ENGLISH SECTION (Hindi terms in brackets)

A Story of Numbers

Class 8 Maths (Ganita Prakash Part 1) • Chapter 3 • Detailed Notes + All Textbook Solutions + Board Questions (2026-27)

Chapter Review in Easy Language

1. Reema's curiosity and how our numbers travelled (*हमारे अंकों की यात्रा*)

- *Humans counted even in the* **Stone Age** *– food, livestock, trade, offerings, and the passing of days (new moon, full moon, seasons). Mesopotamians wrote numbers with strange symbols about* **4000 years ago**.
- **India:** *the way we say numbers (powers of 10) comes from India – the* **Yajurveda Samhita** *names eka (1), dasha (10), shata (100), sahasra (1000), ayuta (10^4) ... up to 10^{12} and beyond. The ten digits* **0–9** *were developed in India about* **2000 years ago**. *The first known use of ten digits with 0 (a dot) is the* **Bakhshali manuscript (c. 3rd century CE)**; **Aryabhata (c. 499 CE)** *fully explained and used the 10-symbol system for elaborate calculations.*
- **Spread:** *to the Arab world by about* **800 CE**; **Al-Khwarizmi** *(c. 825, On the Calculation with Hindu Numerals; the word algorithm comes from his name) and* **Al-Kindi** *(c. 830) popularised it; to Europe and Africa by about* **1100 CE**; **Fibonacci** *(c. 1200) argued for it in Europe, but Roman numerals stayed for centuries; by the 17th century it was unavoidable. Europeans called them 'Arabic numerals'; better names are* **Hindu / Indian / Hindu-Arabic numerals** *('Hindu' here means the geography and people, not a religion).* **Laplace** *praised the ingenious method of ten symbols with place value and absolute value.*

2. The mechanism of counting (*गिनने की प्रक्रिया*)

To count without number names, make a **one-to-one mapping** *between the objects and a* **standard sequence** *with a fixed order.* **Method 1 – sticks/pebbles:** *one stick per cow (unending, but needs as many sticks as objects).* **Method 2 – sounds/names:** *letters a, b, c, ... z (convenient but ends at 26).* **Method 3 – written symbols:** I, II, III, IV, V ... *(Roman; unending only by adding more symbols). A standard sequence of objects, names or written symbols is a* **number system**; *symbols in a written system are* **numerals** *(0, 1, 5, 36, 193 ...). Comparing herds: pair sticks – leftover sticks tell how many more cows are needed.*

3. Some early number systems (*कुछ प्राचीन संख्या पद्धतियाँ*)

- **Body parts:** *groups in Papua New Guinea use parts of the body as the standard sequence.*
- **Tally marks:** *a notch for each object.* **Lebombo bone** *(South Africa, 29 notches, about 44,000 years old) and* **Ishango bone** *(Congo, 20,000–35,000 years old) are the oldest known.*

- ***Counting in 2s – Gumulgal (Australia):*** *urapon = 1, ukasar = 2, ukasar-urapon = 3, ukasar-ukasar = 4, ukasar-ukasar-urapon = 5, ukasar-ukasar-ukasar = 6; anything above 6 was ras. Almost identical systems occur among the* ***Bakairi (South America)*** *and the* ***Bushmen (South Africa)****, though far apart – possibly from common ancestors.*
- ***Group size idea:*** *count in groups (2, 5, 10, 20) and use a word/symbol for the group. Humans can usually see up to about* **4** *objects at a glance, which led to symbols for groups of 5 (as in the Roman V).*

4. Roman numerals (रोमन अंक)

Landmark numbers: **I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000.** *Write a number as a sum of landmark numbers, taking as many of the largest as possible. 27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 =* **XXVII**; *2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1 =* **MMCCCLXII**. *A smaller symbol before a bigger one subtracts: IV = 4, IX = 9,* **XL = 40** *(not always used – XXXX also occurred). It evolved from the Greek system (about 8th century BCE) and spread with the Roman empire.* ***Weaknesses:*** *no zero, no unending sequence without new symbols, and* ***arithmetic (especially × and ÷) is very hard****; adding needs careful regrouping, e.g. 5 Cs make a D. Romans used an* ***abacus*** *for calculations.*

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

5. The idea of a base – Egyptian system (आधार का विचार – मिस्री पद्धति)

- ***Egyptian system (about 3000 BCE):*** *landmark numbers are* **1, 10, 100, 1000, …** *– each is 10 times the previous, so all are* ***powers of 10****. Each has its own symbol (| = 1, ∩ = 10, coil = 100, lotus = 1000, finger = 10^4 …). 324 = 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4 = three coils, two ∩, four strokes.*
- ***Base-n system:*** *(a) the first landmark number is 1 and (b) each next landmark is the previous × a fixed number n. Landmark numbers =* $\mathbf{n^0 = 1, n, n^2, n^3, \ldots}$ *Egyptian = base 10 (decimal). Our own system with landmarks 1, 5, 25, 125, 625, 3125 (△ □ ⬡ ○ …) is* ***base 5****; 143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = ○ □□□ △△△. Base 7 landmarks: 1, 7, 49, 343, …*
- ***Advantages of a base:*** *(1)* ***Addition:*** *count each symbol and regroup – 10 of one landmark = 1 of the next (similar to carrying in Hindu addition). (2)* ***Multiplication:*** *the product of two landmark numbers is another landmark number ($10^a \times 10^b = 10^{a+b}$), and the distributive law handles longer numbers; multiplying by 10 moves each symbol to the next landmark. In Roman numerals this is hard because landmarks are not powers of one number.*

- **Abacus (11th century):** *a board with lines; each line is the next power of 10; a counter above a line is worth 5. 3426 = 3 thousands, 4 hundreds, 2 tens, 6 ones. To add 2907 + 43, put both on the board, bring counters together and exchange 10 on a line for 1 on the next line.*
- **Shortcoming:** *an unending number of symbols is still needed for higher and higher powers of 10 (good only up to about a crore, 10^7). Solution:* **place value**.

