

Chapter Review

- **Introduction:** Probability measures the chance (uncertainty) that an event will occur, using numbers from 0 to 1 (or 0% to 100%). An experiment whose result cannot be predicted with certainty is a random experiment, such as tossing a coin or rolling a die. An outcome is one possible result; an event is a collection of one or more outcomes.
- **Experimental (empirical) probability:** When an experiment is repeated many times, $P(E) = (\text{number of trials in which the event happened}) / (\text{total number of trials})$. Example: if a coin is tossed 1000 times and heads comes up 520 times, the empirical probability of heads is $520/1000 = 0.52$.
- **Theoretical (classical) probability:** If all outcomes are equally likely, $P(E) = (\text{number of outcomes favourable to } E) / (\text{number of all possible outcomes})$. Example: rolling a die, $P(\text{getting an even number}) = 3/6 = 1/2$. Equally likely outcomes mean that each outcome has the same chance of occurring (a fair coin, an unbiased die).
- **Elementary event:** An event having only one outcome is an elementary event. The sum of the probabilities of all elementary events of an experiment is 1. For a coin, $P(H) + P(T) = 1/2 + 1/2 = 1$. For a die, $P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 6 \times 1/6 = 1$.
- **Range of probability:** For any event E , $0 \leq P(E) \leq 1$. An impossible event (no outcome favours it) has $P(E) = 0$; for example, getting 7 on a die. A sure (certain) event has $P(E) = 1$; for example, getting a number less than 7 on a die.
- **Complementary events:** The event 'not E ' (written $\bar{E}$ or E') is the complement of E . $P(E) + P(\text{not } E) = 1$, so $P(\text{not } E) = 1 - P(E)$. Example: if $P(\text{winning}) = 0.6$ then $P(\text{not winning}) = 0.4$. Complementary events together make up the whole sample space.

- Standard sample spaces: Coin: $\{H, T\}$. Two coins: $\{HH, HT, TH, TT\}$ (4 outcomes). Three coins: 8 outcomes. One die: 6 outcomes. Two dice: 36 outcomes (pairs). Pack of 52 cards: 4 suits (spades, hearts, diamonds, clubs; 13 cards each), 26 red and 26 black cards, 12 face cards (K, Q, J), 4 aces. Example: $P(\text{king}) = 4/52 = 1/13$; $P(\text{red face card}) = 6/52 = 3/26$.
- Solving problems: Step 1: write the sample space and count total outcomes $n(S)$. Step 2: count the favourable outcomes $n(E)$. Step 3: $P(E) = n(E)/n(S)$ in its simplest form. Examples: two dice, $P(\text{sum} = 8) = 5/36$ (outcomes (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)); $P(\text{sum} = 12) = 1/36$; $P(\text{product} = 6) = 4/36 = 1/9$. Geometric probability uses areas: $P = \text{favourable area} / \text{total area}$.

Key Terms

Random Experiment – An experiment whose result cannot be predicted with certainty.

Outcome – A possible result of an experiment.

Event – A set of one or more outcomes of an experiment.

Sample Space – The set of all possible outcomes.

Experimental Probability – Based on actual trials: successes / total trials.

Theoretical Probability – Favourable outcomes / total equally likely outcomes.

Elementary Event – An event with exactly one outcome.

Impossible Event – An event with probability 0.

Sure Event – An event with probability 1.

Complementary Event – The event 'not E'; $P(E) + P(\text{not } E) = 1$.

Equally Likely – Outcomes having the same chance of occurring.

Geometric Probability – Probability found by ratio of favourable area to total area.

Diagrams / Flowcharts

Probability Scale

$P(E)$	Meaning
0	Impossible event
Between 0 and $\frac{1}{2}$	Unlikely
$\frac{1}{2}$	Equally likely
Between $\frac{1}{2}$ and 1	Likely
1	Sure event

Two Dice (36 outcomes)

Sum	Outcomes	Probability
2 or 12	1	$\frac{1}{36}$
7	6	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
8	5	$\frac{5}{36}$
At least 2	36	1

