

Chapter Review

- Surface area and volume: Surface area is the total area of the outer surface of a solid (measured in square units); volume is the space occupied by it (measured in cubic units). In this chapter we study cuboid, cube, cylinder, cone, sphere and hemisphere, then combinations of solids, conversion of solids and the frustum of a cone.
- Cuboid (l, b, h): $TSA = 2(lb + bh + lh)$; LSA (four walls) $= 2h(l + b)$; Volume $= lbh$; Diagonal $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$. Cube (edge l): $TSA = 6l^2$; $LSA = 4l^2$; Volume $= l^3$; Diagonal $= \sqrt{3}l$. Example: cuboid $10 \times 8 \times 6$ has $TSA = 2(80 + 48 + 60) = 376 \text{ cm}^2$.
- Cylinder (radius r , height h): $CSA = 2\pi rh$; $TSA = 2\pi r(r + h)$; Volume $= \pi r^2 h$. Opening the curved surface gives a rectangle $2\pi r$ by h . Example: $r = 7 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: $CSA = 2 \times (22/7) \times 7 \times 10 = 440 \text{ cm}^2$ and volume $= (22/7) \times 49 \times 10 = 1540 \text{ cm}^3$.
- Cone (radius r , height h , slant height l): $l = \sqrt{r^2 + h^2}$; $CSA = \pi rl$; $TSA = \pi r(l + r)$; Volume $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$. Three cones of the same base and height fill one cylinder. Example: $r = 7$, $h = 24$ gives $l = 25$, $CSA = 550 \text{ cm}^2$ and volume $= 1232 \text{ cm}^3$.
- Sphere (radius r): Surface area $= 4\pi r^2$; Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$. Hemisphere: $CSA = 2\pi r^2$; $TSA = 3\pi r^2$ ($CSA + \text{base area}$); Volume $= \frac{2}{3}\pi r^3$. Example: sphere of radius 21 cm has surface area 5544 cm^2 and volume 38808 cm^3 .
- Combination of solids: When solids are joined (cone on a hemisphere, cylinder with hemispherical ends, toy or capsule), the total volume is the sum of the volumes. The total surface area is the sum of the curved surfaces only; the joined faces are not counted. Example: cone ($r = 3$, $h = 4$) on a hemisphere ($r = 3$): $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 + \frac{2}{3}\pi \cdot 27 = 12\pi + 18\pi = 30\pi \text{ cm}^3$.

- **Conversion of solids:** When a solid is melted and recast into another shape, the volume remains the same. Example: a metallic sphere of radius 9 cm is melted into a cylinder of radius 6 cm: $\frac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi(6)^2h$ gives $h = 27$ cm. Similarly, number of small solids made = volume of big solid $\div$ volume of one small solid.
- **Frustum of a cone:** When a cone is cut by a plane parallel to its base, the lower part is called a frustum. With radii r_1 and r_2 and height h : slant height $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$; Volume = $\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$; CSA = $\pi l(r_1 + r_2)$; TSA = $\pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$. Example: bucket in the shape of a frustum with $r_1 = 15$, $r_2 = 5$, $h = 24$ has $l = 26$ and volume = 2600π cm³.

Key Terms

Surface Area – Total area of the outer surface of a solid, in square units.

Volume – Space occupied by a solid, in cubic units.

CSA / LSA – Curved or lateral surface area, excluding bases.

TSA – Total surface area including all faces and bases.

Slant Height – Length $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ along the surface of a cone.

Cuboid – Solid with six rectangular faces, l bh.

Cylinder – Solid with two circular bases; volume πr^2h .

Cone – Solid with a circular base tapering to a point; $\frac{1}{3}\pi r^2h$.

Sphere – Perfectly round solid; volume $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Hemisphere – Half of a sphere; volume $\frac{2}{3}\pi r^3$.

Frustum – Part of a cone left after cutting off the top by a parallel plane.

Recasting – Melting a solid to make another; volume stays the same.