6. Place value systems (स्थानीय मान पद्धतियाँ)

- **Mesopotamian (Babylonian) – base 60 (sexagesimal):** *symbols for 1 and 10 build the numerals 1–59; the position of each group shows the landmark number (1, 60, 60^2 = 3600, ...); no power of 60 occurs 60 or more times. 640 = 10 × 60 + 40; 7530 = 2 × 3600 + 5 × 60 + 30. Its influence survives in* **1 hour = 60 min, 1 min = 60 s**. ***Problem:*** *blanks were hard to see, so one numeral could be read several ways; later a* **placeholder symbol** *(like zero) was used, mainly in the middle, not at the end.*
- **Mayan (3rd–10th century CE), Central America:** *designed independently;* **dot = 1, bar = 5** *for 1–19; symbols stacked vertically with landmarks* **1, 20, 360, ...** *(third is 360, not 400 – maybe due to their calendar); a* **shell** *symbol for zero. Not a true base-20 system, so computing is harder.*
- **Chinese rod numerals (by 3rd century CE to 17th century):** *base 10, place value; digits 1–9 made with rods;* **zong (vertical)** *and* **heng (horizontal)** *forms alternate by position to separate places; a blank shows a skipped place (2634 = 2 × 10^3 + 6 × 10^2 + 3 × 10 + 4). With a zero symbol it would be a fully developed place value system.*
- **Hindu number system:** *base 10,* **ten symbols 0–9**, *place value, one digit per position; 375 = 3 × 10^2 + 7 × 10 + 5.* **0 as a digit** *existed at least by* **200 BCE**; *it is a* **number** *too –* **Aryabhata (499 CE)** *used its properties (0 + a = a, 0 × a = 0) and* **Brahmagupta (628 CE, Brahmasphutasiddhanta)** *codified arithmetic with 0; with negatives this made a* **ring** *(closed under +, −, ×) and laid the base of algebra and analysis. No ambiguity, finite symbols, easy calculation – so the whole world uses it.*

7. Evolution of ideas in number representation

(1) *Count in groups of a single number (ukasar-ukasar-urapon)* → **(2)** *group using landmark numbers (I V X L C M)* → **(3)** *choose powers of a number as landmarks – the* **idea of a base** *(1, 10^1, 10^2, ...)* → **(4)** *use positions to denote landmark numbers –* **place value** *(1729)* → **(5)** *the* **idea of 0** *as a positional digit and as a number. Systems did not develop in a neat line – the real history is more complex.*

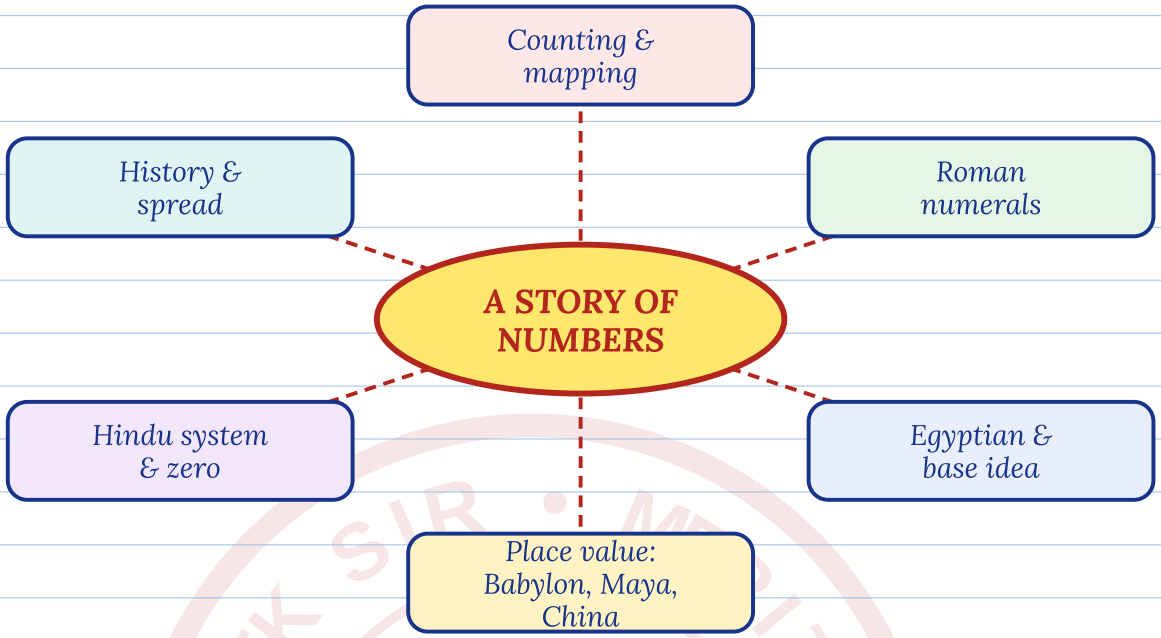
Important Terms (Glossary)

Term	Meaning
Number system	A standard sequence of objects, names or symbols in fixed order.
Numeral	A written symbol/sequence that represents a number.
One-to-one mapping	Pairing each object with exactly one member of the sequence.
Tally marks	One notch/mark per object counted.
Landmark number	A number with its own basic symbol, used as a reference.
Base-n system	Landmarks are 1, n, n^2, n^3 ... (powers of n).
Decimal system	A base-10 system.
Place value system	Position of a symbol decides its landmark number.
Placeholder / zero	Symbol for an empty position; Hindu 0 is also a number.
Sexagesimal	Base-60 (Mesopotamian).
Zong / Heng	Vertical / horizontal Chinese rod forms.
Abacus	Board with lines/counters for calculating.

Quick Revision & Formulas

- Roman: I 1, V 5, X 10, L 50, C 100, D 500, M 1000 – no zero, no base, hard to multiply.
- Egyptian: base 10 (1, 10, 100, ... own symbols), no place value; 10 of a landmark = next landmark.
- Base-n landmarks: 1, n, n^2, n^3, ...; product of two landmarks is a landmark.
- Mesopotamian: base 60, place value, placeholder only in the middle; Mayan: dot 1, bar 5, landmarks 1, 20, 360.
- Chinese rods: base 10, place value, zong/heng alternate, blank for zero.
- Hindu: base 10, digits 0–9, place value, 0 is a digit and a number; Bakhshali c. 3rd century CE; Brahmagupta 628 CE.
- Convert to base b: divide by landmark powers; e.g. 25 = 31 (base 8) = 100 (base 5) = 11001 (base 2).

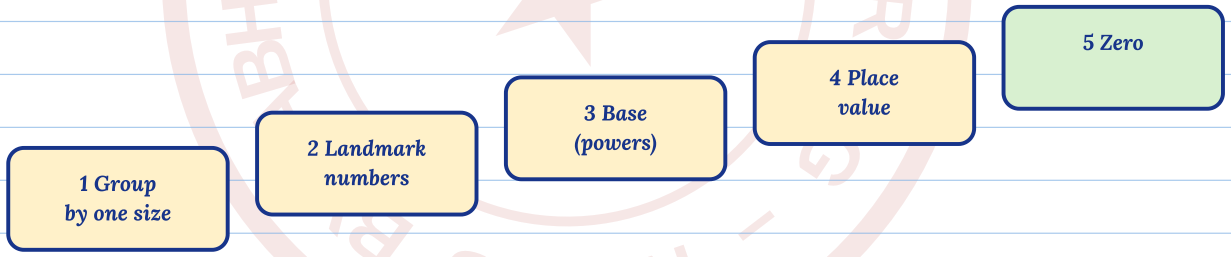
Diagrams, Tables & Flowcharts



Concept map of Chapter 3

Ideas that built our number system

Five big ideas in number representation



Each idea improved the earlier ones

Table: Comparing number systems

System	Base	Place value?	Zero?
Tally / sticks	none	No	No
Gumulgal	counts in 2s	No	No
Roman	no base (I V X L C D M)	No	No
Egyptian	10	No	No
Mesopotamian	60	Yes	Placeholder later (middle only)
Mayan	20-like (1, 20, 360)	Yes	Shell symbol