Solving a Probability Problem

Write the experiment and sample space



Count total outcomes



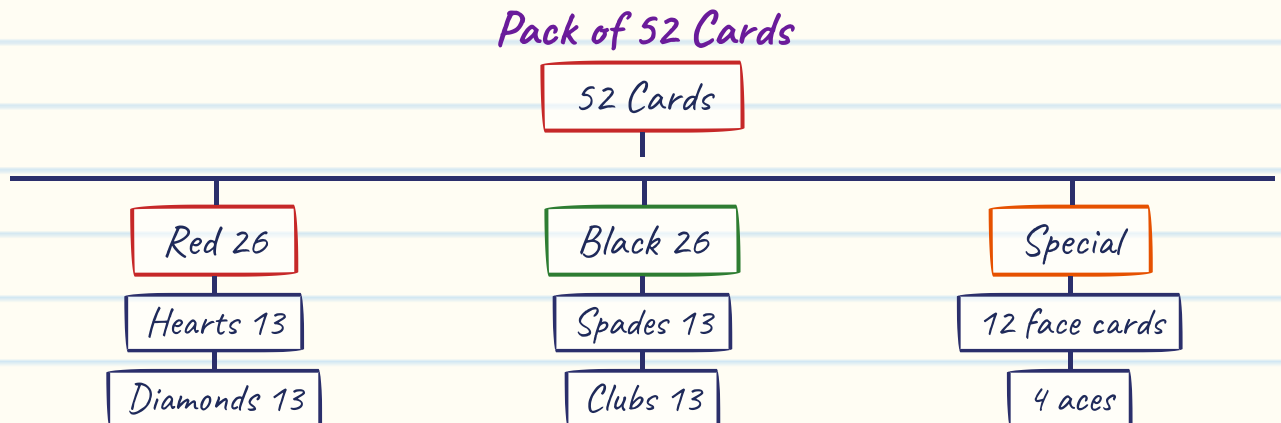
Count favourable outcomes



Divide: $P(E) = \text{favourable} / \text{total}$



Simplify the fraction



Textbook Exercise Questions

Q.1 A die is thrown once. Find the probability of getting (i) a prime number
(ii) a number between 2 and 6.

Ans. (i) Primes 2, 3, 5: $3/6 = 1/2$. (ii) Numbers 3, 4, 5: $3/6 = 1/2$.

Q.2 Two coins are tossed together. Find the probability of getting at least one head.

Ans. Outcomes HH, HT, TH, TT. At least one head: 3. $P = 3/4$.

Q.3 A bag has 3 red and 5 black balls. A ball is drawn at random. Find $P(\text{red})$ and $P(\text{not red})$.

Ans. Total 8. $P(\text{red}) = 3/8$. $P(\text{not red}) = 1 - 3/8 = 5/8$.

Q.4 A card is drawn from a well-shuffled pack of 52 cards. Find the probability of getting (i) a king of red colour (ii) a face card (iii) a red face card.

Ans. (i) $2/52 = 1/26$. (ii) $12/52 = 3/13$. (iii) $6/52 = 3/26$.

Q.5 Two dice are thrown together. Find the probability that the sum is 8.

Ans. Favourable: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) = 5. $P = 5/36$.

Q.6 A number is chosen at random from 1 to 25. Find the probability that it is prime.

Ans. Primes: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 = 9. $P = 9/25$.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] What is the probability of an impossible event?

Ans. 0.

Q.2 [1 mark] If $P(E) = 0.05$, what is $P(\text{not } E)$?

Ans. $1 - 0.05 = 0.95$.

Q.3 [2 marks] A die is rolled. Find the probability of getting a number greater than 4.

Ans. Numbers 5, 6: $2/6 = 1/3$.

Q.4 [2 marks] A box has 12 balls of which x are black. If one ball is drawn, $P(\text{black}) = p$. If 6 more black balls are put in, P becomes $2p$. Find x .

Ans. $p = x/12$ and $2p = (x + 6)/18$. So $2x/12 = (x + 6)/18$, giving $3x = x + 6$, $x = 3$.

Q.5 [3 marks] A coin is tossed three times. Find the probability of getting at least two heads.

