से जोड़ो। चार समद्विबाहु त्रिभुज बनते हैं। उनके आधार कोण x_1, x_2, x_3, x_4 मानो।

चतुर्भुज का हर कोण दो आधार कोणों का योग है। चारों त्रिभुजों के कोणों का योग: $2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 360^\circ = 4 \times 180^\circ = 720^\circ$ । इसलिए $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 180^\circ$ ।

सम्मुख कोण चारों x इस्तेमाल करते हैं, इसलिए उनका योग 180° है।

शिक्षक की बात: अध्याय सार: (1) केंद्र से जीवा पर लंब जीवा को समद्विभाजित करता है। (2) समान जीवाएँ: केंद्र पर समान कोण और केंद्र से समान दूरी। (3) केंद्रीय कोण = $2 \times$ परिधि कोण। (4) अर्धवृत्त में कोण = 90° । (5) चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण = 180° ।