Chinese rod	10	Yes	Blank space
Hindu	10	Yes	Digit 0 and a number

Table: 25 in different bases

Base	Working	Numeral
10	2 × 10 + 5	25
8	3 × 8 + 1	31
5	1 × 25 + 0 × 5 + 0	100
2	16 + 8 + 0 + 0 + 1	11001

Flowchart: Writing a number in a base-n landmark system

List landmark numbers 1, n, n^2, … ➤ Take the largest landmark ≤ the number ➤ See how many times it fits; subtract; repeat ➤ Write the count for each landmark (0 if none)

Textbook Solutions (All Questions)

Page 51–54 (Math Talk and Figure it Out) – Herd questions Q1–Q3 with sticks; extending Method 2 (letters) to more than 26 objects; give a method for adding, subtracting, multiplying and dividing with sticks; make your own number system.

Ans. Q1: keep one stick per cow; each evening match cows to sticks – a leftover stick means a cow is missing. Q2, Q3: make one stick for each cow of both herds and pair them up; the sticks left over show how many more cows are needed. Letters limit: 26 in English (the number in any language depends on its letters). Extending Method 2: a, b, …, z, then aa, bb, …, zz (or ab, ac, …) and so on. Sticks: add – put the two collections together; subtract – take away sticks and count what is left; multiply – make equal groups and count all sticks; divide – make groups of the required size and count the groups and the leftover sticks. Own system: open-ended (any consistent sequence of symbols).

Page 56–59 – Gumulgal number names; how many objects can you see at a glance; how is 1345 shown in a system that counts only by 5s? Figure it Out p.59: Roman numerals for (i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715.

Ans. Gumulgal: 3 = 2 + 1, 4 = 2 + 2, 5 = 2 + 2 + 1, 6 = 2 + 2 + 2 – built by counting in 2s. At a glance most people see about 4 objects. 1345 in a system counting only by 5s: 1345 ÷ 5 = 269 groups, so the group symbol must be written 269 times – very cumbersome. Roman: (i)

1222 = 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 = MCCXXII (ii) 2999 = 1000 + 1000 + 900 + 90 + 9 = MMCMXCIX (iii) 302 = CCCII (iv) 715 = DCCXV.

Pages 59–60 – Add (a) CCXXXII + CCCCXIII and (b) LXXXVII + LXXVIII in Roman numerals; multiply V × L, L × D, V × D, VII × IX; multiply CCXXXI and MDCCCLII.

Ans. (a) 232 + 413 = 645: counting symbols gives 6 Cs, 4 Xs, 5 Is; 5 Cs = D, so D C XXXX V = DCXLV (also written DCXXXXV). (b) 87 + 78 = 165 = CLXV. Products (value → Roman): V × L = 5 × 50 = 250 = CCL; L × D = 50 × 500 = 25000 – no symbol above M, so M written 25 times; V × D = 5 × 500 = 2500 = MMD; VII × IX = 7 × 9 = 63 = LXIII. CCXXXI × MDCCCLII = 231 × 1852 = 4,27,812 – needs M written 427 times followed by DCCCXII, which shows how hard Roman multiplication is.

Figure it Out pp. 60–61 – Q1. Why does a Pacific island group use different number-name sequences for different objects? Q2. Gumulgal: evaluate (i) (uk-uk-uk-uk-ur) + (uk-uk-uk-ur) (ii) (uk-uk-uk-uk-ur) – (uk-uk-uk) (iii) (uk-uk-uk-uk-ur) × (uk-uk) (iv) (8 ukasar) ÷ (uk-uk). Q3. Features that make the Hindu system efficient.

Ans. Q1 (open-ended, my explanation): number words were attached to the kind of object being counted and the idea of an abstract number came later, so each kind of object kept its own sequence. Q2: ukasar = 2, urapon = 1. (i) 9 + 7 = 16 = ukasar repeated 8 times (ii) 9 – 6 = 3 = ukasar-urapon (iii) 9 × 4 = 36 = ukasar repeated 18 times (iv) 16 ÷ 4 = 4 = ukasar-ukasar. (Addition = join the two names; subtraction = remove ukasars; multiplication = repeat; division = make groups.) Q3: Hindu system: (i) place value, (ii) the digit 0, (iii) easy calculation with +, −, ×, ÷ and only ten symbols for any number. Roman: fixed value symbols, no zero, calculation extremely difficult.

Pages 61–62 – Egyptian system: Q1. Represent 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707. Q2. What numbers do the two given Egyptian numerals stand for?

Ans. Egyptian symbols: | = 1, ∩ = 10, coil = 10^2, lotus = 10^3, finger = 10^4, next symbol = 10^5… Write the count of each symbol: 10458 = 10000 + 400 + 50 + 8 → 1 finger, 4 coils, 5 ∩, 8 strokes. 1023 = 1000 + 20 + 3 → 1 lotus, 2 ∩, 3 strokes. 2660 = 2000 + 600 + 60 → 2 lotus, 6 coils, 6 ∩. 784 = 700 + 80 + 4 → 7 coils, 8 ∩, 4 strokes. 1111 = 1 lotus, 1 coil, 1 ∩, 1 stroke. 70707 = $7 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 7$ → 7 fingers, 7 coils, 7 strokes. Q2: the numerals stand for (i) 276 and (ii) 4322 (read from the textbook key).

Page 63 – Base-5 system (△ = 1, □ = 5, ⬡ = 25, ○ = 125, wavy line = 625): Q1. Write 15, 50, 137, 293, 651. Q2. Is there a number that cannot be represented? Q3. Landmark numbers of base-7 and base-n.

Ans. Q1 (symbols counted): 15 = 3 × 5 → □□□. 50 = 2 × 25 → ⬡⬡. 137 = 125 + 2 × 5 + 2 → ○ □□ △△. 293 = 2 × 125 + 25 + 3 × 5 + 3 → ○○ ⬡ □□□ △△△. 651 = 625 + 25 + 1 → (625 symbol) ⬡ △. Q2: Yes – zero (0), because the system has no symbol for it. Q3: base 7: $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, …; base n: $n^0 = 1$, n, n^2, n^3, …

Pages 64–65 – Add the Egyptian numerals (i) [9 lotus, 6 coils, 8 strokes] + [5 coils, 7 strokes] (ii) [1 lotus, 8 ∩] + [4 ∩, 6 strokes]; add in base-5 [○ ⬡⬡ □ △△] + [○○○ ⬡ □□ △△].