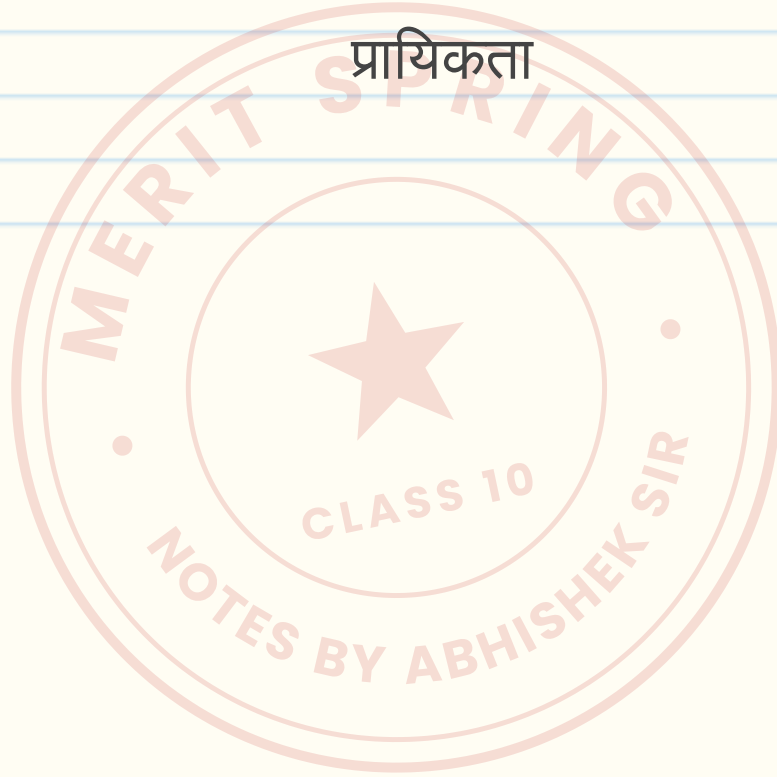
Ans. 8 outcomes. At least two heads: HHH, HHT, HTH, THH = 4. $P = 4/8 = 1/2$.

Q.6 [3 marks] A lot of 20 bulbs contains 4 defective ones. One bulb is drawn at random; it is not replaced. Another bulb is drawn. Find $P(\text{first is defective})$ and $P(\text{not defective})$.

Ans. $P(\text{defective}) = 4/20 = 1/5$. $P(\text{not defective}) = 16/20 = 4/5$.

HINDI VERSION

प्रायिकता



अध्याय समीक्षा

- परिचय: प्रायिकता किसी घटना के घटित होने की संभावना (अनिश्चितता) को 0 से 1 (या 0% से 100%) की संख्याओं में मापती है। जिस प्रयोग का परिणाम निश्चित रूप से नहीं बताया जा सकता वह यादृच्छिक प्रयोग है, जैसे सिक्का उछालना या पासा फेंकना। परिणाम प्रयोग का एक संभावित फल है; घटना एक या अधिक परिणामों का संग्रह है।
- प्रायोगिक (अनुभवजन्य) प्रायिकता: जब प्रयोग को बहुत बार दोहराया जाता है तो $P(E) = (\text{जितने प्रयासों में घटना घटी}) / (\text{कुल प्रयासों की संख्या})$ । उदाहरण: यदि सिक्का 1000 बार उछालने पर चित 520 बार आए तो चित की अनुभवजन्य प्रायिकता $520/1000 = 0.52$ ।
- सैद्धांतिक (शास्त्रीय) प्रायिकता: यदि सभी परिणाम समप्रायिक हों तो $P(E) = (E \text{ के अनुकूल परिणामों की संख्या}) / (\text{सभी संभावित परिणामों की संख्या})$ । उदाहरण: पासा फेंकने पर सम संख्या आने की प्रायिकता $= 3/6 = 1/2$ । समप्रायिक परिणामों का अर्थ है कि प्रत्येक परिणाम के घटित होने की संभावना समान है (निष्पक्ष सिक्का, अभिनत रहित पासा)।
- प्रारंभिक घटना: केवल एक परिणाम वाली घटना प्रारंभिक घटना कहलाती है। किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग 1 होता है। सिक्के के लिए $P(H) + P(T) = 1/2 + 1/2 = 1$ । पासे के लिए $P(1) + P(2) + \dots + P(6) = 6 \times 1/6 = 1$ ।
- प्रायिकता का परास: किसी भी घटना E के लिए $0 \leq P(E) \leq 1$ । असंभव घटना (जिसके अनुकूल कोई परिणाम न हो) की प्रायिकता $P(E) = 0$, जैसे पासे पर 7 आना। निश्चित (पक्की) घटना की प्रायिकता $P(E) = 1$, जैसे पासे पर 7 से कम संख्या आना।
- पूरक घटनाएँ: घटना ' E नहीं' ($\bar{E}$ या E'), E की पूरक घटना है। $P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1$, अतः $P(E \text{ नहीं}) = 1 - P(E)$ । उदाहरण: यदि $P(\text{जीतना}) = 0.6$ तो $P(\text{न जीतना}) = 0.4$ । पूरक घटनाएँ मिलकर पूरा प्रतिदर्श समष्टि बनाती हैं।
- मानक प्रतिदर्श समष्टियाँ: सिक्का: $\{H, T\}$ । दो सिक्के: $\{HH, HT, TH, TT\}$ (4 परिणाम)। तीन सिक्के: 8 परिणाम। एक पासा: 6 परिणाम। दो पासे: 36 परिणाम (युग्म)। 52 पत्तों की गड्डी: 4 रंग (हुकुम, पान, ईट, चिड़ी; प्रत्येक के 13 पत्ते), 26 लाल और 26 काले पत्ते, 12 चित्र वाले पत्ते (K, Q, J), 4 इक्के। उदाहरण: $P(\text{बादशाह}) = 4/52 = 1/13$; $P(\text{लाल चित्र वाला पत्ता}) = 6/52 = 3/26$ ।

