

Chapter Review

- **Real numbers:** Real numbers are the union of rational numbers (p/q form, q not 0) and irrational numbers (non-terminating, non-repeating decimals such as $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π). Every real number can be plotted on the number line. This chapter covers Euclid's division lemma, the Fundamental Theorem of Arithmetic, and proofs of irrationality, plus decimal expansions of rational numbers.
- **Euclid's Division Lemma:** For two positive integers a and b there exist unique integers q and r such that $a = bq + r$, where $0 \leq r < b$. In words: Dividend = Divisor $\times$ Quotient + Remainder. Example: $17 = 5 \times 3 + 2$. This lemma is the basis of the division algorithm.
- **Euclid's Division Algorithm (to find HCF):** To find the HCF of a and b ($a > b$): Step 1: apply the lemma to get $a = bq + r$. Step 2: if $r = 0$, HCF is b . Step 3: otherwise apply the lemma to b and r . Repeat until the remainder is zero; the last divisor is the HCF. Example: HCF(135, 225): $225 = 135 \times 1 + 90$; $135 = 90 \times 1 + 45$; $90 = 45 \times 2 + 0$, so HCF = 45.
- **Fundamental Theorem of Arithmetic:** Every composite number can be expressed (factorised) as a product of primes, and this factorisation is unique, apart from the order in which the prime factors occur. Example: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$. Every composite number is a product of primes in exactly one way.
- **HCF and LCM by prime factorisation:** HCF = product of the smallest power of each common prime factor. LCM = product of the greatest power of each prime factor in the numbers. Example: $36 = 2^2 \times 3^2$ and $56 = 2^3 \times 7$. HCF = $2^2 = 4$, LCM = $2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$. Key result: for two positive integers a and b , $\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$. (This result is true only for two numbers, not three.)

- **Proving irrationality:** To prove that $\sqrt{p}$ (p prime) is irrational we use proof by contradiction. Assume $\sqrt{p} = a/b$ in lowest terms (a, b co-prime). Then $a^2 = pb^2$, so p divides a^2 , hence p divides a . Write $a = pc$; then $pb^2 = p^2c^2$, so $b^2 = pc^2$, so p divides b . Thus p is a common factor of a and b , which contradicts that they are co-prime. So $\sqrt{p}$ is irrational. Also: if p is prime and p divides a^2 , then p divides a .
- **Useful irrationality facts:** The sum or difference of a rational and an irrational number is irrational. The product or quotient of a non-zero rational and an irrational number is irrational. Examples: $3 + \sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$ and $7/\sqrt{2}$ are irrational. The sum of two irrationals may be rational, for example $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$.
- **Decimal expansion of rational numbers:** Let $x = p/q$ be a rational number with p and q co-prime. If the prime factorisation of q is of the form $2^n 5^m$ (n, m non-negative integers), then x has a terminating decimal expansion. If q has any prime factor other than 2 and 5, then x has a non-terminating repeating decimal expansion. Example: $13/3125$ terminates since $3125 = 5^5$; $17/6$ does not terminate, since $6 = 2 \times 3$.

Key Terms

Euclid's Division Lemma – $a = bq + r$ with $0 \leq r < b$ for positive integers a and b .

Algorithm – A series of well defined steps giving a procedure for solving a problem.

Euclid's Algorithm – Repeated use of the lemma to find the HCF of two numbers.

Composite Number – A number having more than two factors; it has a prime factorisation.

Prime Factorisation – Expressing a number as a product of primes, e.g. $36 = 2^2 \times 3^2$.

HCF – Highest Common Factor; product of smallest powers of common primes.

LCM – Least Common Multiple; product of greatest powers of all primes.

HCF $\times$ LCM – $HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$ for two positive integers.

