

4.1 What is an identity? A surprising pattern first

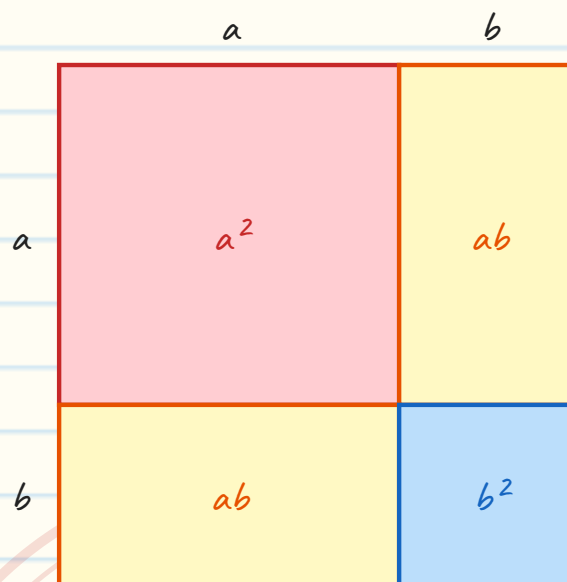
Take three consecutive square numbers, like 1, 4, 9. Add the smallest and the biggest: $1 + 9 = 10$. Subtract **twice the middle one**: $10 - 2 \times 4 = 2$. Try 9, 16, 25: $(9 + 25) - 2 \times 16 = 34 - 32 = 2$. Try 25, 36, 49: $74 - 72 = 2$. Always 2! Is it magic? No, it is **algebra**, and by the end of this section you will prove it yourself.

An **algebraic identity** is an equation that is true for **every** value of the letters in it. An ordinary **equation** is true only for some values. Example: $x^2 - 1 = 24$ is true only for $x = 5$ or $x = -5$, so it is an **equation**. But $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ is true for **all** x and y , so it is an **identity**.

Teacher's Note: Test to remember: put any two or three random numbers in both sides. If both sides always match, it is an identity. If they match only for special numbers, it is just an equation.

4.2 Seeing $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Make a big square of side $(a + b)$. Cut it into 4 parts: one square of side a (area a^2), one square of side b (area b^2), and two rectangles a by b (area ab each). Add the parts and you get the whole:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

But a picture only proves it when a and b are lengths (positive). Is it true for negative numbers or fractions? **Check:** $a = -2$, $b = -3$. $(a + b)^2 = (-5)^2 = 25$. And $a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$ ✓. For $a = -2/3$, $b = 3/4$: $(a + b) = 1/12$, so $(a + b)^2 = 1/144$. Right side: $4/9 - 1 + 9/16 = (64 - 144 + 81)/144 = 1/144$ ✓. To be sure for **all** numbers, use the distributive law:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Careful! Very common mistake: $(a + b)^2$ is **not** $a^2 + b^2$. Forgetting the middle term **2ab** is the number one error in algebra. Example: $(10 + 2)^2 = 144$, but $10^2 + 2^2 = 104$. The missing 40 is exactly $2ab = 2 \times 10 \times 2$.

Think! Which is bigger, $(a + b)^2$ or $a^2 + b^2$? The difference is $2ab$. If a and b have the **same sign** ($ab > 0$), $(a + b)^2$ is bigger. If they have **opposite signs** ($ab < 0$), $(a + b)^2$ is smaller. If $a = 0$ or $b = 0$ ($ab = 0$), both are equal.

Using it: expand and calculate

Example 3: Expand $(5x + 2y)^2$

Step 1: Here $a = 5x$ and $b = 2y$.

Step 2: $(5x)^2 = 25x^2$. $2 \times (5x) \times (2y) = 20xy$. $(2y)^2 = 4y^2$.

Step 3: Answer: $25x^2 + 20xy + 4y^2$.

Example 4: Find 43^2

Step 1: Break $43 = 40 + 3$.

Step 2: $(40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$.

Exercise Set 4.1 (solved)

Q.1 (i) $(7x + 4y)^2$

Ans. $a = 7x$, $b = 4y$. $49x^2 + 2(7x)(4y) + 16y^2 = 49x^2 + 56xy + 16y^2$.

(ii) $(7x/5 + 3y/2)^2$

Ans. $(7x/5)^2 = 49x^2/25$; $2 \times (7x/5) \times (3y/2) = 21xy/5$; $(3y/2)^2 = 9y^2/4$.

Answer: $49x^2/25 + 21xy/5 + 9y^2/4$.

(iii) $(2.5p + 1.5q)^2$

Ans. $6.25p^2 + 2(2.5)(1.5)pq + 2.25q^2 = 6.25p^2 + 7.5pq + 2.25q^2$.

(iv) $(3s/4 + 8t)^2$

Ans. $9s^2/16 + 2(3s/4)(8t) + 64t^2 = 9s^2/16 + 12st + 64t^2$.

(v) $(x + 1/(2y))^2$

Ans. $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1/(2y) + 1/(4y^2) = x^2 + x/y + 1/(4y^2)$.

$$(vi) (1/x + 1/y)^2$$

$$\text{Ans. } 1/x^2 + 2/(xy) + 1/y^2.$$

$$Q.2 \text{ Find: (i) } 64^2 \text{ (ii) } 105^2 \text{ (iii) } 205^2$$

$$\text{Ans. (i) } (60 + 4)^2 = 3600 + 480 + 16 = 4096.$$

$$(ii) (100 + 5)^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025.$$

$$(iii) (200 + 5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025.$$

4.3 Factorisation using identities

The identity works **backwards** too. If you see an expression that looks like $a^2 + 2ab + b^2$, you can write it as $(a + b)^2$. That gives you its factors. Check three things: first and last terms are **perfect squares**, and the middle term is $2 \times (\text{root of first}) \times (\text{root of last})$.

Example 5: Factor $x^2 + 4x + 4$

Step 1: $x^2 = (x)^2$, $4 = 2^2$, and $4x = 2 \times x \times 2$. It fits with $a = x$, $b = 2$.

Step 2: So $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$.

Example 6: Factor $36x^2 + 12x + 1$

Step 1: $36x^2 = (6x)^2$, $1 = 1^2$, and $12x = 2 \times 6x \times 1$. Fits with $a = 6x$, $b = 1$.

Step 2: So $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$.

Example 7: Factor $50p^2 + 60pq + 18q^2$

Step 1: 50 is not a perfect square. First take out the common factor **2**:

$$2(25p^2 + 30pq + 9q^2).$$

Step 2: $25p^2 = (5p)^2$, $9q^2 = (3q)^2$, and $30pq = 2 \times 5p \times 3q \checkmark$.

Step 3: So the answer is $2(5p + 3q)^2$.

Teacher's Note: Always take out a **common factor first**. It often turns a hard-looking expression into a perfect square.

Its twin: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Replace b by $-b$ in $(a + b)^2$. The middle term becomes negative: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Picture: from a big square of side a , remove the two rectangles of area ab and add back the small b^2 that was removed twice.

Example 8: Find 29^2

Step 1: $29 = 30 - 1$. $(30 - 1)^2 = 900 - 2 \times 30 \times 1 + 1 = 900 - 60 + 1 = 841$.

Proof of the pattern from the start

Step 1: Three consecutive numbers: $n - 1, n, n + 1$. Squares: $(n - 1)^2, n^2, (n + 1)^2$.

Step 2: $(n - 1)^2 + (n + 1)^2 = (n^2 - 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 2$.

Step 3: Subtract twice the middle square, $2n^2$: $2n^2 + 2 - 2n^2 = 2$. Always 2, for every n !

Think! Try 4 consecutive squares: $n^2, (n + 1)^2, (n + 2)^2, (n + 3)^2$. Then $(n + 3)^2 - 3(n + 2)^2 + 3(n + 1)^2 - n^2 = 0$. Another beautiful pattern.

Exercise Set 4.2 (solved)

Q.1 (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

Ans. $(3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$. So $(3x + 4y)^2$.

(ii) $4s^2 + 20st + 25t^2$

Ans. $(2s)^2 + 2(2s)(5t) + (5t)^2$. So $(2s + 5t)^2$.

(iii) $49x^2 + 28xy + 4y^2$

Ans. $(7x)^2 + 2(7x)(2y) + (2y)^2$. So $(7x + 2y)^2$.

(iv) $64p^2 + (32/3)pq + (4/9)q^2$

Ans. $(8p)^2 + 2(8p)(2q/3) + (2q/3)^2$. The middle: $2 \times 8p \times 2q/3 = 32pq/3$ ✓.
So $(8p + 2q/3)^2$.

$$(v) 3a^2 + 4ab + (4/3)b^2$$

Ans. Take out 3: $3(a^2 + (4/3)ab + (4/9)b^2) = 3(a + 2b/3)^2$. Check middle: $2 \times a \times 2b/3 = 4ab/3 \checkmark$. So $3(a + 2b/3)^2$.

$$(vi) (9/5)s^2 + 6sv + 5v^2$$

Ans. Take out $1/5$: $(1/5)(9s^2 + 30sv + 25v^2) = (1/5)(3s + 5v)^2$. Check: $2 \times 3s \times 5v = 30sv \checkmark$. So $(1/5)(3s + 5v)^2$.

Q.2 Using $(a - b)^2$, find: (i) 79^2 (ii) 193^2 (iii) 299^2

Ans. (i) $(80 - 1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6241$.

(ii) $(200 - 7)^2 = 40000 - 2800 + 49 = 37249$.

(iii) $(300 - 1)^2 = 90000 - 600 + 1 = 89401$.

4.4 More identities: $(a + b + c)^2$

Let $d = b + c$. Then $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$. Put d back: $a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$. Neat way to remember:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

Picture: a big square of side $(a + b + c)$ cut into **3 squares** (a^2, b^2, c^2) and **6 rectangles** (two each of ab, bc, ca). Memory trick: **square of each one + twice the product of each pair**.

Example 9: Find 119^2

Step 1: $119 = 100 + 10 + 9$.

Step 2: $100^2 + 10^2 + 9^2 + 2(100)(10) + 2(100)(9) + 2(10)(9) = 10000 + 100 + 81 + 2000 + 1800 + 180 = 14161$.