Diagrams / Flowcharts

Surface Areas

Solid	CSA	TSA
Cuboid	$2h(l+b)$	$2(lb+bh+lh)$
Cube	$4l^2$	$6l^2$
Cylinder	$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$
Cone	πrl	$\pi r(l+r)$
Sphere	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
Hemisphere	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$

Volumes

Solid	Volume
Cuboid	lbh
Cube	l^3
Cylinder	$\pi r^2 h$
Cone	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
Sphere	$\frac{4}{3}\pi r^3$
Hemisphere	$\frac{2}{3}\pi r^3$
Frustum	$\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Recasting a Solid

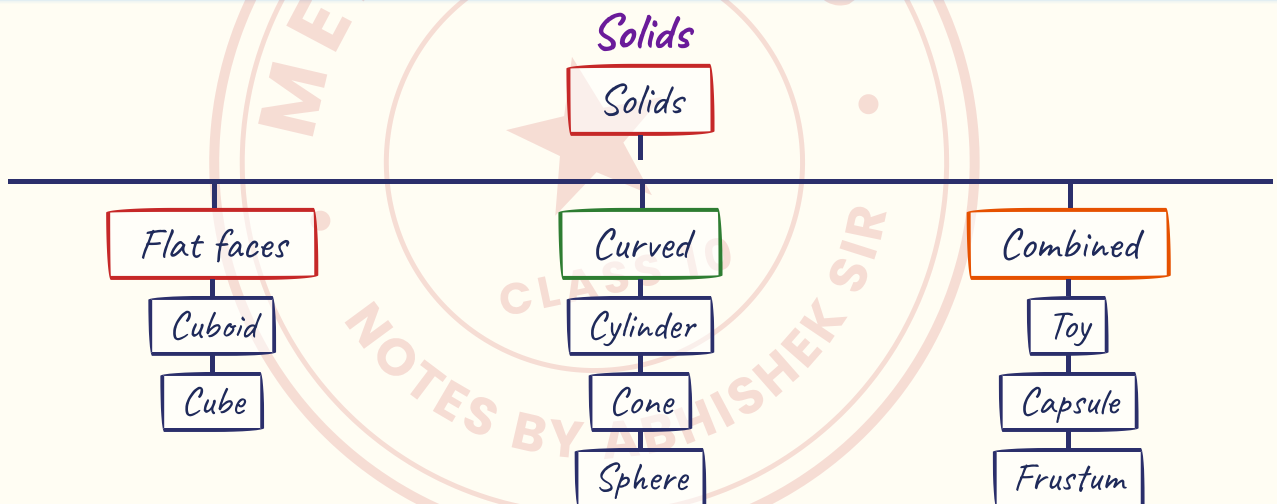
Find volume of the original solid

Volume stays the same

Equate to the new solid volume

Solve for the unknown

Write answer with units



Textbook Exercise Questions

Q.1 Find the volume and CSA of a cone of radius 7 cm and height 24 cm.

Ans. $l = \sqrt{49 + 576} = 25$ cm. $CSA = (22/7) \times 7 \times 25 = 550$ cm². $Volume = \frac{1}{3} \times (22/7) \times 49 \times 24 = 1232$ cm³.

Q.2 Find the volume and surface area of a sphere of radius 21 cm.

Ans. $Volume = \frac{4}{3} \times (22/7) \times 21^3 = 38808$ cm³. $Surface\ area = 4 \times (22/7) \times 441 = 5544$ cm².

Q.3 A metallic sphere of radius 9 cm is melted and recast into a cylinder of radius 6 cm. Find its height.

Ans. $\frac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi(6)^2h$, so $972 = 36h$, $h = 27$ cm.

Q.4 Two cubes each of volume 64 cm^3 are joined end to end. Find the surface area of the resulting cuboid.

Ans. Edge = 4 cm. Cuboid is $8 \times 4 \times 4$. TSA = $2(32 + 16 + 32) = 160 \text{ cm}^2$.

Q.5 A solid is a cone on a hemisphere, both of radius 3 cm, cone height 4 cm. Find the volume. ($\pi = 22/7$)

Ans. $V = \frac{1}{3}\pi(9)(4) + \frac{4}{3}\pi(27) = 12\pi + 18\pi = 30\pi = 94.29 \text{ cm}^3$.

Q.6 A bucket in the shape of a frustum has height 24 cm and radii 15 cm and 5 cm. Find its capacity and the slant height.

Ans. $l = \sqrt{(24)^2 + (10)^2} = 26$ cm. Volume = $\frac{1}{3} \times (22/7) \times 24 \times (225 + 25 + 75) = 8171.43 \text{ cm}^3$ (approx).

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] Write the formula for the total surface area of a hemisphere of radius r .

Ans. $3\pi r^2$.

Q.2 [1 mark] The radius of a sphere is doubled. By what factor does its volume increase?