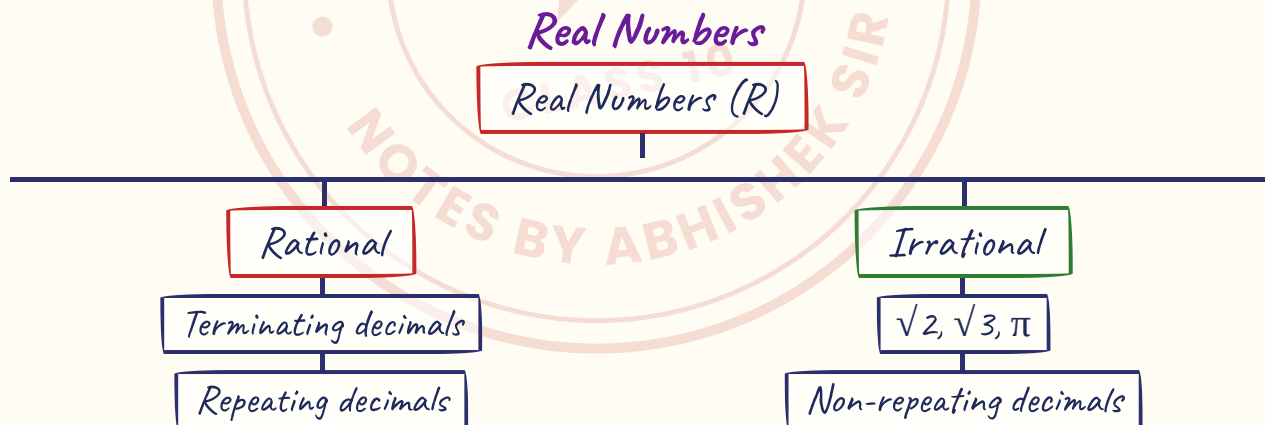
Rational Number – Number of form p/q , $q \neq 0$; decimal terminates or repeats.

Irrational Number – Number that cannot be written as p/q ; non-terminating non-repeating.

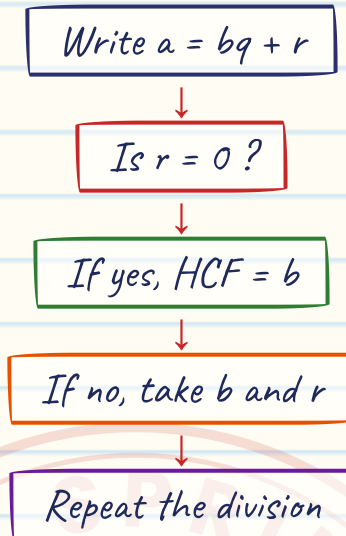
Co-prime – Two numbers whose HCF is 1.

Proof by Contradiction – Assume the opposite of what is to be proved and reach an absurdity.

Diagrams / Flowcharts



Euclid's Algorithm (HCF of a, b)



HCF and LCM of 36 and 56

Item	Value
36	$2^2 \times 3^2$
56	$2^3 \times 7$
HCF	$2^2 = 4$
LCM	$2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$
HCF $\times$ LCM	$2016 = 36 \times 56$

Decimal Expansion of p/q

Terminating

- $q = 2^n 5^m$ only
- Example: $7/8 = 0.875$

Non-terminating repeating

- q has other prime factor
- Example: $1/3 = 0.333...$

Textbook Exercise Questions

Q.1 State Euclid's division lemma and use it to find the HCF of 135 and 225.

Ans. Lemma: $a = bq + r$, $0 \leq r < b$. $225 = 135 \times 1 + 90$; $135 = 90 \times 1 + 45$; $90 = 45 \times 2 + 0$. The last divisor is 45, so $\text{HCF} = 45$.

Q.2 State the Fundamental Theorem of Arithmetic. Find the HCF and LCM of 12, 15 and 21.

Ans. Every composite number is a unique product of primes. $12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $21 = 3 \times 7$. $\text{HCF} = 3$; $\text{LCM} = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$.

Q.3 Prove that $\sqrt{2}$ is irrational.

Ans. Assume $\sqrt{2} = a/b$ with a, b co-prime. Then $a^2 = 2b^2$, so 2 divides a^2 , so 2 divides a . Let $a = 2c$. Then $4c^2 = 2b^2$, so $b^2 = 2c^2$, so 2 divides b . So 2 is a common factor of a and b , contradicting co-primality. Hence $\sqrt{2}$ is irrational.

Q.4 Prove that $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational.

Ans. Suppose $3 + 2\sqrt{5} = r$, a rational number. Then $\sqrt{5} = (r - 3)/2$, which is rational. But $\sqrt{5}$ is irrational, a contradiction. So $3 + 2\sqrt{5}$ is irrational.

Q.5 Without long division, state whether $13/3125$ has a terminating decimal expansion.