#	Identity
1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

Exercise Set 4.3 (solved)

Q.1 Find squares: (i) 117^2 (ii) 78^2 (iii) 198^2 (iv) 214^2 (v) 1104^2 (vi) 1120^2

Ans. Use $(a + b)^2$ when the number is a little above a round number, $(a - b)^2$ when a little below.

$$(i) (100 + 17)^2 = 10000 + 3400 + 289 = 13689.$$

$$(ii) (80 - 2)^2 = 6400 - 320 + 4 = 6084.$$

$$(iii) (200 - 2)^2 = 40000 - 800 + 4 = 39204.$$

$$(iv) (200 + 14)^2 = 40000 + 5600 + 196 = 45796.$$

$$(v) (1100 + 4)^2 = 1210000 + 8800 + 16 = 1218816.$$

$$(vi) (1100 + 20)^2 = 1210000 + 44000 + 400 = 1254400.$$

Q.2 Factor: (i) $16y^2 - 24y + 9$

Ans. $(4y)^2 - 2(4y)(3) + 3^2 = (4y - 3)^2.$

(ii) $(9/4)s^2 + 6st + 4t^2$

Ans. $(3s/2)^2 + 2(3s/2)(2t) + (2t)^2$. Middle: $2 \times 3s/2 \times 2t = 6st \checkmark$. So $(3s/2 + 2t)^2.$

(iii) $m^2/9 + mk/3 + k^2/4 + 3nk + 2mn + 9n^2$

Ans. Take $a = m/3$, $b = k/2$, $c = 3n$. Then $2ab = mk/3 \checkmark$, $2bc = 3nk \checkmark$, $2ac = 2mn \checkmark$. So $(m/3 + k/2 + 3n)^2.$

(iv) $p^2/16 - 2 + 16/p^2$

Ans. $(p/4)^2 - 2 \times (p/4) \times (4/p) + (4/p)^2$. Middle: $2 \times p/4 \times 4/p = 2 \checkmark$. So $(p/4 - 4/p)^2$.

(v) $9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$

Ans. Take $3a, -2b, c$. $2(3a)(-2b) = -12ab \checkmark$, $2(3a)(c) = 6ac \checkmark$, $2(-2b)(c) = -4bc \checkmark$. So $(3a - 2b + c)^2$.

Q.3 Expand: (i) $(p + 3q + 7r)^2$

Ans. $p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 2(p)(3q) + 2(3q)(7r) + 2(7r)(p) = p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 6pq + 42qr + 14pr$.

(ii) $(3x - 2y + 4z)^2$

Ans. $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 2(3x)(-2y) + 2(-2y)(4z) + 2(4z)(3x) = 9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$.

Q.4 Is $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ an identity?

Ans. Expand each: $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$; $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$; $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$. Add: $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$. This is **not** $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$. Quick test: $a = b = c = 1$ gives $1 + 1 + 1 = 3$ on the left but 6 on the right. So it is **not an identity**.

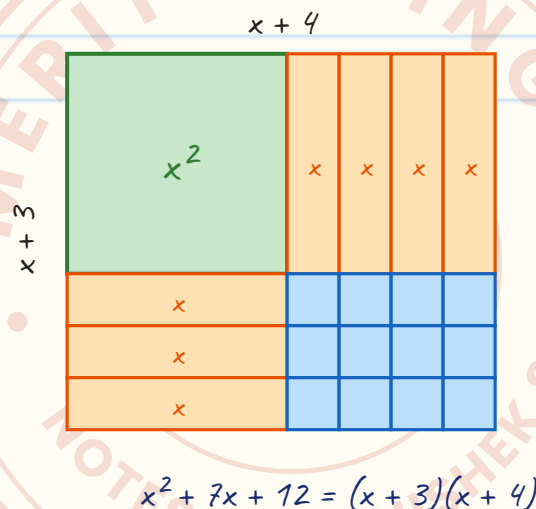
Śhrīdharāchārya's trick: $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$

You know $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Move b^2 to the other side: $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$. In 750 CE, Śhrīdharāchārya used this to square numbers quickly. Example: $55^2 = (55 + 5)(55 - 5) + 5^2 = 60 \times 50 + 25 = 3000 + 25 = 3025$.

Think! Try $35^2 = 40 \times 30 + 25 = 1225$. $65^2 = 70 \times 60 + 25 = 4225$. $85^2 = 90 \times 80 + 25 = 7225$. $105^2 = 110 \times 100 + 25 = 11025$. Pattern: for a number ending in 5, take the tens part n , compute $n \times (n + 1)$, then write **25** after it. 35: $3 \times 4 = 12$, so 1225. 85: $8 \times 9 = 72$, so 7225.

4.5 Factorisation with algebra tiles: $x^2 + 7x + 12$

Algebra tiles are like Lego for algebra. A big square is x^2 , a long strip is x , a small square is **1**. Multiply $(x + 3)(x + 4)$ as a rectangle with sides $x + 3$ and $x + 4$:



Count the tiles: **1** big square (x^2), **7** strips ($3 + 4 = 7x$), **12** small squares (3×4). So $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$. Read it backwards and you have **factorised** $x^2 + 7x + 12$. The $7x$ was split as **$3x + 4x$** .

Think! Can $7x$ be split as $2x + 5x$? Then the tiles do not form a neat rectangle (the 12 units cannot fill a 2 by 5 corner). The split must satisfy **two** conditions at once: the numbers add to 7 and multiply to 12.

General rule: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

Check: $(x + 6)(x + 7) = x^2 + 13x + 42$. And for $(px + a)(qx + b) = pq x^2 + (pb + qa)x + ab$. Example: $(2x + 3)(3x + 1) = 6x^2 + 2x + 9x + 3 = 6x^2 + 11x + 3$.

4.6 Factorising without tiles: the sum-product method

To factor $x^2 + Sx + P$, find two numbers whose **sum is S** and **product is P** . Then it is $(x + a)(x + b)$.

Example 10: $x^2 + 7x + 12$

Step 1: Need sum 7, product 12. Factors of 12: $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$. Only $3 + 4 = 7$.

Step 2: So $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$.

Example 11: $x^2 + 11x + 30$

Step 1: Need sum 11, product 30. $2 \cdot 15$ (sum 17) no. $3 \cdot 10$ (13) no. $5 \cdot 6$ (11) yes.

Step 2: Split $11x = 5x + 6x$: $(x + 5)(x + 6)$.

Example 12: $x^2 - 5x + 6$

Step 1: Product +6 and sum -5, so both numbers are **negative**: -2 and -3.

Step 2: $(x - 2)(x - 3)$.

Teacher's Note: Sign guide for $x^2 + Sx + P$: **P positive** $\rightarrow$ both numbers have the same sign as S . **P negative** $\rightarrow$ one is positive, one negative; the bigger one takes the sign of S .

Exercise Set 4.4 (solved)

Q.1 (i) $s^2 - 11s + 24 = (---)(---)$

Ans. Sum -11, product 24: -3 and -8. $(s - 3)(s - 8)$.

(ii) $(\quad)(x + 1) = 3x^2 - 4x - 7$

Ans. $3x^2 - 4x - 7$: divide by $(x + 1)$. $3x^2 - 7x + 3x - 7 = x(3x - 7) + 1(3x - 7) = (3x - 7)(x + 1)$. The blank is $(3x - 7)$.

(iii) $10x^2 - 11x - 6 = (2x - \quad)(\quad + 2)$

Ans. Try $(2x - 3)(5x + 2) = 10x^2 + 4x - 15x - 6 = 10x^2 - 11x - 6 \checkmark$.
Blanks: 3 and $5x$.

(iv) $6x^2 + 7x + 2$

Ans. Multiply $6 \times 2 = 12$; need numbers with sum 7 and product 12 : 3 and 4 .
Split: $6x^2 + 3x + 4x + 2 = 3x(2x + 1) + 2(2x + 1) = (2x + 1)(3x + 2)$.

Q.2 Use an identity (no direct multiplication): (i) 41^2 (ii) 27^2 (iii) 23×17
(iv) 135^2 (v) 97^2 (vi) 18×29 (vii) 34×43 (viii) 205^2

Ans. (i) $(40 + 1)^2 = 1600 + 80 + 1 = 1681$.

(ii) $(30 - 3)^2 = 900 - 180 + 9 = 729$.

(iii) $(20 + 3)(20 - 3) = 400 - 9 = 391$.

(iv) Shridharāchārya: $(135 + 5)(135 - 5) + 25 = 140 \times 130 + 25 = 18200 + 25 = 18225$.

(v) $(100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$.

(vi) $(20 - 2)(20 + 9) = 400 + 7 \times 20 - 18 = 400 + 140 - 18 = 522$.

(vii) $(40 - 6)(40 + 3) = 1600 - 3 \times 40 - 18 = 1600 - 120 - 18 = 1462$.

(viii) $(200 + 5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025$.

Q.3 Factor: (i) $9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab + 12ac - 4bc$

Ans. Take $3a, -b, 2c$: $2(3a)(-b) = -6ab \checkmark$, $2(3a)(2c) = 12ac \checkmark$, $2(-b)(2c) = -4bc \checkmark$. So $(3a - b + 2c)^2$.

(ii) $16s^2 + 25t^2 - 40st$

Ans. $(4s)^2 - 2(4s)(5t) + (5t)^2 = (4s - 5t)^2$.

(iii) $r^2 - r - 42$

Ans. Sum -1 , product -42 : -7 and 6 . $(r - 7)(r + 6)$.

(iv) $49g^2 + 14gh + h^2$

Ans. $(7g)^2 + 2(7g)(h) + h^2 = (7g + h)^2$.

(v) $64u^2 + 121v^2 + 4w^2 - 176uv - 32uw + 44vw$

Ans. Take $8u$, $-11v$, $-2w$. $2(8u)(-11v) = -176uv$ ✓, $2(8u)(-2w) = -32uw$ ✓, $2(-11v)(-2w) = 44vw$ ✓. So $(8u - 11v - 2w)^2$.

Think! James: $(a - b)^2(a + b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$. Reshma: $(a - b)^2(a + b) = (a - b)[(a - b)(a + b)] = (a - b)(a^2 - b^2)$. **Both are correct.** They only use different identities first, and both finish with $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$.

4.7 Finding new identities: cubes

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Picture: a cube of edge $(a + b)$ breaks into **2 cubes** (a^3 and b^3) and **6 cuboids** (3 of $a \times a \times b$ and 3 of $a \times b \times b$). Replace b by $-b$: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (signs alternate $+ - + -$).

Example 13: Side of a cube with volume $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$

Step 1: Compare with $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: $a = p$, $b = 2q$. Check: $3p^2(2q) = 6p^2q$ ✓, $3p(2q)^2 = 12pq^2$ ✓, $(2q)^3 = 8q^3$ ✓.

Step 2: Side = $p + 2q$.

Example 14: Write $8n^3 - 60n^2m + 150nm^2 - 125m^3$ as $(a - b)^3$

Step 1: $8n^3 = (2n)^3$, $125m^3 = (5m)^3$, so $a = 2n$, $b = 5m$. Check: $3(2n)^2(5m) = 60n^2m$ ✓, $3(2n)(5m)^2 = 150nm^2$ ✓.