Ans. Volume $\propto r^3$, so it becomes 8 times.

Q.3 [2 marks] Find the TSA of a cube of edge 5 cm.

Ans. $6 \times 25 = 150 \text{ cm}^2$.

Q.4 [2 marks] A cone of height 24 cm and radius 6 cm is recast into a sphere. Find the radius of the sphere.

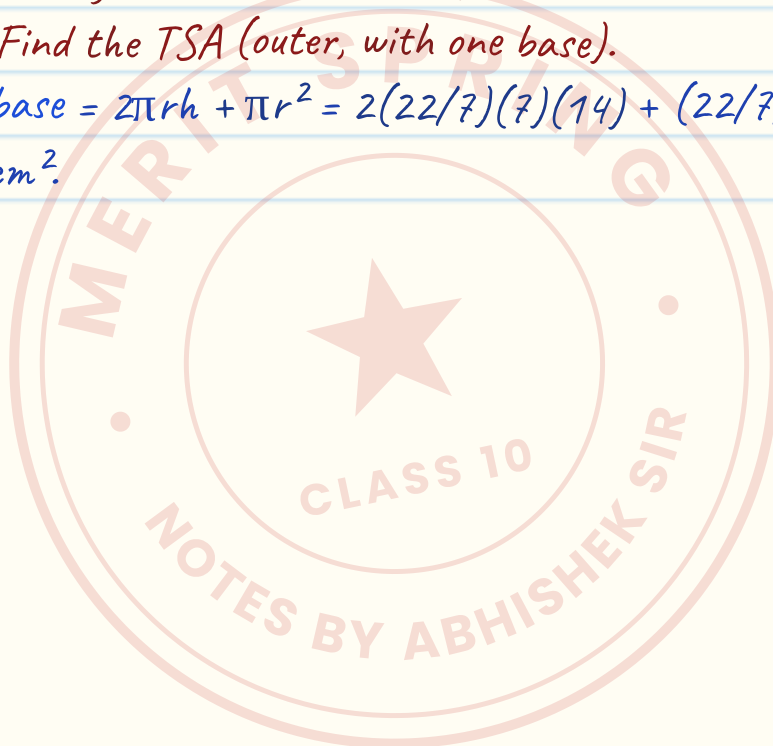
Ans. $\frac{1}{3}\pi(36)(24) = \frac{4}{3}\pi r^3$ gives $r^3 = 216$, $r = 6$ cm.

Q.5 [3 marks] A solid metallic sphere of radius 4.2 cm is melted and recast into a cylinder of radius 6 cm. Find the height of the cylinder.

Ans. $\frac{4}{3}\pi(4.2)^3 = \pi(36)h$. $h = (4/3)(74.088)/36 = 2.744$ cm.

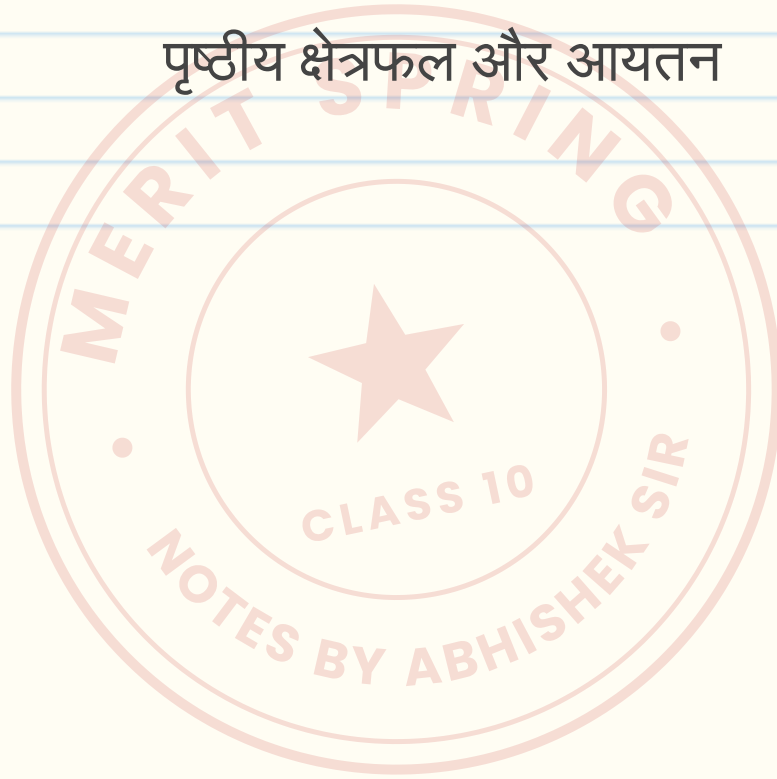
Q.6 [3 marks] A cylindrical vessel of height 14 cm and radius 7 cm is open at the top. Find the TSA (outer, with one base).