Ans. Figures read from the textbook picture. (i) 9608 + 507: strokes 8 + 7 = 15 → 1 ∩ + 5 strokes; ∩ none + 1 = 1; coils 6 + 5 = 11 → 1 lotus + 1 coil; lotus 9 + 1 = 10 → 1 finger. Sum = 1 finger, 0 lotus, 1 coil, 1 ∩, 5 strokes = 10115. (ii) 1080 + 46: strokes 6; ∩ 8 + 4 = 12 → 1 coil + 2 ∩. Sum = 1 lotus, 1 coil, 2 ∩, 6 strokes = 1126. Base-5: first = 125 + 50 + 5 + 2 = 182; second = 375 + 25 + 10 + 2 = 412. Triangles 2 + 2 = 4, squares 1 + 2 = 3, hexagons 2 + 1 = 3, circles 1 + 3 = 4 (none reaches 5, so no regrouping) → ○○○○ ⬡⬡⬡ □□□ △△△△ = 594.

Pages 66–68 – Multiply by ∩ (10): (i) ∩ × ∩ (ii) coil × ∩ (iii) lotus × ∩ (iv) finger × ∩; by coil (10^2): ∩ × coil, coil × coil, lotus × coil, finger × coil; other products and (i) (5 coils + 2 ∩ + 2 strokes) × ∩ (ii) (lotus + ∩) × ∩. Does the landmark property hold in base 5 and in any base? Product with ∩?

Ans. Multiplying a landmark by 10 gives the next landmark: ∩ × ∩ = 10^2 (coil); coil × ∩ = 10^3 (lotus); lotus × ∩ = 10^4 (finger); finger × ∩ = 10^5. Times 10^2: 10^3, 10^4, 10^5, 10^6. Other products: ∩ × (10^3) = 10^6; coil × lotus = 10^5; lotus × lotus = 10^6; finger (10^4) × (10^6) = 10^{10}. (i) (500 + 20 + 2) × 10 = 5220 → 5 lotus, 2 coils, 2 ∩. (ii) (1000 + 10) × 10 = 10,100 → 1 finger + 1 coil. Yes – in base 5 ($5^a \times 5^b = 5^{a+b}$) and in every base-n system the product of two landmark numbers is a landmark number. Rule: multiplying by ∩ (10) moves every symbol to the next landmark symbol.

Pages 68–70 – Abacus: how to add 2907 + 43; Figure it Out: Q1. Can an Egyptian symbol occur 10 or more times? Q2. Make a base-4 system and represent 1 to 16. Q3. Rule to multiply by 5 in our base-5 system.

Ans. Abacus: put 2907 and 43 on the two sides, bring the counters together; the 7 + 3 = 10 ones are replaced by 1 counter on the tens line; tens 0 + 4 + 1 = 5 (one counter above the line); total 2950. Q1: No – 10 of any landmark are regrouped into 1 of the next landmark. Q2 (one way): landmarks $4^0 = 1$ → L, $4^1 = 4$ → Δ, $4^2 = 16$ → □. 1 = L, 2 = LL, 3 = LLL, 4 = Δ, 5 = ΔL, 6 = ΔLL, 7 = ΔLLL, 8 = ΔΔ, 9 = ΔΔL, 10 = ΔΔLL, 11 = ΔΔLLL, 12 = ΔΔΔ, 13 = ΔΔΔL, 14 =

ΔΔΔLL, 15 = ΔΔΔLLL, 16 = □. Q3: multiplying by 5 moves each symbol to the next landmark symbol (△ → □, □ → ⬡, ⬡ → ○, ○ → next).

Pages 70–76 – Figure it Out: Represent in the Mesopotamian system (i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605; represent in the Mayan system (i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721.

Ans. Mesopotamian (base 60; write the group counts position by position): (i) 63 = 1 × 60 + 3 → [1][3] (ii) 132 = 2 × 60 + 12 (10 + 2) → [2][10 and 2] (iii) 200 = 3 × 60 + 20 → [3][20] (iv) 60 = 1 × 60 + 0 → [1] followed by an empty ones place (v) 3605 = 1 × 3600 + 0 × 60 + 5 → [1] [blank][5]. Mayan (dot 1, bar 5, shell 0; bottom = 1s, above = 20s, above = 360s): (i) 77 = 3 × 20 + 17 → top 3 (3 dots), bottom 17 (3 bars + 2 dots) (ii) 100 = 5 × 20 + 0 → top 5 (one bar), bottom shell (iii) 361 = 1 × 360 + 0 × 20 + 1 → 1 dot / shell / 1 dot (iv) 721 = 2 × 360 + 0 × 20 + 1 → 2 dots / shell / 1 dot.

Page 80 – Figure it Out: Q1. Why did the Chinese alternate zong and heng? How would 41 look with only zong, and can it be read in other ways? Q2. Form a base-2 system with 'ukasar' and 'urapon' as digits and compare with Gumulgal.

Ans. Q1: the alternating vertical (zong) and horizontal (heng) rod forms separate neighbouring places so the powers of 10 are not mixed up. With only zong: 41 = four rods then one rod (|||| |); without clear spacing it may be read as 41, but also as 14, 23, 32, 122, 5 ... (any way of splitting 5 rods into digits). Q2: base 2 needs two digits: urapon = 0, ukasar = 1. 1 = ukasar; 2 = ukasar urapon; 3 = ukasar ukasar; 4 = ukasar urapon urapon; 5 = ukasar urapon ukasar; 6 = ukasar ukasar urapon; 7 = ukasar ukasar ukasar; 8 = ukasar urapon urapon urapon (place values 1, 2, 4, 8). Gumulgal: 3 = ukasar-urapon, 4 = ukasar-ukasar, 5 = ukasar-ukasar-urapon, 6 = ukasar-ukasar-ukasar and nothing beyond 6 (ras). Comparison: both use only two words and two landmark numbers (1 and 2), but base-2 place value reaches every number with short numerals while Gumulgal's length grows by 1 for every 2.

Page 80 – Q3. Where do Hindu numerals and 0 matter in daily life and professions? How would life differ without them? Q4. If we had only 8 fingers: base 8 and base 5; write 25 in base 8, base 5 and base 2.

Ans. Q3 (open-ended): used in shopping, banking and accounting, measuring, phone numbers, dates and time, computers, engineering, science, surveying and medicine; without place value and 0, writing and calculating big numbers would be slow and error-prone and modern technology would have developed far more slowly. Q4: with 8 fingers we would probably use base 8, writing $n = a_k 8^k + \ldots + a_1 8 + a_0$ with digits 0–7 only (base 5

uses digits 0–4). 25 = 3 × 8 + 1 → 31 in base 8; 25 = 1 × 25 + 0 × 5 + 0 → 100 in base 5; 25 = 16 + 8 + 1 = 1 × 2^4 + 1 × 2^3 + 0 × 2^2 + 0 × 2 + 1 → 11001 in base 2.