Step 2: So $(2n - 5m)^3$, with $a = 2n$ and $b = 5m$.

Two more: the difference and sum of cubes

- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$. Proof: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$ (middle terms cancel).
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$. Just change the signs: it is the same identity with y replaced by $-y$.

Think! $x - y$ is a factor of $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$, and also $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$, and $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$. In fact $x - y$ divides $x^n - y^n$ for every n .

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Example 15: $x + y + z = 10$, $xyz = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 38$. Find $x^3 + y^3 + z^3$

Step 1: First find $xy + yz + zx$ using $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$: $100 = 38 + 2(xy + yz + zx)$, so $xy + yz + zx = 31$.

Step 2: Now $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)) = 10 \times (38 - 31) = 70$.

Step 3: So $x^3 + y^3 + z^3 = 70 + 3 \times 25 = 70 + 75 = 145$.

Identity	Name
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	cube of sum
$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	cube of difference
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	difference of cubes
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	sum of cubes
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(\dots)$	three cubes

4.8 Simplifying rational expressions

A rational expression is a fraction of two polynomials. To simplify: **factorise the top and the bottom, then cancel the common factors** (the cancelled factor must not be zero).

Example 16: Simplify $(x^2 - 7x + 12)/(5x^2 + 5x - 100)$

Step 1: Top: sum -7, product 12: -3 and -4, so $(x - 3)(x - 4)$.

Step 2: Bottom: take 5 out: $5(x^2 + x - 20)$. Sum 1, product -20: 5 and -4, so $5(x + 5)(x - 4)$.

Step 3: Cancel $(x - 4)$: $(x - 3)/(5(x + 5))$.

Think! $(36s^2 - 12st + t^2)/(t^2 + 2ts - 48s^2)$: top = $(6s - t)^2 = (t - 6s)^2$.

Bottom: sum 2s, product $-48s^2$: $8s$ and $-6s$, so $(t + 8s)(t - 6s)$. Cancel $(t - 6s)$: $(t - 6s)/(t + 8s)$.

Exercise Set 4.5 (solved)

Q.1 (i) $(3p^2 - 3pq - 18q^2)/(p^2 + 3pq - 10q^2)$

Ans. Top: $3(p^2 - pq - 6q^2) = 3(p - 3q)(p + 2q)$. Bottom: $(p + 5q)(p - 2q)$.

Nothing cancels: $3(p - 3q)(p + 2q) / ((p + 5q)(p - 2q))$.

(ii) $(n^3 - 3n^2m + 3nm^2 - m^3)/(5m^2 - 10mn + 5n^2)$

Ans. Top = $(n - m)^3$. Bottom = $5(m^2 - 2mn + n^2) = 5(n - m)^2$. So $(n - m)/5$.

(iii) $(w^3 - v^3 + x^3 + 3wvx)/(w^2 + v^2 + x^2 - 2wv - 2vx + 2wx)$

Ans. Use $a = w$, $b = -v$, $c = x$ in the three-cubes identity: top = $(w - v + x)(w^2 + v^2 + x^2 + wv + vx - wx)$. Bottom = $(w - v + x)^2$. Cancel: $(w^2 + v^2 + x^2 + wv + vx - wx)/(w - v + x)$.

(iv) $(4y^2 - 20yz + 25z^2)/(25z^2 - 4y^2)$

Ans. Top = $(2y - 5z)^2 = (5z - 2y)^2$. Bottom = $(5z - 2y)(5z + 2y)$. Cancel: $(5z - 2y)/(5z + 2y)$.

(v) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 7x + 12) / ((x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9))$

Ans. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$. $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$. $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$. Every factor cancels, so the answer is 1.

(vi) $(p^4 - 16)/(p^2 - 4p + 4)$

Ans. $p^4 - 16 = (p^2 - 4)(p^2 + 4) = (p - 2)(p + 2)(p^2 + 4)$. Bottom $= (p - 2)^2$. Cancel one $(p - 2)$: $(p + 2)(p^2 + 4)/(p - 2)$.

Example 17: Saira's rectangle: one $x \times x$ square, 8 strips $x \times 1$, 15 unit squares

Step 1: Total area $= x^2 + 8x + 15$.

Step 2: Need sum 8, product 15: 3 and 5. So area $= (x + 3)(x + 5)$.

Step 3: Length $x + 5$ units, breadth $x + 3$ units.

Example 18: Pool with breadth 4 m less than length, area 96 m^2

Step 1: Length x , breadth $x - 4$. $x(x - 4) = 96$, so $x^2 - 4x - 96 = 0$.

Step 2: Need sum -4 , product -96 : -12 and 8 . $x^2 - 12x + 8x - 96 = x(x - 12) + 8(x - 12) = (x - 12)(x + 8) = 0$.

Step 3: $x = 12$ or $x = -8$. A length cannot be negative, so length $= 12 \text{ m}$, breadth $= 8 \text{ m}$.

End-of-Chapter Exercises (solved)

Q.1 Products: (i) $(-3x + 4)^2$ (ii) $(2s + 7)(2s - 7)$

Ans. (i) $9x^2 - 24x + 16$. (ii) $(2s)^2 - 7^2 = 4s^2 - 49$.

(iii) $(p^2 + 1/2)(p^2 - 1/2)$ (iv) $(2n + 7)(2n - 7)$

Ans. (iii) $p^4 - 1/4$. (iv) $4n^2 - 49$.

(v) $(s - 2t)(s^2 + 2st + 4t^2)$ (vi) $(1/(2r) - 4r)^2$

Ans. (v) $a^3 - b^3$ with $a = s$, $b = 2t$: $s^3 - 8t^3$.

$$(vi) \frac{1}{(4r^2)} - 2 \times \left(\frac{1}{(2r)}\right) \times 4r + 16r^2 = \frac{1}{(4r^2)} - 4 + 16r^2.$$

$$(vii) (-3m + 4k - 1)^2$$

$$Ans. 9m^2 + 16k^2 + 1 + 2(-3m)(4k) + 2(4k)(-1) + 2(-1)(-3m) = 9m^2 + 16k^2 + 1 - 24mk - 8k + 6m.$$

$$(viii) (x - y/3)^3 (ix) (7k/2 - 2m/3)^3$$

$$Ans. (viii) x^3 - 3x^2(y/3) + 3x(y/3)^2 - (y/3)^3 = x^3 - x^2y + xy^2/3 - y^3/27.$$

$$(ix) (7k/2)^3 = 343k^3/8. 3(7k/2)^2(2m/3) = 3 \times 49k^2/4 \times 2m/3 = 49k^2m/2. 3(7k/2)(2m/3)^2 = 3 \times 7k/2 \times 4m^2/9 = 14km^2/3. (2m/3)^3 = 8m^3/27. Answer: 343k^3/8 - 49k^2m/2 + 14km^2/3 - 8m^3/27.$$

$$Q.2 Values: (i) 17 \times 21 (ii) 104 \times 96 (iii) 24 \times 16$$

$$Ans. (i) (19 - 2)(19 + 2) = 361 - 4 = 357. (ii) (100 + 4)(100 - 4) = 10000 - 16 = 9984. (iii) (20 + 4)(20 - 4) = 400 - 16 = 384.$$

$$(iv) 147^3 (v) 199^3 (vi) 127^3$$

$$Ans. (iv) (150 - 3)^3 = 3375000 - 3(22500)(3) + 3(150)(9) - 27 = 3375000 - 202500 + 4050 - 27 = 3176523.$$

$$(v) (200 - 1)^3 = 8000000 - 120000 + 600 - 1 = 7880599.$$

$$(vi) (130 - 3)^3 = 2197000 - 152100 + 3510 - 27 = 2048383.$$

$$(vii) (-107)^3 (viii) (-299)^3$$

$$Ans. (vii) -(100 + 7)^3 = -(1000000 + 210000 + 14700 + 343) = -1225043.$$

$$(viii) -(300 - 1)^3 = -(27000000 - 270000 + 900 - 1) = -26730899.$$

$$Q.3 Factor: (i) 4y^2 + 1 + 1/(16y^2) (ii) 9m^2 - 1/(25n^2)$$

$$Ans. (i) (2y)^2 + 2(2y)(1/(4y)) + (1/(4y))^2, middle = 1 \checkmark. So (2y + 1/(4y))^2.$$

$$(ii) (3m)^2 - (1/(5n))^2 = (3m - 1/(5n))(3m + 1/(5n)).$$

(iii) $27b^3 - 1/(64b^3)$

Ans. $(3b)^3 - (1/(4b))^3 = (3b - 1/(4b))(9b^2 + 3/4 + 1/(16b^2))$. (Middle: $3b \times 1/(4b) = 3/4$.)

(iv) $x^2 + 5x/6 + 1/6$

Ans. Sum $5/6$, product $1/6$: $1/2$ and $1/3$. $(x + 1/2)(x + 1/3)$.

(v) $27u^3 - 1/125 - 27u^2/5 + 9u/25$

Ans. $a = 3u$, $b = 1/5$. $3a^2b = 27u^2/5 \checkmark$, $3ab^2 = 9u/25 \checkmark$. So $(3u - 1/5)^3$.

(vi) $64y^3 + z^3/125$

Ans. $(4y)^3 + (z/5)^3 = (4y + z/5)(16y^2 - 4yz/5 + z^2/25)$.

(vii) $p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$

Ans. Three-cubes identity with $a = p$, $b = 3q$, $c = r$ ($3abc = 9pqr \checkmark$): $(p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr)$.

(viii) $9m^2 - 12m + 4$

Ans. $(3m)^2 - 2(3m)(2) + 2^2 = (3m - 2)^2$.

(ix) $9x^3 - (8/3)y^3 + z^3/3 + 6xyz$

Ans. Take out $1/3$: $(1/3)(27x^3 - 8y^3 + z^3 + 18xyz)$. Now $a = 3x$, $b = -2y$, $c = z$, and $-3abc = -3(3x)(-2y)(z) = 18xyz \checkmark$. So $(1/3)(3x - 2y + z)(9x^2 + 4y^2 + z^2 + 6xy + 2yz - 3xz)$.

(x) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xz + 36yz + 24xy$

Ans. **Careful:** a perfect square $(a + b + c)^2$ with $a = 2x$, $b = 3y$, $c = 6z$ needs the middle terms $12xy$, $24xz$ and $36yz$. As printed, the book has $24xy$ and $12xz$ swapped, so this exact expression is **not** a perfect square. The intended one, $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xy + 24xz + 36yz$, is $(2x + 3y + 6z)^2$.