Ans. $CSA + \text{base} = 2\pi rh + \pi r^2 = 2(22/7)(7)(14) + (22/7)(49) = 616 + 154 = 770 \text{ cm}^2$.



HINDI VERSION

पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन



अध्याय समीक्षा

- पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन: पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोस की बाहरी सतह का कुल क्षेत्रफल है (वर्ग इकाई में); आयतन उसके द्वारा घेरा गया स्थान है (घन इकाई में)। इस अध्याय में घनाभ, घन, बेलन, शंकु, गोला और अर्धगोला, फिर ठोसों के संयोजन, ठोसों का रूपांतरण और शंकु का छिन्नक पढ़ते हैं।
- घनाभ (l, b, h): कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(lb + bh + lh)$; पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल (चार दीवारें) $= 2h(l + b)$; आयतन $= lbh$; विकर्ण $= \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$ । घन (कोर 1): कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 6l^2$; पार्श्व $= 4l^2$; आयतन $= l^3$; विकर्ण $= \sqrt{3} l$ । उदाहरण: $10 \times 8 \times 6$ के घनाभ का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2(80 + 48 + 60) = 376 \text{ cm}^2$ ।
- बेलन (त्रिज्या r , ऊँचाई h): वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$; कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(r + h)$; आयतन $= \pi r^2 h$ । वक्र पृष्ठ को खोलने पर $2\pi r \times h$ का आयत मिलता है। उदाहरण: $r = 7 \text{ cm}$, $h = 10 \text{ cm}$: वक्र पृष्ठ $= 2 \times (22/7) \times 7 \times 10 = 440 \text{ cm}^2$ और आयतन $= (22/7) \times 49 \times 10 = 1540 \text{ cm}^3$ ।
- शंकु (त्रिज्या r , ऊँचाई h , तिर्यक ऊँचाई l): $l = \sqrt{r^2 + h^2}$; वक्र पृष्ठ $= \pi rl$; कुल पृष्ठ $= \pi r(l + r)$; आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$ । समान आधार और ऊँचाई के तीन शंकु मिलकर एक बेलन भरते हैं। उदाहरण: $r = 7$, $h = 24$ से $l = 25$, वक्र पृष्ठ $= 550 \text{ cm}^2$ और आयतन $= 1232 \text{ cm}^3$ ।
- गोला (त्रिज्या r): पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 4\pi r^2$; आयतन $= \frac{4}{3}\pi r^3$ । अर्धगोला: वक्र पृष्ठ $= 2\pi r^2$; कुल पृष्ठ $= 3\pi r^2$ (वक्र पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल); आयतन $= \frac{2}{3}\pi r^3$ । उदाहरण: 21 cm त्रिज्या के गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल 5544 cm^2 और आयतन 38808 cm^3 है।
- ठोसों का संयोजन: जब ठोस जुड़े हों (अर्धगोले पर शंकु, अर्धगोलीय सिरों वाला बेलन, खिलौना या कैप्सूल) तो कुल आयतन उनके आयतनों का योग होता है। कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल केवल वक्र पृष्ठों का योग होता है; जुड़े हुए तल नहीं गिने जाते। उदाहरण: अर्धगोले ($r = 3$) पर शंकु ($r = 3$, $h = 4$): $V = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 + \frac{2}{3}\pi \cdot 27 = 12\pi + 18\pi = 30\pi \text{ cm}^3$ ।
- ठोसों का रूपांतरण: जब किसी ठोस को पिघलाकर दूसरे आकार में ढाला जाता है तो आयतन समान रहता है। उदाहरण: 9 cm त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 6 cm त्रिज्या का बेलन बनाया: $\frac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi(6)^2 h$ से $h = 27 \text{ cm}$ । इसी प्रकार बने छोटे ठोसों की संख्या $=$ बड़े ठोस का आयतन $\div$ एक छोटे ठोस का आयतन।

