

Chapter Review

- **Circle and a line:** For a circle and a line in a plane there are three possibilities: (i) the line does not intersect the circle (non-intersecting), (ii) the line touches the circle at exactly one point (tangent), (iii) the line cuts the circle at two points (secant). The common point in case (ii) is the point of contact.
- **Tangent:** A tangent to a circle is a line that touches the circle at exactly one point; that point is called the point of contact. For every point on the circle there is a unique tangent passing through it. A tangent can be seen as a special case of a secant when the two end points of the corresponding chord coincide.
- **Secant and parallel tangents:** A secant is a line that intersects the circle at two points, forming a chord. For any given secant of a circle there are exactly two tangents parallel to it, touching the circle at two diametrically opposite points. A circle can have infinitely many tangents, but only one at each point.
- **Theorem 10.1:** The tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact. Proof idea: take a point Q on the tangent other than P ; Q lies outside the circle so $OQ > OP$. So OP is the shortest distance from O to the tangent line, hence $OP \perp$ tangent. Consequence: the perpendicular at the point of contact to the tangent passes through the centre.
- **Number of tangents from a point:** From a point inside the circle no tangent can be drawn (any line is a secant). From a point on the circle exactly one tangent can be drawn. From a point outside the circle exactly two tangents can be drawn.

- **Length of a tangent:** The length of the tangent from an external point P to a circle is the length of the segment from P to the point of contact.
Theorem 10.2: The lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal. Proof: PA and PB are tangents from P , O is the centre. In right triangles OAP and OBP , $OA = OB$ (radii), OP is common, so by RHS they are congruent and $PA = PB$.
- **Consequences:** Tangents from an external point are equally inclined to the line joining the point to the centre ($\angle APO = \angle BPO$). The centre lies on the bisector of the angle between the two tangents. The angle between the two tangents drawn from an external point is supplementary to the angle subtended by the line segment joining the points of contact at the centre: $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$.
- **Important facts:** The tangents at the end points of a diameter are parallel. In two concentric circles, the chord of the larger circle which touches the smaller circle is bisected at the point of contact. A parallelogram circumscribing a circle is a rhombus. The opposite sides of a quadrilateral circumscribing a circle subtend supplementary angles at the centre, and $AB + CD = AD + BC$ for a circumscribed quadrilateral. Use Pythagoras with the radius: $PT^2 = OP^2 - OT^2$.

Key Terms

Tangent – Line touching the circle at exactly one point.

Secant – Line cutting the circle at two points.

Point of Contact – The single common point of a tangent and the circle.

Chord – Line segment joining two points on the circle.

Radius – Distance from the centre to any point on the circle.

Diameter – Chord through the centre; twice the radius.

Theorem 10.1 – Tangent is perpendicular to the radius at the point of contact.

Theorem 10.2 – Tangents from an external point are equal in length.

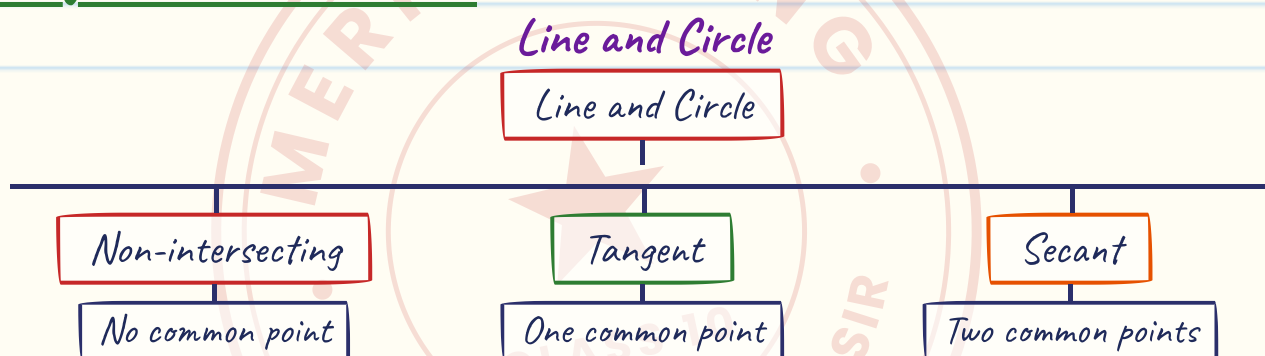
Length of Tangent – Distance from the external point to the point of contact.

Concentric Circles – Circles with the same centre but different radii.