Board-Pattern Questions – 1 Mark

1. Which numeral system is also called the Hindu-Arabic system? (1)

Ans. *The Hindu (Indian) number system with digits 0–9.*

2. Name the manuscript with the first known use of ten digits including 0. (1)

Ans. *The Bakhshali manuscript (c. 3rd century CE).*

3. Write 27 in Roman numerals. (1)

Ans. XXVII.

4. What are the landmark numbers of a base-n system? (1)

Ans. 1, n, n^2, n^3, …

5. Which ancient civilisation used base 60? (1)

Ans. *Mesopotamian (Babylonian).*

6. In the Mayan system, what do a dot and a bar stand for? (1)

Ans. *Dot = 1, bar = 5.*

7. Write 2999 in Roman numerals. (1)

Ans. MMCMXCIX.

8. Which Mayan symbol stood for zero? (1)

Ans. *A shell-like symbol.*

9. What does the Gumulgal word 'ukasar' mean? (1)

Ans. *2.*

10. Who codified the rules of arithmetic with 0 in 628 CE? (1)

Ans. *Brahmagupta (Brahmasphutasiddhanta).*

11. Write 25 in base 5. (1)

Ans. 100.

12. Name the oldest tally bone with 29 notches. (1)

Ans. *The Lebombo bone (about 44,000 years old).*

Board-Pattern Questions – 3 Marks

1. Write 143 in the base-5 system of landmarks 1, 5, 25, 125. (3)

Ans. 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 1 × 125 + 0 × 25 + 3 × 5 + 3 × 1, *i.e. one ○, three □ and three △.*

2. Represent 7530 and 640 in the Mesopotamian system. (3)

Ans. 7530 = 2 × 3600 + 5 × 60 + 30 → groups [2][5][30]. 640 = 10 × 60 + 40 → groups [10] [40].

3. Why is multiplication easier in a system with a base than in the Roman system? (3)

Ans. In a base-n system the landmark numbers are powers of n, so the product of two landmarks is again a landmark ($10^2 \times 10^3 = 10^5$) and the distributive law finishes the rest. In the Roman system the landmarks (V, X, L, C, D, M) are not powers of one number, so products like L × D need many symbols.

4. What problem did the Mesopotamian system have and how was it solved partly? (3)

Ans. Blank spaces for missing powers of 60 were hard to see and keep uniform, so the same numeral could be read in several ways. Later a placeholder symbol (like zero) was used, but mainly in the middle of numbers, not at the end, so some ambiguity remained.

5. Write 25 in base 8 and base 2. (3)

Ans. Base 8: 25 = 3 × 8 + 1 = 31. Base 2: 25 = 16 + 8 + 1 = $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ = 11001.

Board-Pattern Questions – 5 Marks

1. Describe the evolution of ideas in number representation (five stages) with an example of each. (5)

Ans. (1) Counting in groups of a single number – Gumulgal ukasar-ukasar-urapon (5). (2) Grouping with landmark numbers – Roman I, V, X, L, C, D, M (2367 = MMCCCLXII). (3) Choosing powers of a number as landmark numbers – the idea of a base, e.g. Egyptian base 10 (1, 10, 100, …). (4) Using positions to denote landmark numbers – place value, e.g. Mesopotamian base 60, Mayan, Chinese rod numerals. (5) Zero as a positional digit and as a number – Hindu system (Bakhshali, Aryabhata, Brahmagupta), which removes ambiguity and allows efficient calculation.

2. Add CCXXXII and CCCCXIII in Roman numerals, then add the Egyptian numerals [9 lotus, 6 coils, 8 strokes] and [5 coils, 7 strokes]; state what each exercise shows about regrouping. (5)

Ans. Roman: 232 + 413 = 645; count 6 C, 4 X, 5 I; 5 C make a D, so the sum is D C XXXX V = DCXLV – regrouping needs different group sizes (5 or 10) for different symbols. Egyptian: 9608 + 507: strokes 15 → 1 ∩ + 5 strokes; coils 11 → 1 lotus + 1 coil; lotus 10 → 1 finger. Sum = 1 finger, 1 coil, 1 ∩, 5 strokes = 10115. In a base system every regrouping is by the same number (10 of a landmark make the next), as in carrying in Hindu addition.

3. Explain the features of the Hindu number system that make it better than the Roman, Egyptian and Mesopotamian systems, with the role of zero. (5)

Ans. *Hindu: (i) base 10 with only ten symbols 0–9 – every number, however large, is written with finitely many symbols (Egyptian needs a new symbol for each power of 10; Roman needs more and more symbols). (ii) Place value – the position of a digit gives its landmark number ($375 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$). (iii) Zero as a digit removes the ambiguity of blank spaces from which the Mesopotamian and Mayan systems suffered. (iv) Zero is also a number with rules ($0 + a = a$, $0 \times a = 0$) used by Aryabhata and codified by Brahmagupta in 628 CE. (v) Calculations are easy – the reason it is used all over the world.*

ABHISHEK SIR • MERIT SPRING • NOTES BY

हिन्दी भाग (Hindi Section)

संख्याओं की कहानी

कक्षा 8 गणित (गणित प्रकाश भाग 1) • अध्याय 3 • विस्तृत नोट्स + सभी पाठ्यपुस्तक हल + बोर्ड प्रश्न (2026-27)

आसान भाषा में अध्याय की समीक्षा

1. रीमा की जिज्ञासा और हमारे अंकों की यात्रा

- मनुष्य **पाषाण युग** से ही गिनते थे – भोजन, पशु, व्यापार, चढ़ावे और दिनों का हिसाब (अमावस्या, पूर्णिमा, ऋतुएँ)। मेसोपोटामियाई लोग लगभग **4000 वर्ष पहले** अजीब चिह्नों से संख्याएँ लिखते थे।
- **भारत :** संख्याएँ बोलने का तरीका (10 की घातें) भारत से है – **यजुर्वेद संहिता** में एक (1), दश (10), शत (100), सहस्र (1000), अयुत (10^4) … 10^{12} और उससे आगे तक नाम हैं। **0–9** के दस अंक लगभग **2000 वर्ष पहले** भारत में विकसित हुए। शून्य (बिंदु) सहित दस अंकों का सबसे पहला ज्ञात प्रयोग **बख्शाली पांडुलिपि (लगभग तीसरी शताब्दी ई.)** में है ; **आर्यभट (लगभग 499 ई.)** ने दस चिह्नों की पद्धति को पूरी तरह समझाया और जटिल गणनाओं में प्रयोग किया।
- **प्रसार :** लगभग **800 ई.** तक अरब जगत में ; **अल-ख्वारिज़्मी** (लगभग 825, हिंदू अंकों से गणना ; 'एल्गोरिद्म' शब्द उनके नाम से बना) और **अल-किंदी** (लगभग 830) ने लोकप्रिय बनाया ; लगभग **1100 ई.** तक यूरोप और अफ़्रीका में ; **फ़िबोनाची** (लगभग 1200) ने यूरोप में इसकी वकालत की, पर रोमन अंक सदियों तक चले ; 17वीं शताब्दी तक इसे अपनाना अनिवार्य हो गया। यूरोपीय इन्हें 'अरबी अंक' कहते थे ; बेहतर नाम **हिंदू / भारतीय / हिंदू-अरबी अंक** हैं (यहाँ 'हिंदू' का अर्थ भूगोल और लोग हैं, धर्म नहीं)। **लाप्लास** ने स्थानीय मान और निरपेक्ष मान वाले दस चिह्नों की इस सरल विधि की प्रशंसा की।