- शंकु का छिन्नक: जब शंकु को आधार के समांतर तल से काटा जाता है तो निचला भाग छिन्नक कहलाता है। त्रिज्याएँ r_1 , r_2 और ऊँचाई h हो तो तिर्यक ऊँचाई $l = \sqrt{h^2 + (r_1 - r_2)^2}$; आयतन $= \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1r_2)$; वक्र पृष्ठ $= \pi l(r_1 + r_2)$; कुल पृष्ठ $= \pi l(r_1 + r_2) + \pi(r_1^2 + r_2^2)$ । उदाहरण: $r_1 = 15$, $r_2 = 5$, $h = 24$ वाली छिन्नक आकार की बाल्टी में $l = 26$ और आयतन $= 2600\pi \text{ cm}^3$ ।

मुख्य शब्दावली

पृष्ठीय क्षेत्रफल - ठोस की बाहरी सतह का कुल क्षेत्रफल, वर्ग इकाई में।

आयतन - ठोस द्वारा घेरा गया स्थान, घन इकाई में।

CSA / LSA - वक्र या पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल, आधार छोड़कर।

TSA - सभी तलों और आधारों सहित कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल।

तिर्यक ऊँचाई - शंकु की सतह पर लंबाई $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ ।

घनाभ - छह आयताकार फलकों वाला ठोस, आयतन lbh ।

बेलन - दो वृत्ताकार आधारों वाला ठोस; आयतन $\pi r^2 h$ ।

शंकु - वृत्ताकार आधार से शीर्ष तक नुकीला ठोस; $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ।

गोला - पूर्णतः गोल ठोस; आयतन $\frac{4}{3}\pi r^3$ ।

अर्धगोला - गोले का आधा भाग; आयतन $\frac{2}{3}\pi r^3$ ।

छिन्नक - समांतर तल से ऊपरी भाग काटने पर शंकु का शेष भाग।

पुनः ढालना - ठोस को पिघलाकर दूसरा बनाना; आयतन समान रहता है।

आरेख / फ्लोचार्ट

पृष्ठीय क्षेत्रफल

ठोस	CSA	TSA
घनाभ	$2h(l+b)$	$2(lb+bh+lh)$
घन	$4l^2$	$6l^2$
बेलन	$2\pi rh$	$2\pi r(r+h)$
शंकु	πrl	$\pi r(l+r)$
गोला	$4\pi r^2$	$4\pi r^2$
अर्धगोला	$2\pi r^2$	$3\pi r^2$

आयतन

ठोस	आयतन
घनाभ	lbh
घन	l^3
बेलन	$\pi r^2 h$
शंकु	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
गोला	$\frac{4}{3}\pi r^3$
अर्धगोला	$\frac{2}{3}\pi r^3$
छिन्नक	$\frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