Ans. $3125 = 5^5$, so the denominator is of the form $2^n 5^m$. Hence $13/3125$ terminates; $13/3125 = 0.00416$.

Q.6 Show that any positive odd integer is of the form $4q + 1$ or $4q + 3$.

Ans. Take $a = 4q + r$ with $r = 0, 1, 2, 3$. For $r = 0$ and $r = 2$ the number is even ($4q$ and $4q + 2$). So any odd number must be $4q + 1$ or $4q + 3$.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] If $HCF(26, 91) = 13$, find $LCM(26, 91)$.

Ans. $LCM = (26 \times 91)/13 = 182$.

Q.2 [1 mark] Write the prime factorisation of 140.

Ans. $140 = 2^2 \times 5 \times 7$.

Q.3 [2 marks] Find the HCF of 96 and 404 by prime factorisation, and hence the LCM.

Ans. $96 = 2^5 \times 3$; $404 = 2^2 \times 101$. $HCF = 4$. $LCM = (96 \times 404)/4 = 9696$.

Q.4 [2 marks] Check whether 6^n can end with the digit 0 for any natural n .

Ans. For the number to end in 0 it must be divisible by 5. $6^n = 2^n \times 3^n$ has no prime factor 5, so 6^n never ends with 0.

Q.5 [3 marks] Show that $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ is a composite number.

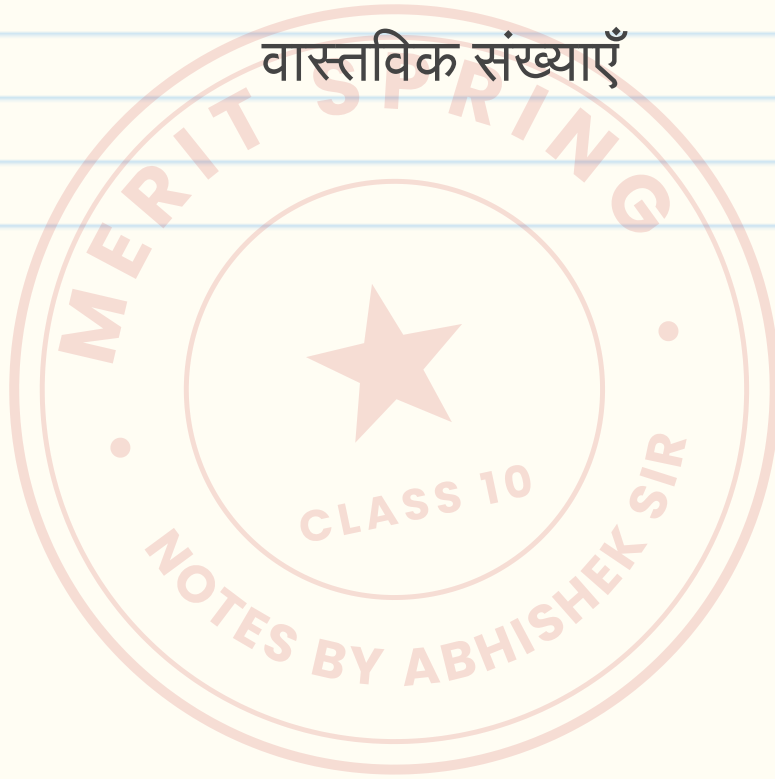
Ans. $= 13(7 \times 11 + 1) = 13 \times 78$, which has factors other than 1 and itself. So it is composite.

Q.6 [3 marks] Prove that $\sqrt{3}$ is irrational.

Ans. Assume $\sqrt{3} = a/b$ (co-prime). $a^2 = 3b^2$, so 3 divides a ; $a = 3c$; then $3b^2 = 9c^2$ gives $b^2 = 3c^2$, so 3 divides b . Common factor 3 contradicts co-primality. So $\sqrt{3}$ is irrational.