2. गिनने की प्रक्रिया

संख्या-नाम के बिना गिनने के लिए वस्तुओं और निश्चित क्रम वाले **मानक अनुक्रम** के बीच **एक-एक संगति** बनाते हैं। **विधि 1 – डंडियाँ/कंकड़ :** हर गाय के लिए एक डंडी (अनंत, पर वस्तुओं जितनी डंडियाँ चाहिए)। **विधि 2 – ध्वनियाँ/नाम :** अक्षर a, b, c, … z (सुविधाजनक पर 26 पर समाप्त)। **विधि 3 – लिखित चिह्न :** I, II, III, IV, V … (रोमन ; नए चिह्न जोड़कर ही अनंत)। वस्तुओं, नामों या लिखित चिह्नों का मानक अनुक्रम **संख्या पद्धति** है ; लिखित पद्धति के चिह्न **अंक (numerals)** हैं (0, 1, 5, 36, 193 …)। झुंडों की तुलना : डंडियाँ जोड़ी में रखो – बची डंडियाँ बताती हैं कि कितनी और गायें चाहिए।

3. कुछ प्राचीन संख्या पद्धतियाँ

- **शरीर के अंग :** पापुआ न्यू गिनी के समूह शरीर के अंगों को मानक अनुक्रम बनाते हैं।
- **टैली चिह्न :** हर वस्तु के लिए एक निशान। **लेबोम्बो हड्डी** (दक्षिण अफ़्रीका, 29 निशान, लगभग 44,000 वर्ष पुरानी) और **इशांगो हड्डी** (कांगो, 20,000–35,000 वर्ष पुरानी) सबसे पुरानी ज्ञात हैं।

- **2 के समूहों में गिनती – गुमुलगल (ऑस्ट्रेलिया):** उरापोन = 1, उकासर = 2, उकासर-उरापोन = 3, उकासर-उकासर = 4, उकासर-उकासर-उरापोन = 5, उकासर-उकासर-उकासर = 6; 6 से अधिक कुछ भी रास। लगभग ऐसी ही पद्धतियाँ **बकैरी (दक्षिण अमेरिका)** और **बुशमैन (दक्षिण अफ़्रीका)** में भी हैं, जबकि वे बहुत दूर हैं – संभवत: साझा पूर्वजों से।
- **समूह-आकार का विचार:** समूहों (2, 5, 10, 20) में गिनो और समूह के लिए शब्द/चिह्न रखो। मनुष्य एक नज़र में प्राय: लगभग **4** वस्तुएँ देख पाता है, जिससे 5 के समूह के लिए चिह्न (रोमन V) बना।

4. रोमन अंक

मील के पत्थर संख्याएँ: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000। संख्या को मील-पत्थर संख्याओं के योग के रूप में लिखो, सबसे बड़ी से जितनी हो सके उतनी लेकर। 27 = 10 + 10 + 5 + 1 + 1 = **XXVII**; 2367 = 1000 + 1000 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 5 + 1 + 1 = **MMCCCLXII**। बड़े चिह्न से पहले छोटा चिह्न घटाता है: IV = 4, IX = 9, **XL = 40** (हमेशा नहीं – XXXX भी चलता था)। यह यूनानी पद्धति (लगभग 8वीं शताब्दी ई.पू.) से विकसित हुई और रोमन साम्राज्य के साथ फैली। **कमियाँ:** शून्य नहीं, नए चिह्नों के बिना अनंत अनुक्रम नहीं, और **अंकगणित (विशेषकर × और ÷) बहुत कठिन**; जोड़ने में सावधानी से पुनर्समूहन चाहिए, जैसे 5 C मिलकर एक D। रोमन गणना के लिए **अबेकस** प्रयोग करते थे।

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

5. आधार का विचार – मिस्री पद्धति

- **मिस्री पद्धति (लगभग 3000 ई.पू.):** मील-पत्थर संख्याएँ **1, 10, 100, 1000, …** – हर एक पिछली की 10 गुना, इसलिए सब **10 की घातें**। हर का अपना चिह्न (| = 1, ∩ = 10, कुंडली = 100, कमल = 1000, उँगली = 10^4 …)। 324 = 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 4 = तीन कुंडली, दो ∩, चार डंडियाँ।
- **आधार-n पद्धति:** (क) पहली मील-पत्थर संख्या 1 हो और (ख) हर अगली = पिछली × निश्चित संख्या n। मील-पत्थर संख्याएँ = $\mathbf{n^0 = 1, n, n^2, n^3, \ldots}$ मिस्री = आधार 10 (दशमलव)। हमारी बनाई पद्धति जिसमें मील-पत्थर 1, 5, 25, 125, 625, 3125 (△ □ ⬡ ○ …) हैं, **आधार 5** है; 143 = 125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = ○ □□□ △△△। आधार 7 के मील-पत्थर: 1, 7, 49, 343, …
- **आधार के लाभ:** (1) **जोड़:** हर चिह्न गिनो और पुनर्समूहन करो – किसी मील-पत्थर के 10 = अगले का 1 (हिंदू जोड़ में हासिल जैसा)। (2) **गुणा:** दो मील-पत्थर संख्याओं का गुणनफल भी मील-पत्थर संख्या है ($10^a \times 10^b = 10^{a+b}$) और बड़ी संख्याओं के लिए वितरण नियम काम करता

है; 10 से गुणा करने पर हर चिह्न अगले मील-पत्थर पर चला जाता है। रोमन में यह कठिन है क्योंकि मील-पत्थर एक संख्या की घातें नहीं हैं।

- **अबेकस (11वीं शताब्दी):** रेखाओं वाला फलक; हर रेखा 10 की अगली घात; रेखा के ऊपर का मनका 5 के बराबर। 3426 = 3 हज़ार, 4 सौ, 2 दहाई, 6 इकाई। 2907 + 43 जोड़ने के लिए दोनों को फलक पर रखो, मनके एक साथ लाओ और एक रेखा के 10 को अगली रेखा के 1 से बदलो।
- **कमी:** 10 की बढ़ती घातों के लिए अनंत चिह्न फिर भी चाहिए (लगभग करोड़, 10^7 तक ही ठीक)। समाधान: **स्थानीय मान**।