Circumscribed Quadrilateral – Quadrilateral whose sides all touch a circle.

Supplementary Angles – Angles whose sum is 180° .

Diagrams / Flowcharts



Tangents from a Point

Position of point	Tangents possible
Inside the circle	None
On the circle	Exactly one
Outside the circle	Exactly two

Tangent Length by Pythagoras

Join centre O to contact T



$OT \perp PT$ (Theorem 10.1)



Triangle OTP is right-angled



$$PT^2 = OP^2 - OT^2$$



Find the tangent length PT

Two Theorems

Theorem 10.1

- Tangent $\perp$ radius
- At the point of contact

Theorem 10.2

- $PA = PB$
- Tangents from external point

Textbook Exercise Questions

Q.1 Prove that the tangent at any point of a circle is perpendicular to the radius through the point of contact.

Ans. Let XY be tangent at P , centre O . Take Q on XY other than P . Q lies outside the circle, so $OQ > OP$. This is true for every Q , so OP is the shortest distance from O to XY . Hence $OP \perp XY$.

Q.2 Prove that the lengths of tangents drawn from an external point to a circle are equal.

Ans. PA and PB are tangents from P . $OA \perp PA$ and $OB \perp PB$. In right $\triangle OAP$ and $\triangle OBP$: $OA = OB$ (radii), OP common. By RHS, $\triangle OAP \cong \triangle OBP$. So $PA = PB$.

Q.3 The length of a tangent from a point at a distance 5 cm from the centre is 4 cm. Find the radius.

Ans. $r^2 = OP^2 - PT^2 = 25 - 16 = 9$, so $r = 3$ cm.

Q.4 Two tangents PA and PB are drawn from P to a circle with centre O and $\angle APB = 80^\circ$. Find $\angle POA$.

Ans. $\angle AOB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$, and OP bisects it, so $\angle POA = 50^\circ$.

Q.5 Prove that a parallelogram circumscribing a circle is a rhombus.

Ans. Sides AB, BC, CD, DA touch the circle, so $AB + CD = AD + BC$. In a parallelogram $AB = CD$ and $AD = BC$, so $2AB = 2AD$, $AB = AD$. All sides are equal, so it is a rhombus.

Q.6 Prove that the tangents drawn at the ends of a diameter of a circle are parallel.

Ans. Tangents at the ends A and B of a diameter are perpendicular to radii OA and OB. The angles with the diameter are 90° each and are alternate angles, so the tangents are parallel.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] How many tangents can be drawn to a circle from a point outside it?

Ans. Two.

Q.2 [1 mark] If PA and PB are tangents from P and $\angle APB = 60^\circ$, what is $\angle OAB$?

Ans. $\angle AOB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$, so $\angle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$.

Q.3 [2 marks] A tangent PQ at P to a circle of radius 5 cm meets a line through the centre O at Q so that OQ = 12 cm. Find PQ.

Ans. $PQ^2 = 144 - 25 = 119$, $PQ = \sqrt{119}$ cm.

Q.4 [2 marks] In two concentric circles, a chord of the larger circle touches the smaller. If the radii are 5 cm and 3 cm, find the chord length.

Ans. Half chord = $\sqrt{(25 - 9)} = 4$, so chord = 8 cm.

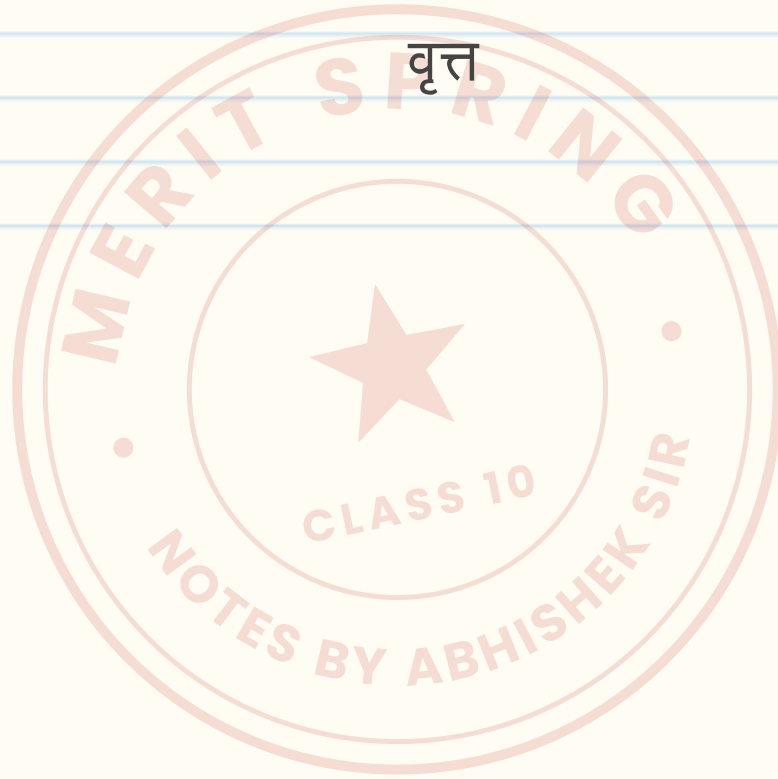
Q.5 [3 marks] Prove that the angle between two tangents drawn from an external point to a circle is supplementary to the angle subtended by the line segment joining the points of contact at the centre.