HINDI VERSION

वास्तविक संख्याएँ



अध्याय समीक्षा

- वास्तविक संख्याएँ: वास्तविक संख्याएँ परिमेय संख्याओं (p/q रूप, $q \neq 0$) और अपरिमेय संख्याओं (अनवसानी अनावर्ती दशमलव, जैसे $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π) का संयोजन हैं। प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर दर्शाया जा सकता है। इस अध्याय में यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका, अंकगणित की आधारभूत प्रमेय, अपरिमेयता के प्रमाण और परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार हैं।
- यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका: दो धनात्मक पूर्णाकों a और b के लिए अद्वितीय पूर्णांक q और r ऐसे होते हैं कि $a = bq + r$, जहाँ $0 \leq r < b$ । शब्दों में: भाज्य = भाजक $\times$ भागफल + शेषफल। उदाहरण: $17 = 5 \times 3 + 2$ । यही विभाजन एल्गोरिथ्म का आधार है।
- यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म (HCF के लिए): a और b ($a > b$) का HCF निकालने के लिए: चरण 1: प्रमेयिका से $a = bq + r$ लिखें। चरण 2: यदि $r = 0$ तो $HCF = b$ । चरण 3: अन्यथा b और r पर प्रमेयिका लगाएँ। शेषफल शून्य होने तक दोहराएँ; अंतिम भाजक HCF है। उदाहरण: $HCF(135, 225)$: $225 = 135 \times 1 + 90$; $135 = 90 \times 1 + 45$; $90 = 45 \times 2 + 0$, अतः $HCF = 45$ ।
- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय: प्रत्येक भाज्य संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है और यह गुणनखंडन अद्वितीय होता है (अभाज्य गुणनखंडों के क्रम को छोड़कर)। उदाहरण: $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2$ ।
- अभाज्य गुणनखंडन से HCF और LCM: $HCF =$ उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंडों की सबसे छोटी घातों का गुणनफल। $LCM =$ सभी अभाज्य गुणनखंडों की सबसे बड़ी घातों का गुणनफल। उदाहरण: $36 = 2^2 \times 3^2$ और $56 = 2^3 \times 7$ । $HCF = 2^2 = 4$, $LCM = 2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$ । मुख्य सूत्र: दो धनात्मक पूर्णाकों के लिए $HCF(a, b) \times LCM(a, b) = a \times b$ । (यह केवल दो संख्याओं के लिए सत्य है, तीन के लिए नहीं।)
- अपरिमेयता सिद्ध करना: $\sqrt{p}$ (p अभाज्य) को अपरिमेय सिद्ध करने के लिए विरोधाभास द्वारा प्रमाण लेते हैं। मान लें $\sqrt{p} = a/b$ (a, b सहअभाज्य)। तब $a^2 = pb^2$, अतः p, a^2 को विभाजित करता है, इसलिए p, a को विभाजित करता है। $a = pc$ लें; तब $b^2 = pc^2$, अतः p, b को भी विभाजित करता है। इस प्रकार p, a और b का उभयनिष्ठ गुणनखंड है, जो सहअभाज्य होने के विपरीत है। अतः $\sqrt{p}$ अपरिमेय है। साथ ही: यदि अभाज्य p, a^2 को विभाजित करे तो p, a को विभाजित करता है।

- अपरिमेयता के उपयोगी तथ्य: परिमेय और अपरिमेय संख्या का योग या अंतर अपरिमेय होता है। शून्येतर परिमेय और अपरिमेय का गुणनफल या भागफल अपरिमेय होता है। उदाहरण: $3 + \sqrt{5}$, $2\sqrt{3}$ और $7/\sqrt{2}$ अपरिमेय हैं। दो अपरिमेय संख्याओं का योग परिमेय भी हो सकता है, जैसे $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ ।
- परिमेय संख्याओं का दशमलव प्रसार: मान लें $x = p/q$ परिमेय संख्या है और p, q सहअभाज्य हैं। यदि q का अभाज्य गुणनखंडन $2^n 5^m$ के रूप का हो (n, m अक्रणात्मक पूर्णांक), तो x का दशमलव प्रसार सांत (समाप्त होने वाला) होता है। यदि q में 2 और 5 के अलावा कोई अभाज्य गुणनखंड हो, तो x का दशमलव प्रसार असांत आवर्ती होता है। उदाहरण: $13/3125$ सांत है क्योंकि $3125 = 5^5$; $17/6$ सांत नहीं है क्योंकि $6 = 2 \times 3$ ।

मुख्य शब्दावली

यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका - धनात्मक पूर्णांकों a, b के लिए $a = bq + r$, $0 \leq r < b$ ।