(xi) $27u^3 - 1/216 - 9u^2/2 + u/4$

Ans. $a = 3u, b = 1/6$. $3a^2b = 3 \times 9u^2 \times 1/6 = 9u^2/2 \checkmark$, $3ab^2 = 3 \times 3u \times 1/36 = u/4 \checkmark$. So $(3u - 1/6)^3$.

Q.4 Simplify: (i) $(4x^2 + 4x + 1)/(4x^2 - 1)$

Ans. $(2x + 1)^2/((2x - 1)(2x + 1)) = (2x + 1)/(2x - 1)$.

(ii) $9(3a^3 - 24b^3)/(9a^2 - 36b^2)$

Ans. Top: $9 \times 3(a^3 - 8b^3) = 27(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$. Bottom: $9(a^2 - 4b^2) = 9(a - 2b)(a + 2b)$. Cancel 9 and $(a - 2b)$: $3(a^2 + 2ab + 4b^2)/(a + 2b)$.

(iii) $(s^3 + 12st^3)/(s^2 - 2st - 35t^2)$

Ans. Top: $(s + 5t)(s^2 - 5st + 25t^2)$. Bottom: sum -2, product -35: -7 and 5, so $(s - 7t)(s + 5t)$. Cancel: $(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$.

Q.5 Possible length and breadth: (i) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ (ii) $36s^2 - 49t^2$

Ans. (i) $(5a - 3b)^2$. Both sides $5a - 3b$ (it is a square).

(ii) $(6s)^2 - (7t)^2 = (6s + 7t)(6s - 7t)$. Length $6s + 7t$, breadth $6s - 7t$.

Q.6 Possible length, breadth, height: (i) $6a^2 - 24b^2$ (ii) $3ps^2 - 15ps + 12p$

Ans. (i) $6(a^2 - 4b^2) = 6(a + 2b)(a - 2b)$. Dimensions $6, (a + 2b), (a - 2b)$.

(ii) $3p(s^2 - 5s + 4) = 3p(s - 1)(s - 4)$. Dimensions $3p, (s - 1), (s - 4)$.

Q.7 A square playground of side 40 m has a path of width s m around it. Area of the path?

Ans. Path outside the field: outer square side = $40 + 2s$. Area of path = $(40 + 2s)^2 - 40^2 = 1600 + 160s + 4s^2 - 1600 = 4s^2 + 160s = 4s(s + 40) \text{ m}^2$.

Q.8 A number plus its reciprocal is $10/3$. Find the number.

Ans. $x + 1/x = 10/3$. Multiply by $3x$: $3x^2 + 3 = 10x$, so $3x^2 - 10x + 3 = 0$.

Split $-10x = -9x - x$: $3x(x - 3) - 1(x - 3) = (3x - 1)(x - 3) = 0$. So $x = 3$ or $x = 1/3$.

Q.9 Pool area $2x^2 + 7x + 3$ square hastas, width $2x + 1$. Find the length.

Ans. $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$ [check: $2x^2 + 6x + x + 3$ ✓]. Length = $x + 3$ hastas.

Q.10 $x - 2$ and $x - 1/2$ are factors of $px^2 + 5x + r$. Show $p = r$.

Ans. $px^2 + 5x + r = p(x - 2)(x - 1/2) = p(x^2 - 5x/2 + 1) = px^2 - (5p/2)x + p$.
Compare: coefficient of x : $5 = -5p/2$, so $p = -2$. Constant: $r = p$. So $r = p$ (both -2).

Q.11 $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 10$. Prove $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$.

Ans. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 25 - 20 = 5$. Then $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) = 5 \times (5 - 10) = -25$ ✓.

Q.12 Show $n^3 - n$ is divisible by 6 for every natural n .

Ans. $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, the product of **three consecutive numbers**. Among any three consecutive numbers, one is a multiple of 3, and at least one is even. So the product is divisible by 2 and 3, hence by 6.

Q.13 (i) $x^3 + y^3 - 12xy + 64$ when $x + y = -4$. (ii) $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$ when $x = 2y + 6$.

Ans. (i) Write $64 = 4^3$ and $12xy = 3 \times xy \times 4$, so the expression $= x^3 + y^3 + 4^3 - 3xy(4)$. With $z = 4$, $x + y + z = -4 + 4 = 0$, and when the sum is 0 the three-cubes identity gives $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$. **Value = 0**.

(ii) Write it as $x^3 + (-2y)^3 + (-6)^3 - 3(x)(-2y)(-6)$ [check: $-3 \times 12xy = -36xy \checkmark$]. Sum $x - 2y - 6 = 0$ (since $x = 2y + 6$). So the value is **0**.

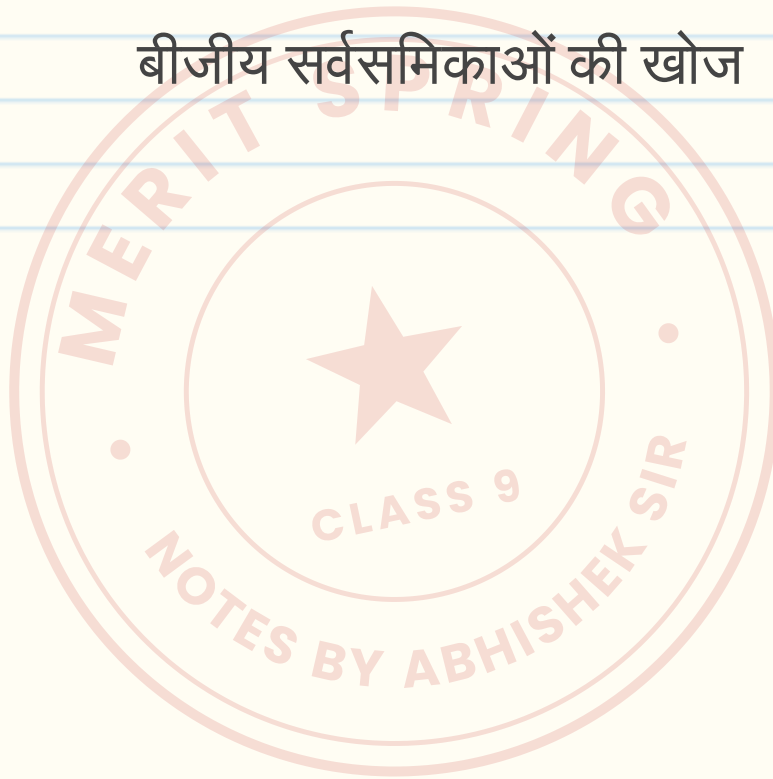
Quick Revision

- An **identity** is true for all values of the letters; an equation only for some.
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$.
- To factor $x^2 + Sx + P$: find two numbers with sum S and product P .
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$.
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$.
- To simplify a rational expression: factorise, cancel the common factor (not zero).

Teacher's Note: Do it yourself: Pick any two-digit number ending in 5, like 75. Find 75^2 using the Śhrīdharaċhārya trick ($7 \times 8 = 56$, then 25). Check with a calculator!

हिंदी संस्करण

बीजीय सर्वसमिकाओं की खोज



4.1 सर्वसमिका क्या हैं? पहले एक चौंकाने वाला पैटर्न

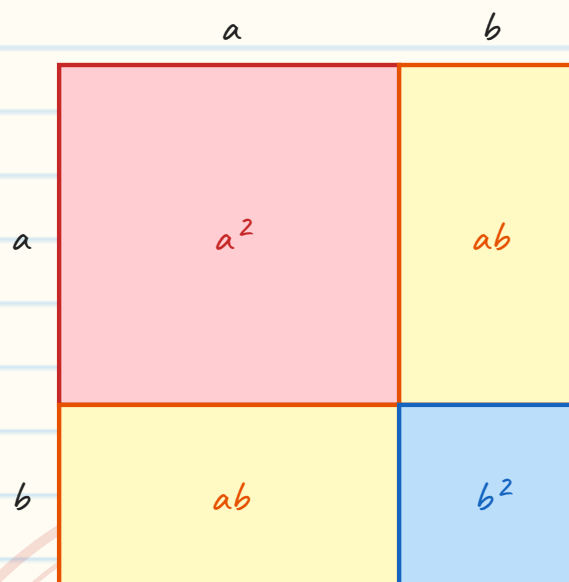
तीन क्रमागत वर्ग संख्याएँ लो, जैसे 1, 4, 9। सबसे छोटी और सबसे बड़ी जोड़ो: $1 + 9 = 10$ । अब बीच वाली का दोगुना घटाओ: $10 - 2 \times 4 = 2$ । 9, 16, 25 लो: $(9 + 25) - 2 \times 16 = 34 - 32 = 2$ । 25, 36, 49 लो: $74 - 72 = 2$ । हमेशा 2! क्या यह जादू है? नहीं, यह बीजगणित है, और इस भाग के अंत तक तुम इसे खुद सिद्ध कर लोगे।

बीजीय सर्वसमिका वह समीकरण है जो उसमें आए अक्षरों के **हर** मान के लिए सत्य हो। साधारण **समीकरण** केवल कुछ मानों के लिए सत्य होता है। उदाहरण: $x^2 - 1 = 24$ केवल $x = 5$ या $x = -5$ के लिए सत्य है, इसलिए यह **समीकरण** है। पर $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ **सभी** x और y के लिए सत्य है, इसलिए यह **सर्वसमिका** है।

शिक्षक की बात: याद रखने की जाँच: दोनों पक्षों में दो-तीन कोई भी संख्याएँ रखकर देखो। यदि दोनों पक्ष हमेशा बराबर आएँ तो सर्वसमिका है। यदि केवल खास संख्याओं पर बराबर आएँ तो केवल समीकरण है।

4.2 $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ को देखना

भुजा $(a + b)$ का एक बड़ा वर्ग बनाओ। उसे 4 भागों में काटो: भुजा a का एक वर्ग (क्षेत्रफल a^2), भुजा b का एक वर्ग (क्षेत्रफल b^2), और $a \times b$ के दो आयत (प्रत्येक का क्षेत्रफल ab)। भाग जोड़ने पर पूरा क्षेत्रफल मिलता है:



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

पर चित्र तभी प्रमाण है जब a और b लंबाईयाँ (धनात्मक) हों। क्या यह ऋणात्मक संख्याओं या भिन्नो के लिए भी सही है? **जाँच:** $a = -2, b = -3$ $(a + b)^2 = (-5)^2 = 25$ और $a^2 + 2ab + b^2 = 4 + 12 + 9 = 25$ ✓। $a = -2/3, b = 3/4$ के लिए: $(a + b) = 1/12$, अतः $(a + b)^2 = 1/144$ । दायाँ पक्ष: $4/9 - 1 + 9/16 = (64 - 144 + 81)/144 = 1/144$ ✓। **सभी** संख्याओं के लिए पक्का करने को वितरण नियम लगाओ:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