6. स्थानीय मान पद्धतियाँ

- **मेसोपोटामियाई (बेबीलोनी) – आधार 60 (षष्ठिक):** 1 और 10 के चिह्नों से अंक 1–59 बनते हैं; हर समूह की स्थिति मील-पत्थर संख्या (1, 60, 60^2 = 3600, …) बताती है; 60 की कोई घात 60 या अधिक बार नहीं आती। 640 = 10 × 60 + 40; 7530 = 2 × 3600 + 5 × 60 + 30। इसका प्रभाव **1 घंटा = 60 मिनट, 1 मिनट = 60 सेकंड** में बचा है। **समस्या:** रिक्त स्थान दिखना कठिन था, इसलिए एक अंक कई प्रकार से पढ़ा जा सकता था; बाद में **स्थान-पूरक चिह्न** (शून्य जैसा) आया, मुख्यत: बीच में, अंत में नहीं।
- **माया (3री–10वीं शताब्दी ई.), मध्य अमेरिका:** स्वतंत्र रूप से बनी; 1–19 के लिए **बिंदु = 1, पट्टी = 5**; चिह्न ऊर्ध्वाधर रखे जाते थे, मील-पत्थर **1, 20, 360, …** (तीसरा 360, 400 नहीं – संभवत: उनके कैलेंडर के कारण); शून्य के लिए **सीपी** का चिह्न। यह सच्ची आधार-20 पद्धति नहीं, इसलिए गणना कठिन।
- **चीनी छड़ अंक (3री शताब्दी ई. तक से 17वीं शताब्दी):** आधार 10, स्थानीय मान; 1–9 छड़ों से बनते; **ज़ोंग (ऊर्ध्वाधर)** और **हेंग (क्षैतिज)** रूप स्थान के अनुसार बारी-बारी से आते ताकि स्थान अलग दिखें; रिक्त स्थान छूटे स्थान को दिखाता (2634 = 2 × 10^3 + 6 × 10^2 + 3 × 10 + 4)। शून्य चिह्न के साथ यह पूर्ण विकसित स्थानीय मान पद्धति होती।
- **हिंदू संख्या पद्धति:** आधार 10, **दस चिह्न 0–9**, स्थानीय मान, हर स्थान पर एक अंक; 375 = 3 × 10^2 + 7 × 10 + 5। **अंक के रूप में 0** कम से कम **200 ई.पू.** तक था; यह **संख्या** भी है – **आर्यभट (499 ई.)** ने इसके गुण (0 + a = a, 0 × a = 0) प्रयोग किए और **ब्रह्मगुप्त (628 ई., ब्राह्मस्फुटसिद्धांत)** ने 0 के साथ अंकगणित को व्यवस्थित किया; ऋणात्मक संख्याओं के साथ इससे **वलय (ring)** बना (+, –, × में संवृत) और बीजगणित व विश्लेषण की नींव पड़ी। कोई भ्रम नहीं, सीमित चिह्न, सरल गणना – इसलिए पूरी दुनिया इसे प्रयोग करती है।

7. संख्या-निरूपण के विचारों का विकास

(1) एक संख्या के समूहों में गिनना (उकासर-उकासर-उरापोन) → **(2)** मील-पत्थर संख्याओं से समूह (I V X L C M) → **(3)** किसी संख्या की घातों को मील-पत्थर चुनना – **आधार का विचार** (1, 10^1, 10^2, …) → **(4)** स्थिति से मील-पत्थर दर्शाना – **स्थानीय मान** (1729) → **(5)** 0 का विचार, स्थानीय अंक और संख्या दोनों रूपों में। पद्धतियाँ सीधी रेखा में विकसित नहीं हुईं – असली इतिहास अधिक जटिल है।

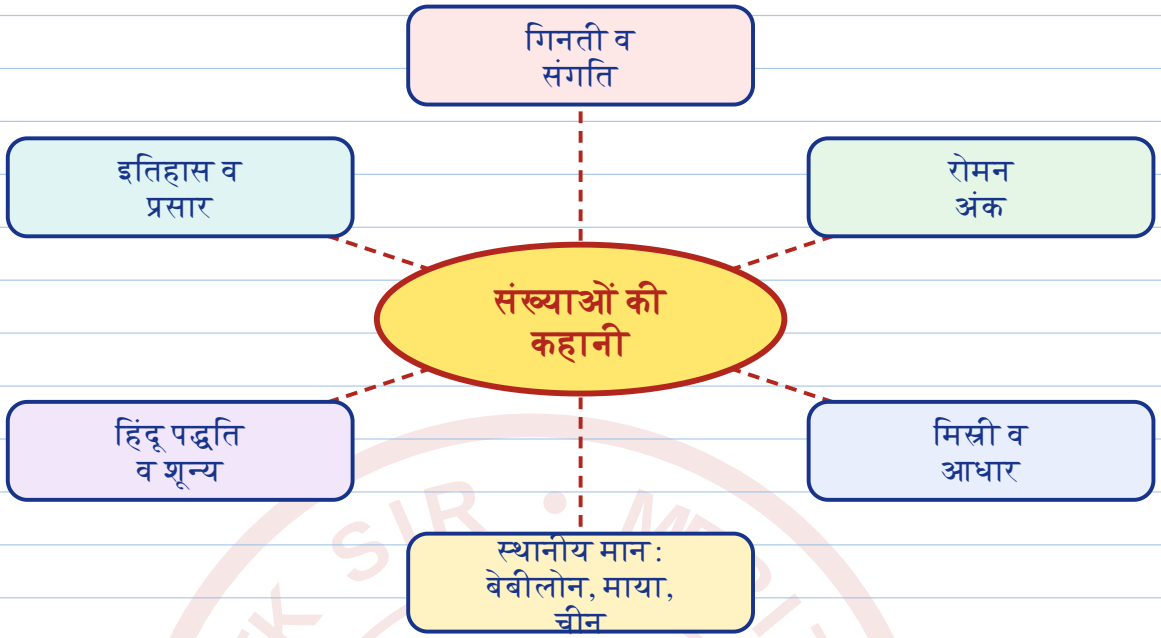
महत्वपूर्ण शब्द (शब्दावली)

शब्द	अर्थ / परिभाषा
संख्या पद्धति	वस्तुओं, नामों या चिह्नों का निश्चित क्रम वाला मानक अनुक्रम।
अंक (संख्यांक)	संख्या दर्शाने वाला लिखित चिह्न/क्रम।
एक-एक संगति	हर वस्तु को अनुक्रम के ठीक एक सदस्य से जोड़ना।
टैली चिह्न	गिनी वस्तु के लिए एक निशान।
मील-पत्थर संख्या	अपने मूल चिह्न वाली संदर्भ संख्या।
आधार-n पद्धति	मील-पत्थर 1, n, n^2, n^3 … (n की घातें)।
दशमलव पद्धति	आधार-10 पद्धति।
स्थानीय मान पद्धति	चिह्न की स्थिति उसकी मील-पत्थर संख्या तय करती है।
स्थान-पूरक / शून्य	रिक्त स्थान का चिह्न; हिंदू 0 एक संख्या भी है।
षष्ठिक	आधार-60 (मेसोपोटामियाई)।
ज़ोंग / हेंग	चीनी छड़ अंकों के ऊर्ध्वाधर / क्षैतिज रूप।
अबेकस	गणना के लिए रेखाओं/मनकों वाला फलक।