- प्रश्न हल करना: चरण 1: प्रतिदर्श समष्टि लिखकर कुल परिणाम $n(S)$ गिनें। चरण 2: अनुकूल परिणाम $n(E)$ गिनें। चरण 3: $P(E) = n(E)/n(S)$ सरलतम रूप में लिखें। उदाहरण: दो पासे, $P(\text{योग} = 8) = 5/36$ (परिणाम (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)); $P(\text{योग} = 12) = 1/36$; $P(\text{गुणनफल} = 6) = 4/36 = 1/9$ । ज्यामितीय प्रायिकता में क्षेत्रफल प्रयुक्त होता है: $P = \text{अनुकूल क्षेत्रफल} / \text{कुल क्षेत्रफल}$ ।

मुख्य शब्दावली

यादृच्छिक प्रयोग - ऐसा प्रयोग जिसका परिणाम निश्चित रूप से न बताया जा सके।

परिणाम - प्रयोग का एक संभावित फल।

घटना - प्रयोग के एक या अधिक परिणामों का समुच्चय।

प्रतिदर्श समष्टि - सभी संभावित परिणामों का समुच्चय।

प्रायोगिक प्रायिकता - वास्तविक प्रयासों पर आधारित: सफल प्रयास / कुल प्रयास।

सैद्धांतिक प्रायिकता - अनुकूल परिणाम / कुल समप्रायिक परिणाम।

प्रारंभिक घटना - ठीक एक परिणाम वाली घटना।

असंभव घटना - जिसकी प्रायिकता 0 हो।

निश्चित घटना - जिसकी प्रायिकता 1 हो।

पूरक घटना - घटना 'E नहीं'; $P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1$ ।

समप्रायिक - समान संभावना वाले परिणाम।

ज्यामितीय प्रायिकता - अनुकूल क्षेत्रफल और कुल क्षेत्रफल के अनुपात से प्रायिकता।

आरेख / फ्लोचार्ट

प्रायिकता का पैमाना

$P(E)$	अर्थ
0	असंभव घटना
0 और $\frac{1}{2}$ के बीच	कम संभावना
$\frac{1}{2}$	समान संभावना
$\frac{1}{2}$ और 1 के बीच	अधिक संभावना
1	निश्चित घटना

दो पासे (36 परिणाम)

योग	परिणाम	प्रायिकता
2 या 12	1	$1/36$
7	6	$6/36 = 1/6$
8	5	$5/36$
कम से कम 2	36	1