ध्यान रखो! बहुत आम गलती: $(a + b)^2$ का मान $a^2 + b^2$ नहीं है। बीच का पद $2ab$ भूल जाना बीजगणित की नंबर एक गलती है। उदाहरण: $(10 + 2)^2 = 144$, पर $10^2 + 2^2 = 104$ । छूटा हुआ 40 ठीक $2ab = 2 \times 10 \times 2$ है।

सोचो! $(a + b)^2$ और $a^2 + b^2$ में कौन बड़ा है? अंतर $2ab$ है। यदि a, b के चिह्न समान हैं ($ab > 0$) तो $(a + b)^2$ बड़ा है। यदि चिह्न विपरीत हैं ($ab < 0$) तो $(a + b)^2$ छोटा है। यदि $a = 0$ या $b = 0$ ($ab = 0$) तो दोनों बराबर हैं।

प्रयोग: प्रसार और गणना

उदाहरण 3: $(5x + 2y)^2$ का प्रसार करो

चरण 1: यहाँ $a = 5x$ और $b = 2y$ ।

चरण 2: $(5x)^2 = 25x^2$ | $2 \times (5x) \times (2y) = 20xy$ | $(2y)^2 = 4y^2$ ।

चरण 3: उत्तर: $25x^2 + 20xy + 4y^2$ ।

उदाहरण 4: 43^2 निकालो

चरण 1: $43 = 40 + 3$ लिखो।

चरण 2: $(40 + 3)^2 = 40^2 + 2 \times 40 \times 3 + 3^2 = 1600 + 240 + 9 = 1849$ ।

प्रश्नावली 4.1 (हल सहित)

प्र.1 (i) $(7x + 4y)^2$

उत्तर- $a = 7x, b = 4y$ | $49x^2 + 2(7x)(4y) + 16y^2 = 49x^2 + 56xy + 16y^2$ ।

(ii) $(7x/5 + 3y/2)^2$

उत्तर- $(7x/5)^2 = 49x^2/25$; $2 \times (7x/5) \times (3y/2) = 21xy/5$; $(3y/2)^2 = 9y^2/4$ । उत्तर: $49x^2/25 + 21xy/5 + 9y^2/4$ ।

(iii) $(2.5p + 1.5q)^2$

उत्तर- $6.25p^2 + 2(2.5)(1.5)pq + 2.25q^2 = 6.25p^2 + 7.5pq + 2.25q^2$ ।

(iv) $(3s/4 + 8t)^2$

उत्तर- $9s^2/16 + 2(3s/4)(8t) + 64t^2 = 9s^2/16 + 12st + 64t^2$ ।

(v) $(x + 1/(2y))^2$

उत्तर- $x^2 + 2 \cdot x \cdot 1/(2y) + 1/(4y^2) = x^2 + x/y + 1/(4y^2)$ ।

(vi) $(1/x + 1/y)^2$

उत्तर- $1/x^2 + 2/(xy) + 1/y^2$ ।

प्र.2 मान निकालो: (i) 64^2 (ii) 105^2 (iii) 205^2

उत्तर- (i) $(60 + 4)^2 = 3600 + 480 + 16 = 4096$ ।

(ii) $(100 + 5)^2 = 10000 + 1000 + 25 = 11025$ ।

(iii) $(200 + 5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025$ ।

4.3 सर्वसमिकाओं से गुणनखंडन

सर्वसमिका **उलटी दिशा** में भी काम करती है। यदि कोई व्यंजक $a^2 + 2ab + b^2$ जैसा दिखे तो उसे $(a + b)^2$ लिख सकते हो। इससे उसके गुणनखंड मिल जाते हैं। तीन बातें जाँचो: पहला और अंतिम पद **पूर्ण वर्ग** हैं, और बीच का पद **$2 \times$ (पहले का मूल) $\times$ (अंतिम का मूल)** है।

उदाहरण 5: $x^2 + 4x + 4$ के गुणनखंडचरण 1: $x^2 = (x)^2$, $4 = 2^2$, और $4x = 2 \times x \times 2$ । $a = x$, $b = 2$ के साथ ठीक बैठता है।चरण 2: अतः $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ ।**उदाहरण 6: $36x^2 + 12x + 1$ के गुणनखंड**चरण 1: $36x^2 = (6x)^2$, $1 = 1^2$, और $12x = 2 \times 6x \times 1$ । $a = 6x$, $b = 1$ से बैठता है।चरण 2: अतः $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$ ।**उदाहरण 7: $50p^2 + 60pq + 18q^2$ के गुणनखंड**चरण 1: 50 पूर्ण वर्ग नहीं है। पहले उभयनिष्ठ गुणनखंड **2** निकालो: $2(25p^2 + 30pq + 9q^2)$ ।चरण 2: $25p^2 = (5p)^2$, $9q^2 = (3q)^2$, और $30pq = 2 \times 5p \times 3q$ ✓।चरण 3: अतः उत्तर **$2(5p + 3q)^2$** है।

शिक्षक की बात: हमेशा पहले **उभयनिष्ठ गुणनखंड** निकालो। इससे कठिन दिखने वाला व्यंजक अक्सर पूर्ण वर्ग बन जाता है।

इसका जोड़ीदार: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^2$ में b की जगह $-b$ रखो। बीच का पद ऋणात्मक हो जाता है: **$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$** । चित्र: भुजा a के बड़े वर्ग में से ab क्षेत्रफल के दो आयत हटाओ और जो छोटा b^2 दो बार

हट गया था उसे वापस जोड़ो।

उदाहरण 8: 29^2 निकालो

चरण 1: $29 = 30 - 1$ $(30 - 1)^2 = 900 - 2 \times 30 \times 1 + 1 = 900 - 60 + 1 = 841$ ।

शुरुआती पैटर्न का प्रमाण

चरण 1: तीन क्रमागत संख्याएँ: $n - 1$, n , $n + 1$ उनके वर्ग: $(n - 1)^2$, n^2 , $(n + 1)^2$ ।

चरण 2: $(n - 1)^2 + (n + 1)^2 = (n^2 - 2n + 1) + (n^2 + 2n + 1) = 2n^2 + 2$ ।

चरण 3: बीच के वर्ग का दोगुना $2n^2$ घटाओ: $2n^2 + 2 - 2n^2 = 2$ । हर n के लिए हमेशा 2!

सोचो! 4 क्रमागत वर्ग लो: n^2 , $(n + 1)^2$, $(n + 2)^2$, $(n + 3)^2$ । तब $(n + 3)^2 - 3(n + 2)^2 + 3(n + 1)^2 - n^2 = 0$ । एक और सुंदर पैटर्न।

प्रश्नावली 4.2 (हल सहित)

प्र.1 (i) $9x^2 + 24xy + 16y^2$

उत्तर- $(3x)^2 + 2(3x)(4y) + (4y)^2$ अतः $(3x + 4y)^2$ ।

(ii) $4s^2 + 20st + 25t^2$

उत्तर- $(2s)^2 + 2(2s)(5t) + (5t)^2$ अतः $(2s + 5t)^2$ ।

(iii) $49x^2 + 28xy + 4y^2$

उत्तर- $(7x)^2 + 2(7x)(2y) + (2y)^2$ अतः $(7x + 2y)^2$ ।

(iv) $64p^2 + (32/3)pq + (4/9)q^2$

उत्तर- $(8p)^2 + 2(8p)(2q/3) + (2q/3)^2$ बीच: $2 \times 8p \times 2q/3 = 32pq/3$ ✓। अतः $(8p + 2q/3)^2$ ।

(v) $3a^2 + 4ab + (4/3)b^2$

उत्तर- 3 निकालो: $3(a^2 + (4/3)ab + (4/9)b^2) = 3(a + 2b/3)^2$ बीच जाँचो: $2 \times a \times 2b/3 = 4ab/3$ ✓। अतः $3(a + 2b/3)^2$ ।

(vi) $(9/5)s^2 + 6sv + 5v^2$

उत्तर- $1/5$ निकालो: $(1/5)(9s^2 + 30sv + 25v^2) = (1/5)(3s + 5v)^2$ जाँच: $2 \times 3s \times 5v = 30sv \checkmark$ अतः $(1/5)(3s + 5v)^2$ ।

प्र.2 $(a - b)^2$ से मान निकालो: (i) 79^2 (ii) 193^2 (iii) 299^2

उत्तर- (i) $(80 - 1)^2 = 6400 - 160 + 1 = 6241$ ।

(ii) $(200 - 7)^2 = 40000 - 2800 + 49 = 37249$ ।

(iii) $(300 - 1)^2 = 90000 - 600 + 1 = 89401$ ।

4.4 और सर्वसमिकाएँ: $(a + b + c)^2$

$d = b + c$ मानो। तब $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2$ । d वापस रखो: $a^2 + 2a(b + c) + (b + c)^2 = a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$ । याद रखने का सुंदर रूप:

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

चित्र: भुजा $(a + b + c)$ का बड़ा वर्ग **3 वर्गों** (a^2, b^2, c^2) और **6 आयतों** (ab, bc, ca के दो-दो) में कटा है। याद रखने की युक्ति: **हर एक का वर्ग + हर जोड़ी के गुणनफल का दोगुना** ।

उदाहरण 9: 119^2 निकालो

चरण 1: $119 = 100 + 10 + 9$

चरण 2: $100^2 + 10^2 + 9^2 + 2(100)(10) + 2(100)(9) + 2(10)(9) = 10000 + 100 + 81 + 2000 + 1800 + 180 = 14161$ ।

#	सर्वसमिका
1	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

प्रश्नावली 4.3 (हल सहित)**प्र.1** वर्ग निकालो: (i) 117^2 (ii) 78^2 (iii) 198^2 (iv) 214^2 (v) 1104^2 (vi) 1120^2 **उत्तर-** संख्या गोल संख्या से थोड़ी ऊपर हो तो $(a + b)^2$, थोड़ी नीचे हो तो $(a - b)^2$ लगाओ।