एल्गोरिथ्म - किसी समस्या के हल के लिए स्पष्ट चरणों की श्रृंखला।

यूक्लिड एल्गोरिथ्म - प्रमेयिका को बार-बार लगाकर दो संख्याओं का HCF निकालना।

भाज्य संख्या - दो से अधिक गुणनखंड वाली संख्या; इसका अभाज्य गुणनखंडन होता है।

अभाज्य गुणनखंडन - संख्या को अभाज्य संख्याओं के गुणनफल में लिखना, जैसे $36 = 2^2 \times 3^2$ ।

HCF (महत्तम समापवर्तक) - उभयनिष्ठ अभाज्यों की सबसे छोटी घातों का गुणनफल।

LCM (लघुत्तम समापवर्त्य) - सभी अभाज्यों की सबसे बड़ी घातों का गुणनफल।

HCF $\times$ LCM - दो धनात्मक पूर्णांकों के लिए $HCF \times LCM = a \times b$ ।

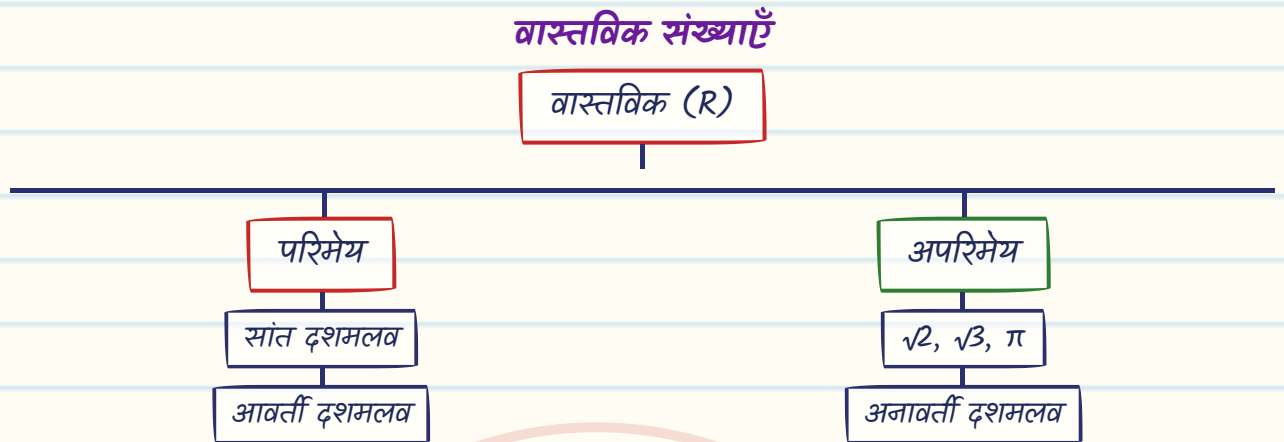
परिमेय संख्या - p/q रूप की संख्या, $q \neq 0$; दशमलव सांत या आवर्ती।

अपरिमेय संख्या - जो p/q रूप में न लिखी जा सके; अनवसानी अनावर्ती।

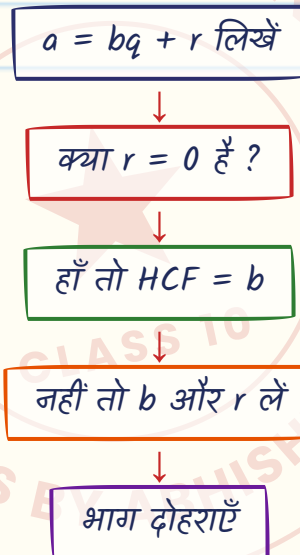
सहअभाज्य - वे संख्याएँ जिनका HCF 1 हो।

विरोधाभास द्वारा प्रमाण - जो सिद्ध करना है उसका उलटा मानकर असंभव स्थिति तक पहुँचना।

आरेख / फ्लोचार्ट



यूक्लिड एल्गोरिथ्म (a, b का HCF)