Ans. $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$. In quadrilateral OAPB the sum of angles is 360° , so $\angle APB + \angle AOB = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$.

Q.6 [3 marks] A quadrilateral ABCD is drawn to circumscribe a circle. Prove that $AB + CD = AD + BC$.

Ans. Tangents from each vertex are equal: $AP = AS$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DS$. Adding: $AB + CD = (AP + BP) + (CR + DR) = AS + BQ + CQ + DS = AD + BC$.

HINDI VERSION



अध्याय समीक्षा

- वृत्त और रेखा: तल में वृत्त और रेखा की तीन स्थितियाँ संभव हैं: (i) रेखा वृत्त को नहीं काटती (अप्रतिच्छेदी), (ii) रेखा वृत्त को ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करती है (स्पर्श रेखा), (iii) रेखा वृत्त को दो बिंदुओं पर काटती है (छेदक रेखा)। स्थिति (ii) में उभयनिष्ठ बिंदु स्पर्श बिंदु कहलाता है।
- स्पर्श रेखा: वृत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो वृत्त को ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करे; उस बिंदु को स्पर्श बिंदु कहते हैं। वृत्त के प्रत्येक बिंदु पर से एक अद्वितीय स्पर्श रेखा गुजरती है। स्पर्श रेखा को छेदक रेखा की विशेष स्थिति माना जा सकता है जब संगत जीवा के दोनों सिरे संपाती हो जाएँ।
- छेदक रेखा और समांतर स्पर्श रेखाएँ: छेदक रेखा वह रेखा है जो वृत्त को दो बिंदुओं पर काटकर जीवा बनाती है। वृत्त की किसी भी छेदक रेखा के समांतर ठीक दो स्पर्श रेखाएँ होती हैं जो वृत्त को दो व्यासांत बिंदुओं पर स्पर्श करती हैं। वृत्त की अनंत स्पर्श रेखाएँ हो सकती हैं, पर प्रत्येक बिंदु पर केवल एक।
- प्रमेय 10.1: वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है। प्रमाण का विचार: स्पर्श रेखा पर P के अलावा बिंदु Q लें; Q वृत्त के बाहर है, अतः $OQ > OP$ इसलिए O से स्पर्श रेखा की न्यूनतम दूरी OP है, अतः $OP \perp$ स्पर्श रेखा। परिणाम: स्पर्श बिंदु पर स्पर्श रेखा का लंब केंद्र से होकर जाता है।
- किसी बिंदु से स्पर्श रेखाओं की संख्या: वृत्त के अंदर स्थित बिंदु से कोई स्पर्श रेखा नहीं खींची जा सकती (हर रेखा छेदक होती है)। वृत्त पर स्थित बिंदु से ठीक एक स्पर्श रेखा खींची जा सकती है। वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से ठीक दो स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं।
- स्पर्श रेखा की लंबाई: बाह्य बिंदु P से वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई, P से स्पर्श बिंदु तक के रेखाखंड की लंबाई है। प्रमेय 10.2: बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं। प्रमाण: P से PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं, O केंद्र है। समकोण त्रिभुजों OAP और OBP में $OA = OB$ (त्रिज्याएँ), OP उभयनिष्ठ, अतः RHS से सर्वांगसम और $PA = PB$ ।
- परिणाम: बाह्य बिंदु से खींची स्पर्श रेखाएँ बिंदु और केंद्र को मिलाने वाली रेखा से समान कोण बनाती हैं ($\angle APO = \angle BPO$)। केंद्र दोनों स्पर्श रेखाओं के बीच के कोण के समद्विभाजक पर होता है। बाह्य बिंदु से खींची दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर बने कोण का संपूरक होता है: $\angle APB + \angle AOB = 180^\circ$ ।