(i) $(100 + 17)^2 = 10000 + 3400 + 289 = 13689$ ।

(ii) $(80 - 2)^2 = 6400 - 320 + 4 = 6084$ ।

(iii) $(200 - 2)^2 = 40000 - 800 + 4 = 39204$ ।

(iv) $(200 + 14)^2 = 40000 + 5600 + 196 = 45796$ ।

(v) $(1100 + 4)^2 = 1210000 + 8800 + 16 = 1218816$ ।

(vi) $(1100 + 20)^2 = 1210000 + 44000 + 400 = 1254400$ ।

प्र.2 गुणनखंड: (i) $16y^2 - 24y + 9$ **उत्तर-** $(4y)^2 - 2(4y)(3) + 3^2 = (4y - 3)^2$ ।(ii) $(9/4)s^2 + 6st + 4t^2$ **उत्तर-** $(3s/2)^2 + 2(3s/2)(2t) + (2t)^2$ बीच: $2 \times 3s/2 \times 2t = 6st$ ✓ । अतः $(3s/2 + 2t)^2$ ।(iii) $m^2/9 + mk/3 + k^2/4 + 3nk + 2mn + 9n^2$ **उत्तर-** $a = m/3, b = k/2, c = 3n$ लो। तब $2ab = mk/3$ ✓, $2bc = 3nk$ ✓, $2ac = 2mn$ ✓ । अतः $(m/3 + k/2 + 3n)^2$ ।(iv) $p^2/16 - 2 + 16/p^2$ **उत्तर-** $(p/4)^2 - 2 \times (p/4) \times (4/p) + (4/p)^2$ बीच: $2 \times p/4 \times 4/p = 2$ ✓ । अतः $(p/4 - 4/p)^2$ ।(v) $9a^2 + 4b^2 + c^2 - 12ab + 6ac - 4bc$ **उत्तर-** $3a, -2b, c$ लो। $2(3a)(-2b) = -12ab$ ✓, $2(3a)(c) = 6ac$ ✓, $2(-2b)(c) = -4bc$ ✓ । अतः $(3a - 2b + c)^2$ ।

प्र.3 प्रसार करो: (i) $(p + 3q + 7r)^2$

उत्तर- $p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 2(p)(3q) + 2(3q)(7r) + 2(7r)(p) = p^2 + 9q^2 + 49r^2 + 6pq + 42qr + 14pr$ ।

(ii) $(3x - 2y + 4z)^2$

उत्तर- $9x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 2(3x)(-2y) + 2(-2y)(4z) + 2(4z)(3x) = 9x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 12xy - 16yz + 24xz$ ।

प्र.4 क्या $(a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (a - b - c)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ सर्वसमिका है?

उत्तर- हर एक का प्रसार: $(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$; $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$; $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$ । जोड़ने पर: $3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$ । यह $2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ नहीं है। झटपट जाँच: $a = b = c = 1$ पर बायाँ पक्ष $1 + 1 + 1 = 3$ है पर दायाँ 6। अतः यह सर्वसमिका नहीं है ।

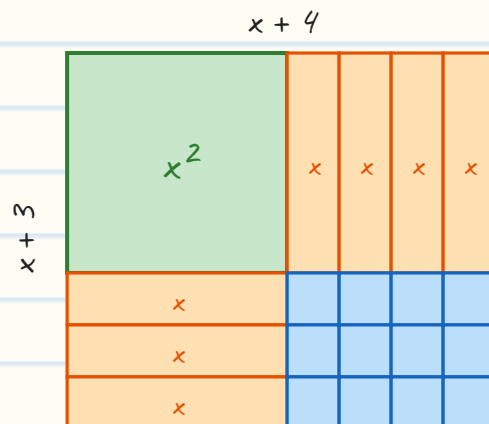
श्रीधराचार्य की युक्ति: $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$

तुम जानते हो $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ । b^2 को दूसरी ओर ले जाओ: $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ । 750 ई. में श्रीधराचार्य ने इससे संख्याओं के वर्ग जल्दी निकाले। उदाहरण: $55^2 = (55 + 5)(55 - 5) + 5^2 = 60 \times 50 + 25 = 3000 + 25 = 3025$ ।

सोचो! $35^2 = 40 \times 30 + 25 = 1225$ । $65^2 = 70 \times 60 + 25 = 4225$ । $85^2 = 90 \times 80 + 25 = 7225$ । $105^2 = 110 \times 100 + 25 = 11025$ । पैटर्न: जिस संख्या के अंत में 5 हो, उसका दहाई भाग n लो, $n \times (n + 1)$ निकालो और उसके आगे 25 लिख दो। 35 : $3 \times 4 = 12$, अतः 1225। 85 : $8 \times 9 = 72$, अतः 7225।

4.5 बीजगणित-टाइलों से गुणनखंडन: $x^2 + 7x + 12$

बीजगणित-टाइलें बीजगणित की लेगो हैं। बड़ा वर्ग x^2 है, लंबी पट्टी x है, छोटा वर्ग 1 है। भुजाओं $x + 3$ और $x + 4$ वाले आयत से $(x + 3)(x + 4)$ का गुणनफल बनाओ:



$$x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$$

टाइलें गिनो: **1** बड़ा वर्ग (x^2), **7** पट्टियाँ ($3 + 4 = 7x$), **12** छोटे वर्ग (3×4)। अतः $(x + 3)(x + 4) = x^2 + 7x + 12$ । इसे उलटा पढ़ो तो $x^2 + 7x + 12$ का **गुणनखंडन** हो गया। $7x$ को **$3x + 4x$** में तोड़ा गया।

सोचो! क्या $7x$ को $2x + 5x$ में तोड़ सकते हैं? तब टाइलें साफ आयत नहीं बनातीं (12 इकाइयाँ 2×5 के कोने को नहीं भर सकतीं)। तोड़ना **दो** शर्तें एक साथ पूरी करे: संख्याओं का योग 7 और गुणनफल 12 हो।

सामान्य नियम: $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

जाँच: $(x + 6)(x + 7) = x^2 + 13x + 42$ । और $(px + a)(qx + b) = pq x^2 + (pb + qa)x + ab$ । उदाहरण: $(2x + 3)(3x + 1) = 6x^2 + 2x + 9x + 3 = 6x^2 + 11x + 3$ ।

4.6 टाइलों के बिना गुणनखंडन: योग-गुणनफल विधि

$x^2 + Sx + P$ के गुणनखंड के लिए ऐसी दो संख्याएँ खोजो जिनका **योग S** और **गुणनफल P** हो। तब यह $(x + a)(x + b)$ होगा।

उदाहरण 10: $x^2 + 7x + 12$

चरण 1: योग 7 , गुणनफल 12 चाहिए। 12 के गुणनखंड: $1 \cdot 12$, $2 \cdot 6$, **$3 \cdot 4$** । केवल $3 + 4 = 7$ ।

चरण 2: अतः $x^2 + 7x + 12 = (x + 3)(x + 4)$ ।

उदाहरण 11: $x^2 + 11x + 30$

चरण 1: योग 11, गुणनफल 30। 2·15 (योग 17) नहीं। 3·10 (13) नहीं। **5·6** (11) हाँ।

चरण 2: $11x = 5x + 6x$ तोड़ो: **$(x + 5)(x + 6)$** ।

उदाहरण 12: $x^2 - 5x + 6$

चरण 1: गुणनफल +6 और योग -5, इसलिए दोनों संख्याएँ **ऋणात्मक** हैं: -2 और -3।

चरण 2: **$(x - 2)(x - 3)$** ।

शिक्षक की बात: चिह्न-मार्गदर्शिका $x^2 + Sx + P$ के लिए: **P धनात्मक** → दोनों संख्याओं का चिह्न S वाला। **P ऋणात्मक** → एक धनात्मक, एक ऋणात्मक; बड़ी संख्या S का चिह्न लेती है।

प्रश्नावली 4.4 (हल सहित)

प्र.1 (i) $s^2 - 11s + 24 = (---)(---)$

उत्तर- योग -11, गुणनफल 24: -3 और -8। **$(s - 3)(s - 8)$** ।

(ii) $(---)(x + 1) = 3x^2 - 4x - 7$

उत्तर- $3x^2 - 4x - 7$ को $(x + 1)$ से तोड़ो। $3x^2 - 7x + 3x - 7 = x(3x - 7) + 1(3x - 7)$
 $= (3x - 7)(x + 1)$ । रिक्त स्थान **$(3x - 7)$** है।

(iii) $10x^2 - 11x - 6 = (2x - ---)(--- + 2)$

उत्तर- $(2x - 3)(5x + 2) = 10x^2 + 4x - 15x - 6 = 10x^2 - 11x - 6$ ✓। रिक्त: **3** और **5x** ।

(iv) $6x^2 + 7x + 2$

उत्तर- $6 \times 2 = 12$; योग 7 और गुणनफल 12 वाली संख्याएँ: 3 और 4। तोड़ो: $6x^2 + 3x + 4x + 2 = 3x(2x + 1) + 2(2x + 1) = \mathbf{(2x + 1)(3x + 2)}$ ।

प्र.2 सर्वसमिका से (सीधे गुणा किए बिना): (i) 41^2 (ii) 27^2 (iii) 23×17 (iv) 135^2 (v) 97^2

(vi) 18×29 (vii) 34×43 (viii) 205^2

उत्तर- (i) $(40 + 1)^2 = 1600 + 80 + 1 = \mathbf{1681}$ ।

(ii) $(30 - 3)^2 = 900 - 180 + 9 = \mathbf{729}$ ।

(iii) $(20 + 3)(20 - 3) = 400 - 9 = 391$ ।

(iv) श्रीधराचार्य: $(135 + 5)(135 - 5) + 25 = 140 \times 130 + 25 = 18200 + 25 = 18225$ ।

(v) $(100 - 3)^2 = 10000 - 600 + 9 = 9409$ ।

(vi) $(20 - 2)(20 + 9) = 400 + 7 \times 20 - 18 = 400 + 140 - 18 = 522$ ।

(vii) $(40 - 6)(40 + 3) = 1600 - 3 \times 40 - 18 = 1600 - 120 - 18 = 1462$ ।

(viii) $(200 + 5)^2 = 40000 + 2000 + 25 = 42025$ ।

प्र.3 गुणनखंड: (i) $9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab + 12ac - 4bc$

उत्तर- $3a, -b, 2c$ लो: $2(3a)(-b) = -6ab \checkmark$, $2(3a)(2c) = 12ac \checkmark$, $2(-b)(2c) = -4bc \checkmark$ । अतः $(3a - b + 2c)^2$ ।

(ii) $16s^2 + 25t^2 - 40st$

उत्तर- $(4s)^2 - 2(4s)(5t) + (5t)^2 = (4s - 5t)^2$ ।

(iii) $r^2 - r - 42$

उत्तर- योग -1 , गुणनफल -42 : -7 और 6 । $(r - 7)(r + 6)$ ।

(iv) $49g^2 + 14gh + h^2$

उत्तर- $(7g)^2 + 2(7g)(h) + h^2 = (7g + h)^2$ ।

(v) $64u^2 + 121v^2 + 4w^2 - 176uv - 32uw + 44vw$

उत्तर- $8u, -11v, -2w$ लो। $2(8u)(-11v) = -176uv \checkmark$, $2(8u)(-2w) = -32uw \checkmark$, $2(-11v)(-2w) = 44vw \checkmark$ । अतः $(8u - 11v - 2w)^2$ ।