ठोस को पुनः ढालना

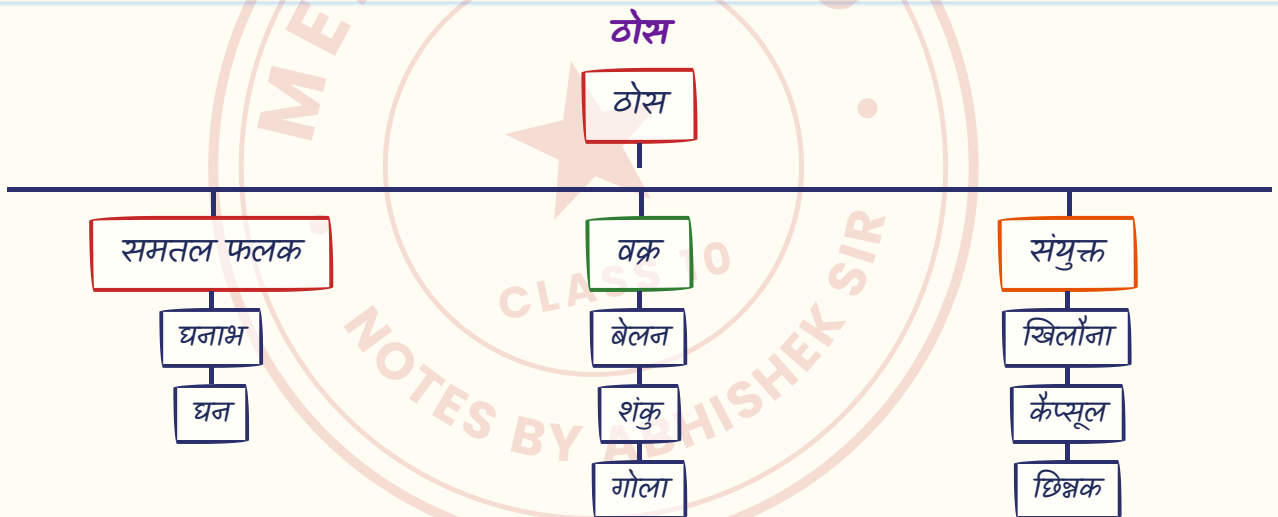
मूल ठोस का आयतन निकालें

आयतन समान रहता है

नए ठोस के आयतन से बराबर करें

अज्ञात हल करें

मात्रक सहित उत्तर लिखें



पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 7 cm त्रिज्या और 24 cm ऊँचाई वाले शंकु का आयतन और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $l = \sqrt{(49 + 576)} = 25 \text{ cm}$ । वक्र पृष्ठ = $(22/7) \times 7 \times 25 = 550 \text{ cm}^2$ । आयतन = $\frac{1}{3} \times (22/7) \times 49 \times 24 = 1232 \text{ cm}^3$ ।

प्र.2 21 cm त्रिज्या के गोले का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- आयतन = $\frac{4}{3} \times (22/7) \times 21^3 = 38808 \text{ cm}^3$ । पृष्ठीय क्षेत्रफल = $4 \times (22/7) \times 21^2 = 5544 \text{ cm}^2$ ।

प्र.3 9 cm त्रिज्या के धातु के गोले को पिघलाकर 6 cm त्रिज्या का बेलन बनाया गया। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\frac{4}{3}\pi(9)^3 = \pi(6)^2h$, अतः $972 = 36h$, $h = 27 \text{ cm}$ ।

प्र.4 64 cm^3 आयतन के दो घनों को आमने-सामने जोड़ा गया। बने घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- कोर = 4 cm। घनाभ $8 \times 4 \times 4$ है। $TSA = 2(32 + 16 + 32) = 160 \text{ cm}^2$ ।

प्र.5 एक ठोस अर्धगोले पर शंकु है, दोनों की त्रिज्या 3 cm और शंकु की ऊँचाई 4 cm है। आयतन ज्ञात कीजिए। ($\pi = 22/7$)

उत्तर- $V = \frac{1}{3}\pi(9)(4) + \frac{2}{3}\pi(27) = 12\pi + 18\pi = 30\pi = 94.29 \text{ cm}^3$ ।

प्र.6 छिन्नक आकार की बाल्टी की ऊँचाई 24 cm और त्रिज्याएँ 15 cm और 5 cm हैं। उसकी धारिता और तिर्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $l = \sqrt{(24)^2 + (10)^2} = 26 \text{ cm}$ । आयतन = $\frac{1}{3} \times (22/7) \times 24 \times (225 + 25 + 75) = 8171.43 \text{ cm}^3$ (लगभग)।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] त्रिज्या r के अर्धगोले के कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

उत्तर- $3\pi r^2$ ।

प्र.2 [1 अंक] गोले की त्रिज्या दुगुनी करने पर उसका आयतन कितने गुना हो जाएगा?

उत्तर- आयतन $\propto r^3$, अतः 8 गुना।

प्र.3 [2 अंक] 5 cm कोर वाले घन का कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $6 \times 25 = 150 \text{ cm}^2$ ।

प्र.4 [2 अंक] 24 cm ऊँचाई और 6 cm त्रिज्या के शंकु को गोले में ढाला गया। गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\frac{4}{3}\pi(36)(24) = \frac{4}{3}\pi r^3$ से $r^3 = 216$, $r = 6$ cm।

प्र.5 [3 अंक] 4.2 cm त्रिज्या के ठोस धातु के गोले को पिघलाकर 6 cm त्रिज्या का बेलन बनाया गया। बेलन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\frac{4}{3}\pi(4.2)^3 = \pi(36)h$ । $h = (4/3)(74.088)/36 = 2.744$ cm।

प्र.6 [3 अंक] ऊपर से खुले बेलनाकार बर्तन की ऊँचाई 14 cm और त्रिज्या 7 cm है। (एक आधार सहित) बाहरी पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- वक्र पृष्ठ + आधार = $2\pi rh + \pi r^2 = 2(22/7)(7)(14) + (22/7)(49) = 616 + 154 = 770$ cm²।