36 और 56 का HCF और LCM

मद	मान
36	$2^2 \times 3^2$
56	$2^3 \times 7$
HCF	$2^2 = 4$
LCM	$2^3 \times 3^2 \times 7 = 504$
HCF $\times$ LCM	$2016 = 36 \times 56$

p/q का दशमलव प्रसार

सांत

- q केवल $2^n 5^m$
- उदाहरण: $7/8 = 0.875$

असांत आवर्ती

- q में अन्य अभाज्य
- उदाहरण: $1/3 = 0.333...$

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 यूक्लिड विभाजन प्रमेयिका लिखिए और इससे 135 और 225 का HCF ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रमेयिका: $a = bq + r, 0 \leq r < b$ । $225 = 135 \times 1 + 90$; $135 = 90 \times 1 + 45$; $90 = 45 \times 2 + 0$ । अंतिम भाजक 45 है, अतः $HCF = 45$ ।

प्र.2 अंकगणित की आधारभूत प्रमेय लिखिए। 12, 15 और 21 का HCF और LCM ज्ञात कीजिए।

उत्तर- प्रत्येक भाज्य संख्या अभाज्यों का अद्वितीय गुणनफल है। $12 = 2^2 \times 3$; $15 = 3 \times 5$; $21 = 3 \times 7$ । $HCF = 3$; $LCM = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$ ।

प्र.3 सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

उत्तर- मान लें $\sqrt{2} = a/b$, a, b सहअभाज्य। तब $a^2 = 2b^2$, अतः 2, a^2 को विभाजित करता है, इसलिए a को भी। $a = 2c$ लें। तब $4c^2 = 2b^2$, $b^2 = 2c^2$, अतः 2, b को भी विभाजित करता है। यह सहअभाज्य होने के विरुद्ध है। अतः $\sqrt{2}$ अपरिमेय है।

प्र.4 सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

उत्तर- मान लें $3 + 2\sqrt{5} = r$ परिमेय है। तब $\sqrt{5} = (r - 3)/2$ परिमेय होगा। पर $\sqrt{5}$ अपरिमेय है, यह विरोधाभास है। अतः $3 + 2\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

प्र.5 बिना लम्बा भाग किए बताइए कि $13/3125$ का दशमलव प्रसार सांत है या नहीं।

उत्तर- $3125 = 5^5$, अतः हर $2^n 5^m$ रूप का है। इसलिए $13/3125$ सांत है; $13/3125 = 0.00416$ ।

प्र.6 दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $4q + 1$ या $4q + 3$ रूप का होता है।

उत्तर- $a = 4q + r, r = 0, 1, 2, 3$ लें। $r = 0$ और $r = 2$ पर संख्या सम ($4q, 4q + 2$) है। अतः विषम संख्या $4q + 1$ या $4q + 3$ रूप की ही होगी।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] यदि $HCF(26, 91) = 13$ हो तो $LCM(26, 91)$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $LCM = (26 \times 91)/13 = 182$

प्र.2 [1 अंक] 140 का अभाज्य गुणनखंडन लिखिए।

उत्तर- $140 = 2^2 \times 5 \times 7$

प्र.3 [2 अंक] अभाज्य गुणनखंडन से 96 और 404 का HCF और फिर LCM ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $96 = 2^5 \times 3$; $404 = 2^2 \times 101$ | $HCF = 4$ | $LCM = (96 \times 404)/4 = 9696$

प्र.4 [2 अंक] जाँचिए कि क्या किसी प्राकृत संख्या n के लिए 6^n का अंतिम अंक 0 हो सकता है।

उत्तर- अंक 0 पर समाप्त होने के लिए संख्या 5 से विभाज्य होनी चाहिए। $6^n = 2^n \times 3^n$ में 5 अभाज्य गुणनखंड नहीं है, अतः 6^n कभी 0 पर समाप्त नहीं होगा।

प्र.5 [3 अंक] दर्शाइए कि $(7 \times 11 \times 13 + 13)$ भाज्य संख्या है।

उत्तर- $= 13(7 \times 11 + 1) = 13 \times 78$, जिसके 1 और स्वयं के अलावा भी गुणनखंड हैं। अतः यह भाज्य है।

प्र.6 [3 अंक] सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ अपरिमेय है।

उत्तर- मान लें $\sqrt{3} = a/b$ (सहअभाज्य)। $a^2 = 3b^2$, अतः 3, a को विभाजित करता है; $a = 3c$; तब $b^2 = 3c^2$, अतः 3, b को भी विभाजित करता है। उभयनिष्ठ गुणनखंड 3 सहअभाज्य होने के विरुद्ध है। अतः $\sqrt{3}$ अपरिमेय है।