सोचो! जेम्स: $(a - b)^2(a + b) = (a^2 - 2ab + b^2)(a + b)$ । रेशमा: $(a - b)^2(a + b) = (a - b)[(a - b)(a + b)] = (a - b)(a^2 - b^2)$ । **दोनों सही हैं।** वे बस पहले अलग-अलग सर्वसमिकाएँ लगाते हैं और दोनों का अंत $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$ पर होता है।

4.7 नई सर्वसमिकाओं की खोज: घन

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ । चित्र: भुजा $(a + b)$ का घन **2 घनों** (a^3 और b^3)

और 6 घनाभों (3 घनाभ $a \times a \times b$ और 3 घनाभ $a \times b \times b$) में बँटता है। b की जगह $-b$ रखो: $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (चिह्न बारी-बारी + - + -)।

उदाहरण 13: आयतन $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$ वाले घन की भुजा

चरण 1: $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ से मिलाओ: $a = p, b = 2q$ जाँच: $3p^2(2q) = 6p^2q \checkmark$, $3p(2q)^2 = 12pq^2 \checkmark$, $(2q)^3 = 8q^3 \checkmark$ ।

चरण 2: भुजा = $p + 2q$ ।

उदाहरण 14: $8n^3 - 60n^2m + 150nm^2 - 125m^3$ को $(a - b)^3$ के रूप में लिखो

चरण 1: $8n^3 = (2n)^3$, $125m^3 = (5m)^3$, अतः $a = 2n, b = 5m$ जाँच: $3(2n)^2(5m) = 60n^2m \checkmark$, $3(2n)(5m)^2 = 150nm^2 \checkmark$ ।

चरण 2: अतः $(2n - 5m)^3$, जहाँ $a = 2n$ और $b = 5m$ ।

दो और: घनों का अंतर और योग

- $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ । प्रमाण: $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = x^3 + x^2y + xy^2 - x^2y - xy^2 - y^3 = x^3 - y^3$ (बीच के पद कट जाते हैं)।
- $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ । बस चिह्न बदलो: यह वही सर्वसमिका है जिसमें y की जगह $-y$ रखा गया है।

सोचो! $x - y$, $x^2 - y^2$, $x^3 - y^3$ का गुणनखंड है, और $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$ का भी, और $x^5 - y^5 = (x - y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$ का भी। वास्तव में $x - y$ हर n के लिए $x^n - y^n$ को विभाजित करता है।

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

उदाहरण 15: $x + y + z = 10$, $xyz = 25$, $x^2 + y^2 + z^2 = 38$ । $x^3 + y^3 + z^3$ निकालो

चरण 1: पहले $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ से $xy + yz + zx$ निकालो: $100 = 38 + 2(xy + yz + zx)$, अतः $xy + yz + zx = 31$ ।

चरण 2: अब $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)) = 10 \times (38 - 31) = 70$ ।

चरण 3: अतः $x^3 + y^3 + z^3 = 70 + 3 \times 25 = 70 + 75 = 145$ ।

सर्वसमिका	नाम
$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$	योग का घन
$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$	अंतर का घन
$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	घनों का अंतर
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	घनों का योग
$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(\dots)$	तीन घन

4.8 परिमेय व्यंजकों को सरल करना

परिमेय व्यंजक दो बहुपदों की भिन्न है। सरल करने के लिए: **अंश और हर का गुणनखंडन करो, फिर उभयनिष्ठ गुणनखंड काट दो** (काटा जाने वाला गुणनखंड शून्य न हो)।

उदाहरण 16: $(x^2 - 7x + 12)/(5x^2 + 5x - 100)$ सरल करो

चरण 1: अंश: योग -7, गुणनफल 12: -3 और -4, अतः $(x - 3)(x - 4)$ ।

चरण 2: हर: 5 निकालो: $5(x^2 + x - 20)$ । योग 1, गुणनफल -20: 5 और -4, अतः $5(x + 5)(x - 4)$ ।

चरण 3: $(x - 4)$ काटो: $(x - 3)/(5(x + 5))$ ।

सोचो! $(36s^2 - 12st + t^2)/(t^2 + 2ts - 48s^2)$: अंश $= (6s - t)^2 = (t - 6s)^2$ । हर: योग 2s, गुणनफल -48s²: 8s और -6s, अतः $(t + 8s)(t - 6s)$ । $(t - 6s)$ काटो: $(t - 6s)/(t + 8s)$ ।

प्रश्नावली 4.5 (हल सहित)

प्र.1 (i) $(3p^2 - 3pq - 18q^2)/(p^2 + 3pq - 10q^2)$

उत्तर- अंश: $3(p^2 - pq - 6q^2) = 3(p - 3q)(p + 2q)$ । हर: $(p + 5q)(p - 2q)$ । कुछ नहीं कटता: $3(p - 3q)(p + 2q) / ((p + 5q)(p - 2q))$ ।

(ii) $(n^3 - 3n^2m + 3nm^2 - m^3)/(5m^2 - 10mn + 5n^2)$

उत्तर- अंश = $(n - m)^3$ । हर = $5(m^2 - 2mn + n^2) = 5(n - m)^2$ । अतः $(n - m)/5$ ।

(iii) $(w^3 - v^3 + x^3 + 3wvx)/(w^2 + v^2 + x^2 - 2wv - 2vx + 2wx)$

उत्तर- तीन-घन सर्वसमिका में $a = w$, $b = -v$, $c = x$ लो: अंश = $(w - v + x)(w^2 + v^2 + x^2 + wv + vx - wx)$ । हर = $(w - v + x)^2$ । काटने पर: $(w^2 + v^2 + x^2 + wv + vx - wx)/(w - v + x)$ ।

(iv) $(4y^2 - 20yz + 25z^2)/(25z^2 - 4y^2)$

उत्तर- अंश = $(2y - 5z)^2 = (5z - 2y)^2$ । हर = $(5z - 2y)(5z + 2y)$ । काटने पर: $(5z - 2y)/(5z + 2y)$ ।

(v) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 7x + 12) / ((x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9))$

उत्तर- $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$ । $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$ । $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$ । $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$ । हर गुणनखंड कट जाता है, अतः उत्तर 1 है।

(vi) $(p^4 - 16)/(p^2 - 4p + 4)$

उत्तर- $p^4 - 16 = (p^2 - 4)(p^2 + 4) = (p - 2)(p + 2)(p^2 + 4)$ । हर = $(p - 2)^2$ । एक $(p - 2)$ काटो: $(p + 2)(p^2 + 4)/(p - 2)$ ।

उदाहरण 17: सायरा का आयत: एक $x \times x$ वर्ग, 8 पट्टियाँ $x \times 1$, 15 इकाई वर्ग

चरण 1: कुल क्षेत्रफल = $x^2 + 8x + 15$ ।

चरण 2: योग 8, गुणनफल 15: 3 और 5। अतः क्षेत्रफल = $(x + 3)(x + 5)$ ।

चरण 3: लंबाई $x + 5$ इकाई, चौड़ाई $x + 3$ इकाई।

उदाहरण 18: तालाब की चौड़ाई, लंबाई से 4 मी कम, क्षेत्रफल 96 मी²

चरण 1: लंबाई x , चौड़ाई $x - 4$ । $x(x - 4) = 96$, अतः $x^2 - 4x - 96 = 0$ ।

चरण 2: योग -4, गुणनफल -96: -12 और 8। $x^2 - 12x + 8x - 96 = x(x - 12) + 8(x - 12) = (x - 12)(x + 8) = 0$ ।

चरण 3: $x = 12$ या $x = -8$ । लंबाई ऋणात्मक नहीं हो सकती, इसलिए **लंबाई = 12 मी,**
चौड़ाई = 8 मी।

अध्याय के अंत के प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 गुणनफल: (i) $(-3x + 4)^2$ (ii) $(2s + 7)(2s - 7)$

उत्तर- (i) $9x^2 - 24x + 16$ (ii) $(2s)^2 - 7^2 = 4s^2 - 49$ ।

(iii) $(p^2 + 1/2)(p^2 - 1/2)$ (iv) $(2n + 7)(2n - 7)$

उत्तर- (iii) $p^4 - 1/4$ (iv) $4n^2 - 49$ ।

(v) $(s - 2t)(s^2 + 2st + 4t^2)$ (vi) $(1/(2r) - 4r)^2$

उत्तर- (v) $a = s, b = 2t$ के साथ $a^3 - b^3$: $s^3 - 8t^3$ ।

(vi) $1/(4r^2) - 2 \times (1/(2r)) \times 4r + 16r^2 = 1/(4r^2) - 4 + 16r^2$ ।

(vii) $(-3m + 4k - 1)^2$

उत्तर- $9m^2 + 16k^2 + 1^2 + 2(-3m)(4k) + 2(4k)(-1) + 2(-1)(-3m) = 9m^2 + 16k^2 + 1^2 - 24mk - 8k + 6m$ ।

(viii) $(x - y/3)^3$ (ix) $(7k/2 - 2m/3)^3$

उत्तर- (viii) $x^3 - 3x^2(y/3) + 3x(y/3)^2 - (y/3)^3 = x^3 - x^2y + xy^2/3 - y^3/27$ ।

(ix) $(7k/2)^3 = 343k^3/8$ । $3(7k/2)^2(2m/3) = 3 \times 49k^2/4 \times 2m/3 = 49k^2m/2$ ।

$3(7k/2)(2m/3)^2 = 3 \times 7k/2 \times 4m^2/9 = 14km^2/3$ । $(2m/3)^3 = 8m^3/27$ । उत्तर:

$343k^3/8 - 49k^2m/2 + 14km^2/3 - 8m^3/27$ ।

प्र.2 मान: (i) 17×21 (ii) 104×96 (iii) 24×16

उत्तर- (i) $(19 - 2)(19 + 2) = 361 - 4 = 357$ । (ii) $(100 + 4)(100 - 4) = 10000 - 16 = 9984$ । (iii) $(20 + 4)(20 - 4) = 400 - 16 = 384$ ।

(iv) 147^3 (v) 199^3 (vi) 127^3

उत्तर- (iv) $(150 - 3)^3 = 3375000 - 3(22500)(3) + 3(150)(9) - 27 = 3375000 - 202500 + 4050 - 27 = 3176523$ ।