- महत्वपूर्ण तथ्य: व्यास के सिरों पर खींची स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं। दो संकेंद्री वृत्तों में बड़े वृत्त की वह जीवा जो छोटे वृत्त को स्पर्श करे, स्पर्श बिंदु पर समद्विभाजित होती है। वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है। वृत्त के परिगत चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ केंद्र पर संपूरक कोण बनाती हैं और $AB + CD = AD + BC$ होता है। त्रिज्या के साथ पाइथागोरस लगाएँ: $PT^2 = OP^2 - OT^2$ ।

मुख्य शब्दावली

स्पर्श रेखा - वृत्त को ठीक एक बिंदु पर स्पर्श करने वाली रेखा।

छेदक रेखा - वृत्त को दो बिंदुओं पर काटने वाली रेखा।

स्पर्श बिंदु - स्पर्श रेखा और वृत्त का एकमात्र उभयनिष्ठ बिंदु।

जीवा - वृत्त के दो बिंदुओं को मिलाने वाला रेखाखंड।

त्रिज्या - केंद्र से वृत्त के किसी बिंदु तक की दूरी।

व्यास - केंद्र से जाने वाली जीवा; त्रिज्या का दुगुना।

प्रमेय 10.1 - स्पर्श बिंदु पर स्पर्श रेखा त्रिज्या पर लंब होती है।

प्रमेय 10.2 - बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ लंबाई में बराबर होती हैं।

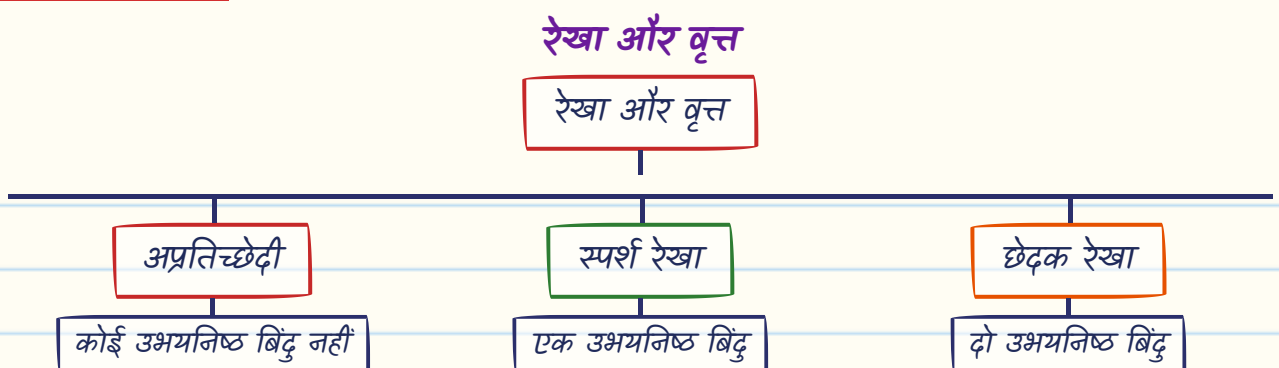
स्पर्श रेखा की लंबाई - बाह्य बिंदु से स्पर्श बिंदु तक की दूरी।

संकेंद्री वृत्त - समान केंद्र पर भिन्न त्रिज्याओं वाले वृत्त।

परिगत चतुर्भुज - वह चतुर्भुज जिसकी चारों भुजाएँ वृत्त को स्पर्श करें।

संपूरक कोण - वे कोण जिनका योग 180° हो।

आरेख / फ्लोचार्ट



बिंदु से स्पर्श रेखाएँ

बिंदु की स्थिति	स्पर्श रेखाएँ
वृत्त के अंदर	कोई नहीं
वृत्त पर	ठीक एक
वृत्त के बाहर	ठीक दो

पाइथागोरस से स्पर्श रेखा की लंबाई

केंद्र O को स्पर्श बिंदु T से मिलाएँ



$OT \perp PT$ (प्रमेय 10.1)



त्रिभुज OTP समकोण है



$$PT^2 = OP^2 - OT^2$$



स्पर्श रेखा की लंबाई PT निकालें

दो प्रमेयें

प्रमेय 10.1

- स्पर्श रेखा $\perp$ त्रिव्या
- स्पर्श बिंदु पर

प्रमेय 10.2

- $PA = PB$
- बाह्य बिंदु से स्पर्श रेखाएँ

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 सिद्ध कीजिए कि वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