प्रायिकता का प्रश्न हल करना

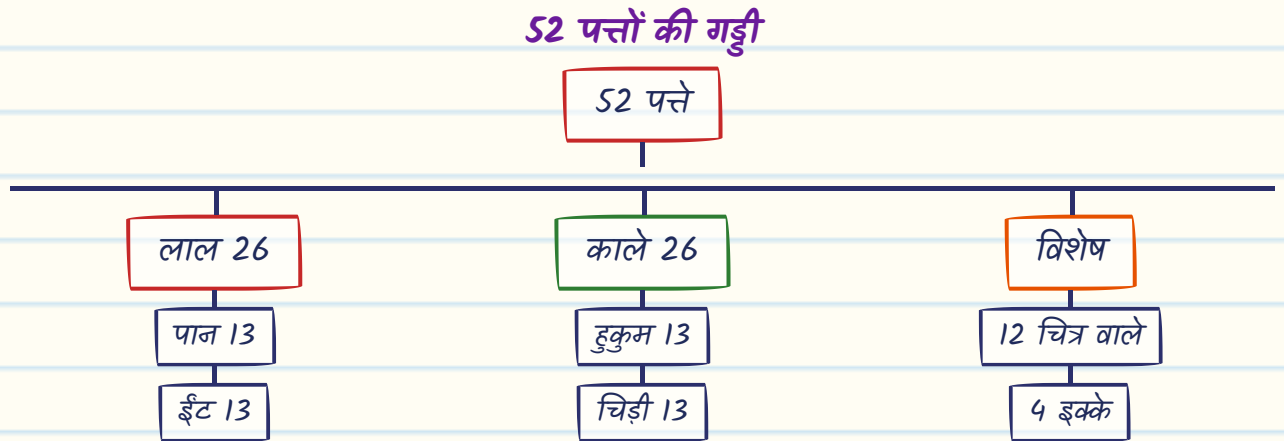
प्रयोग और प्रतिदर्श समष्टि लिखें

↓
कुल परिणाम गिनें

↓
अनुकूल परिणाम गिनें

↓
 $P(E) = \text{अनुकूल} / \text{कुल}$

↓
भिन्न सरल करें



पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 एक पासा एक बार फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए: (i) अभाज्य संख्या आना (ii) 2 और 6 के बीच की संख्या आना।

उत्तर- (i) अभाज्य 2, 3, 5: $3/6 = 1/2$ (ii) संख्याएँ 3, 4, 5: $3/6 = 1/2$

प्र.2 दो सिक्के एक साथ उछाले गए। कम से कम एक चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- परिणाम HH, HT, TH, TT। कम से कम एक चित: 3। $P = 3/4$

प्र.3 एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। यादृच्छिक रूप से एक गेंद निकाली गई। $P(\text{लाल})$ और $P(\text{लाल नहीं})$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कुल 8। $P(\text{लाल}) = 3/8$ । $P(\text{लाल नहीं}) = 1 - 3/8 = 5/8$

प्र.4 52 पत्तों की भलीभाँति फेंटी गड्डी से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए: (i) लाल बादशाह (ii) चित्र वाला पत्ता (iii) लाल चित्र वाला पत्ता।

उत्तर- (i) $2/52 = 1/26$ (ii) $12/52 = 3/13$ (iii) $6/52 = 3/26$

प्र.5 दो पासे एक साथ फेंके गए। योग 8 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अनुकूल: (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) = 5। $P = 5/36$

प्र.6 1 से 25 तक की संख्याओं में से यादृच्छिक रूप से एक संख्या चुनी गई। उसके अभाज्य होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- अभाज्य: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 = 9। $P = 9/25$

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] असंभव घटना की प्रायिकता क्या होती है?

उत्तर- 0।

प्र.2 [1 अंक] यदि $P(E) = 0.05$ तो $P(E \text{ नहीं})$ क्या है?

उत्तर- $1 - 0.05 = 0.95$ ।

प्र.3 [2 अंक] पासा फेंका गया। 4 से बड़ी संख्या आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- संख्याएँ 5, 6: $2/6 = 1/3$ ।

प्र.4 [2 अंक] एक डिब्बे में 12 गेंदें हैं जिनमें x काली हैं। एक गेंद निकालने पर $P(\text{काली}) = p$ । यदि 6 और काली गेंदें डाल दी जाएँ तो प्रायिकता $2p$ हो जाती है। x ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $p = x/12$ और $2p = (x + 6)/18$ । अतः $2x/12 = (x + 6)/18$, $3x = x + 6$, $x = 3$ ।

प्र.5 [3 अंक] एक सिक्का तीन बार उछाला गया। कम से कम दो चित आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

उत्तर- 8 परिणाम। कम से कम दो चित: HHH, HHT, HTH, THH = 4। $P = 4/8 = 1/2$ ।

प्र.6 [3 अंक] 20 बल्बों के ढेर में 4 खराब हैं। एक बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाला गया। $P(\text{खराब})$ और $P(\text{खराब नहीं})$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $P(\text{खराब}) = 4/20 = 1/5$ । $P(\text{खराब नहीं}) = 16/20 = 4/5$ ।