(v) $(200 - 1)^3 = 8000000 - 120000 + 600 - 1 = 7880599$ ।

$$(vi) (130 - 3)^3 = 2197000 - 152100 + 3510 - 27 = 2048383 \mid$$

$$(vii) (-107)^3 \quad (viii) (-299)^3$$

$$\text{उत्तर- (vii) } -(100 + 7)^3 = -(1000000 + 210000 + 14700 + 343) = -1225043 \mid$$

$$(viii) -(300 - 1)^3 = -(27000000 - 270000 + 900 - 1) = -26730899 \mid$$

$$\text{प्र.3 गुणनखंड: (i) } 4y^2 + 1 + 1/(16y^2) \quad (ii) 9m^2 - 1/(25n^2)$$

$$\text{उत्तर- (i) } (2y)^2 + 2(2y)(1/(4y)) + (1/(4y))^2, \text{ बीच } = 1 \checkmark \mid \text{ अतः } (2y + 1/(4y))^2 \mid$$

$$(ii) (3m)^2 - (1/(5n))^2 = (3m - 1/(5n))(3m + 1/(5n)) \mid$$

$$(iii) 27b^3 - 1/(64b^3)$$

$$\text{उत्तर- } (3b)^3 - (1/(4b))^3 = (3b - 1/(4b))(9b^2 + 3/4 + 1/(16b^2)) \mid (\text{बीच: } 3b \times 1/(4b) = 3/4) \mid$$

$$(iv) x^2 + 5x/6 + 1/6$$

$$\text{उत्तर- योग } 5/6, \text{ गुणनफल } 1/6: 1/2 \text{ और } 1/3 \mid (x + 1/2)(x + 1/3) \mid$$

$$(v) 27u^3 - 1/125 - 27u^2/5 + 9u/25$$

$$\text{उत्तर- } a = 3u, b = 1/5 \mid 3a^2b = 27u^2/5 \checkmark, 3ab^2 = 9u/25 \checkmark \mid \text{ अतः } (3u - 1/5)^3 \mid$$

$$(vi) 64y^3 + z^3/125$$

$$\text{उत्तर- } (4y)^3 + (z/5)^3 = (4y + z/5)(16y^2 - 4yz/5 + z^2/25) \mid$$

$$(vii) p^3 + 27q^3 + r^3 - 9pqr$$

$$\text{उत्तर- तीन-घन सर्वसमिका में } a = p, b = 3q, c = r \quad (3abc = 9pqr \checkmark): (p + 3q + r)(p^2 + 9q^2 + r^2 - 3pq - 3qr - pr) \mid$$

$$(viii) 9m^2 - 12m + 4$$

$$\text{उत्तर- } (3m)^2 - 2(3m)(2) + 2^2 = (3m - 2)^2 \mid$$

$$(ix) 9x^3 - (8/3)y^3 + z^3/3 + 6xyz$$

$$\text{उत्तर- } 1/3 \text{ निकालो: } (1/3)(27x^3 - 8y^3 + z^3 + 18xyz) \mid \text{ अब } a = 3x, b = -2y, c = z, \text{ और } -3abc = -3(3x)(-2y)(z) = 18xyz \checkmark \mid \text{ अतः } (1/3)(3x - 2y + z)(9x^2 + 4y^2 + z^2) \mid$$

$$z^2 + 6xy + 2yz - 3xz) \mid$$

(x) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xz + 36yz + 24xy$

उत्तर- ध्यान दो: पूर्ण वर्ग $(a + b + c)^2$ में $a = 2x$, $b = 3y$, $c = 6z$ के लिए बीच के पद $12xy$, $24xz$ और $36yz$ चाहिए। पुस्तक में छपे रूप में $24xy$ और $12xz$ आपस में बदले हुए हैं, इसलिए यह ठीक यही व्यंजक पूर्ण वर्ग नहीं है। इच्छित रूप $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 + 12xy + 24xz + 36yz$, $(2x + 3y + 6z)^2$ है।

(xi) $27u^3 - 1/216 - 9u^2/2 + u/4$

उत्तर- $a = 3u$, $b = 1/6$ । $3a^2b = 3 \times 9u^2 \times 1/6 = 9u^2/2$ ✓, $3ab^2 = 3 \times 3u \times 1/36 = u/4$ ✓। अतः $(3u - 1/6)^3$ ।

प्र.4 सरल करो: (i) $(4x^2 + 4x + 1)/(4x^2 - 1)$

उत्तर- $(2x + 1)^2 / ((2x - 1)(2x + 1)) = (2x + 1)/(2x - 1)$ ।

(ii) $9(3a^3 - 24b^3)/(9a^2 - 36b^2)$

उत्तर- अंश: $9 \times 3(a^3 - 8b^3) = 27(a - 2b)(a^2 + 2ab + 4b^2)$ । हर: $9(a^2 - 4b^2) = 9(a - 2b)(a + 2b)$ । 9 और $(a - 2b)$ काटो: $3(a^2 + 2ab + 4b^2)/(a + 2b)$ ।

(iii) $(s^3 + 125t^3)/(s^2 - 2st - 35t^2)$

उत्तर- अंश: $(s + 5t)(s^2 - 5st + 25t^2)$ । हर: योग -2, गुणनफल -35: -7 और 5, अतः $(s - 7t)(s + 5t)$ । काटने पर: $(s^2 - 5st + 25t^2)/(s - 7t)$ ।

प्र.5 संभावित लंबाई और चौड़ाई: (i) $25a^2 - 30ab + 9b^2$ (ii) $36s^2 - 49t^2$

उत्तर- (i) $(5a - 3b)^2$ । दोनों भुजाएँ $5a - 3b$ (यह वर्ग है)।

(ii) $(6s)^2 - (7t)^2 = (6s + 7t)(6s - 7t)$ । लंबाई $6s + 7t$, चौड़ाई $6s - 7t$ ।

प्र.6 संभावित लंबाई, चौड़ाई, ऊँचाई: (i) $6a^2 - 24b^2$ (ii) $3ps^2 - 15ps + 12p$

उत्तर- (i) $6(a^2 - 4b^2) = 6(a + 2b)(a - 2b)$ । विमाएँ 6, $(a + 2b)$, $(a - 2b)$ ।

(ii) $3p(s^2 - 5s + 4) = 3p(s - 1)(s - 4)$ । विमाएँ $3p$, $(s - 1)$, $(s - 4)$ ।

प्र.7 40 मी भुजा के वर्गाकार खेल के मैदान के चारों ओर s मी चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल?

उत्तर- रास्ता मैदान के बाहर है। बाहरी वर्ग की भुजा = $40 + 2s$ । रास्ते का क्षेत्रफल = $(40 + 2s)^2 - 40^2 = 1600 + 160s + 4s^2 - 1600 = 4s^2 + 160s = 4s(s + 40)$ मी²।

प्र.8 किसी संख्या और उसके व्युत्क्रम का योग $10/3$ है। संख्या ज्ञात करो।

उत्तर- $x + 1/x = 10/3$ । $3x$ से गुणा: $3x^2 + 3 = 10x$, अतः $3x^2 - 10x + 3 = 0$ । $-10x = -9x - x$ तोड़ो: $3x(x - 3) - 1(x - 3) = (3x - 1)(x - 3) = 0$ । अतः $x = 3$ या $x = 1/3$ ।

प्र.9 तालाब का क्षेत्रफल $2x^2 + 7x + 3$ वर्ग हस्त है और चौड़ाई $2x + 1$ । लंबाई ज्ञात करो।

उत्तर- $2x^2 + 7x + 3 = (2x + 1)(x + 3)$ [जाँच: $2x^2 + 6x + x + 3$ ✓]। लंबाई = $x + 3$ हस्त।

प्र.10 $x - 2$ और $x - 1/2$, $px^2 + 5x + r$ के गुणनखंड हैं। दिखाओ $p = r$ ।

उत्तर- $px^2 + 5x + r = p(x - 2)(x - 1/2) = p(x^2 - 5x/2 + 1) = px^2 - (5p/2)x + p$ । तुलना: x का गुणांक $5 = -5p/2$, अतः $p = -2$ । अचर: $r = p$ । अतः $r = p$ (दोनों -2)।

प्र.11 $a + b + c = 5$, $ab + bc + ca = 10$ । सिद्ध करो $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = -25$ ।

उत्तर- $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 25 - 20 = 5$ । तब $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) = 5 \times (5 - 10) = -25$ ✓।

प्र.12 दिखाओ कि हर प्राकृत n के लिए $n^3 - n$, 6 से विभाज्य है।

उत्तर- $n^3 - n = n(n^2 - 1) = (n - 1)n(n + 1)$, यानी तीन क्रमागत संख्याओं का गुणनफल। किन्हीं तीन क्रमागत संख्याओं में एक संख्या 3 की गुणज होती है और कम से कम एक सम होती है। अतः गुणनफल 2 और 3 से विभाज्य है, इसलिए 6 से विभाज्य है।

प्र.13 (i) $x + y = -4$ हो तो $x^3 + y^3 - 12xy + 64$ का मान। (ii) $x = 2y + 6$ हो तो $x^3 - 8y^3 - 36xy - 216$ का मान।

उत्तर- (i) $64 = 4^3$ और $12xy = 3 \times xy \times 4$ लिखो, तो व्यंजक $= x^3 + y^3 + 4^3 - 3xy(4)$ ।
 $z = 4$ लो, $x + y + z = -4 + 4 = 0$, और योग 0 हो तो तीन-घन सर्वसमिका $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$ देती है। **मान = 0**।

(ii) इसे $x^3 + (-2y)^3 + (-6)^3 - 3(x)(-2y)(-6)$ लिखो [जाँच: $-3 \times 12xy = -36xy$ ✓]। योग $x - 2y - 6 = 0$ (क्योंकि $x = 2y + 6$)। अतः मान **0** है।

त्वरित दोहराव

- **सर्वसमिका** अक्षरों के सभी मानों के लिए सत्य होती हैं; समीकरण केवल कुछ मानों के लिए।
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$
- $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$; $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
- $x^2 + Sx + P$ के गुणनखंड के लिए: ऐसी दो संख्याएँ खोजो जिनका योग S और गुणनफल P हो।
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$ ।
- $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$ ।
- परिमेय व्यंजक सरल करने के लिए: गुणनखंड करो, उभयनिष्ठ गुणनखंड (शून्य नहीं) काटो।

शिक्षक की बात: खुद करो: अंत में 5 वाली कोई दो अंकों की संख्या लो, जैसे 75।

श्रीधराचार्य की युक्ति से 75^2 निकालो ($7 \times 8 = 56$, फिर 25)। कैलकुलेटर से जाँचो!