उत्तर- XY , P पर स्पर्श रेखा है और O केंद्र। XY पर P के अलावा बिंदु Q लें। Q वृत्त के बाहर है, अतः $OQ > OP$ । यह प्रत्येक Q के लिए सत्य है, अतः O से XY की न्यूनतम दूरी OP है। इसलिए $OP \perp XY$ ।

प्र.2 सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची स्पर्श रेखाओं की लंबाइयाँ बराबर होती हैं।

उत्तर- P से PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं। $OA \perp PA$ और $OB \perp PB$ । समकोण $\triangle OAP$ और $\triangle OBP$ में $OA = OB$ (त्रिज्याएँ), OP उभयनिष्ठ। RHS से $\triangle OAP \cong \triangle OBP$ । अतः $PA = PB$ ।

प्र.3 केंद्र से 5 cm दूर स्थित बिंदु से स्पर्श रेखा की लंबाई 4 cm है। त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $r^2 = OP^2 - PT^2 = 25 - 16 = 9$, अतः $r = 3\text{ cm}$ ।

प्र.4 वृत्त के बाह्य बिंदु P से स्पर्श रेखाएँ PA और PB खींची गई हैं और $\angle APB = 80^\circ$ है। $\angle POA$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\angle AOB = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ और OP इसे समद्विभाजित करता है, अतः $\angle POA = 50^\circ$ ।

प्र.5 सिद्ध कीजिए कि वृत्त के परिगत समांतर चतुर्भुज समचतुर्भुज होता है।

उत्तर- भुजाएँ AB , BC , CD , DA वृत्त को स्पर्श करती हैं, अतः $AB + CD = AD + BC$ । समांतर चतुर्भुज में $AB = CD$ और $AD = BC$, अतः $2AB = 2AD$, $AB = AD$ । सभी भुजाएँ बराबर हैं, अतः समचतुर्भुज।

प्र.6 सिद्ध कीजिए कि वृत्त के व्यास के सिरे पर खींची स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

उत्तर- व्यास के सिरे A और B पर स्पर्श रेखाएँ त्रिज्याओं OA और OB पर लंब हैं। व्यास के साथ बने कोण 90° हैं और एकांतर कोण हैं, अतः स्पर्श रेखाएँ समांतर हैं।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] वृत्त के बाहर स्थित बिंदु से कितनी स्पर्श रेखाएँ खींची जा सकती हैं?

उत्तर- दो।

प्र.2 [1 अंक] यदि P से PA और PB स्पर्श रेखाएँ हैं और $\angle APB = 60^\circ$ हैं तो $\angle OAB$ क्या है?

उत्तर- $\angle AOB = 120^\circ$, अतः $\angle OAB = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$

प्र.3 [2 अंक] 5 cm त्रिज्या के वृत्त की P पर स्पर्श रेखा PQ केंद्र O से जाने वाली रेखा को Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 12$ cm। PQ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $PQ^2 = 144 - 25 = 119$, $PQ = \sqrt{119}$ cm।

प्र.4 [2 अंक] दो संकेंद्री वृत्तों में बड़े वृत्त की जीवा छोटे वृत्त को स्पर्श करती है। त्रिज्याएँ 5 cm और 3 cm हैं तो जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- आधी जीवा = $\sqrt{25 - 9} = 4$, अतः जीवा = 8 cm।

प्र.5 [3 अंक] सिद्ध कीजिए कि बाह्य बिंदु से खींची दो स्पर्श रेखाओं के बीच का कोण, स्पर्श बिंदुओं को मिलाने वाले रेखाखंड द्वारा केंद्र पर बने कोण का संपूरक होता है।

उत्तर- $\angle OAP = \angle OBP = 90^\circ$ । चतुर्भुज OAPB में कोणों का योग 360° है, अतः $\angle APB + \angle AOB = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$ ।

प्र.6 [3 अंक] चतुर्भुज ABCD वृत्त के परिगत है। सिद्ध कीजिए कि $AB + CD = AD + BC$ ।

उत्तर- प्रत्येक शीर्ष से स्पर्श रेखाएँ बराबर हैं: $AP = AS$, $BP = BQ$, $CR = CQ$, $DR = DS$ ।
जोड़ने पर $AB + CD = (AP + BP) + (CR + DR) = AS + BQ + CQ + DS = AD + BC$ ।