त्वरित पुनरावृत्ति व सूत्र

- रोमन: I 1, V 5, X 10, L 50, C 100, D 500, M 1000 – शून्य नहीं, आधार नहीं, गुणा कठिन।
- मिस्री: आधार 10 (1, 10, 100, … अपने चिह्न), स्थानीय मान नहीं; किसी मील-पत्थर के 10 = अगला।
- आधार-n मील-पत्थर: 1, n, n^2, n^3, …; दो मील-पत्थरों का गुणनफल मील-पत्थर।
- मेसोपोटामियाई: आधार 60, स्थानीय मान, स्थान-पूरक केवल बीच में; माया: बिंदु 1, पट्टी 5, मील-पत्थर 1, 20, 360।
- चीनी छड़: आधार 10, स्थानीय मान, ज़ोंग/हेंग बारी-बारी, शून्य के लिए रिक्त।
- हिंदू: आधार 10, अंक 0–9, स्थानीय मान, 0 अंक और संख्या; बख्शाली लगभग 3री शताब्दी ई.; ब्रह्मगुप्त 628 ई.।
- आधार b में बदलना: मील-पत्थर घातों से भाग; जैसे 25 = 31 (आधार 8) = 100 (आधार 5) = 11001 (आधार 2)।

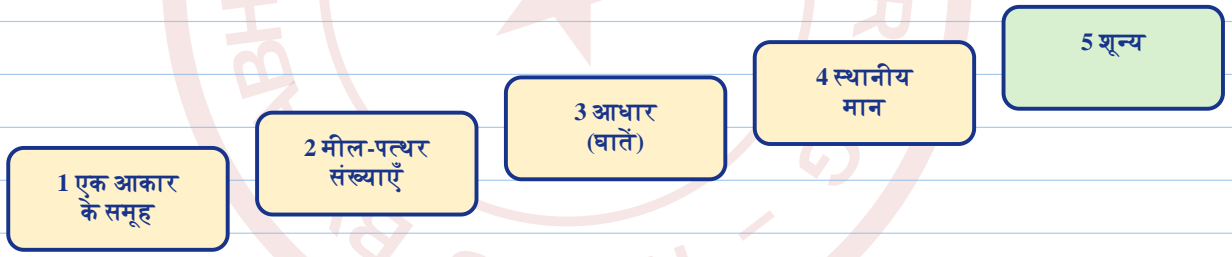
चित्र, तालिकाएँ और फ्लोचार्ट



अध्याय 3 का अवधारणा-मानचित्र

वे विचार जिनसे हमारी संख्या पद्धति बनी

संख्या-निरूपण के पाँच बड़े विचार



हर विचार ने पिछले को बेहतर बनाया

तालिका : संख्या पद्धतियों की तुलना

पद्धति	आधार	स्थानीय मान ?	शून्य ?
टैली / डंडियाँ	कोई नहीं	नहीं	नहीं
गुमुलगल	2 के समूह	नहीं	नहीं
रोमन	आधार नहीं (I V X L C D M)	नहीं	नहीं
मिस्री	10	नहीं	नहीं
मेसोपोटामियाई	60	हाँ	बाद में स्थान-पूरक (केवल बीच में)

माया	20-जैसा (1, 20, 360)	हाँ	सीपी चिह्न
चीनी छड़	10	हाँ	रिक्त स्थान
हिंदू	10	हाँ	अंक 0 और संख्या

तालिका : 25 अलग-अलग आधारों में

आधार	गणना	अंक
10	$2 \times 10 + 5$	25
8	$3 \times 8 + 1$	31
5	$1 \times 25 + 0 \times 5 + 0$	100
2	$16 + 8 + 0 + 0 + 1$	11001

फ्लोचार्ट : आधार-n मील-पत्थर पद्धति में संख्या लिखना

मील-पत्थर 1, n, n^2, … सूचीबद्ध करो ➤ संख्या से छोटा या बराबर सबसे बड़ा मील-पत्थर लो ➤ देखो कितनी बार समाता है; घटाओ; दोहराओ ➤ हर मील-पत्थर की गिनती लिखो (न हो तो 0)

पाठ्यपुस्तक के हल (सभी प्रश्न)

पृष्ठ 51–54 (गणित चर्चा और Figure it Out) – डंडियों से झुंड के प्रश्न Q1–Q3; विधि 2 (अक्षर) को 26 से अधिक वस्तुओं तक बढ़ाना; डंडियों से जोड़, घटाव, गुणा, भाग की विधि; अपनी संख्या पद्धति बनाओ।

उत्तर : Q1: हर गाय के लिए एक डंडी रखो; हर शाम गायों को डंडियों से मिलाओ – बची डंडी का अर्थ एक गाय कम है। Q2, Q3: दोनों झुंडों की हर गाय के लिए एक डंडी बनाओ और जोड़ी बनाओ; बची डंडियाँ बताती हैं कि और कितनी गायें चाहिए। अक्षरों की सीमा : अंग्रेज़ी में 26 (हर भाषा में उसके अक्षरों पर निर्भर)। विधि 2 का विस्तार : a, b, …, z, फिर aa, bb, …, zz (या ab, ac, …) आदि। डंडियाँ : जोड़ – दोनों ढेर मिलाओ; घटाव – डंडियाँ निकालकर बची गिनो; गुणा – बराबर समूह बनाकर सारी डंडियाँ गिनो; भाग – अपेक्षित आकार के समूह बनाओ और समूह तथा बची डंडियाँ गिनो। अपनी पद्धति : खुला उत्तर (चिह्नों का कोई भी सुसंगत अनुक्रम)।

पृष्ठ 56–59 – गुमुलगल संख्या-नाम; एक नज़र में कितनी वस्तुएँ दिखती हैं; केवल 5 के समूहों में गिनने वाली पद्धति में 1345 कैसे दिखाएँ? Figure it Out पृ.59 : रोमन अंक (i) 1222 (ii) 2999 (iii) 302 (iv) 715।

उत्तर : गुमुलगल : 3 = 2 + 1, 4 = 2 + 2, 5 = 2 + 2 + 1, 6 = 2 + 2 + 2 – 2 के समूहों में गिनकर बने। एक नज़र में अधिकतर लोग लगभग 4 वस्तुएँ देख पाते हैं। केवल 5 के समूहों वाली पद्धति में 1345 : 1345 ÷ 5 = 269 समूह, यानी समूह-चिह्न 269 बार लिखना पड़ेगा – बहुत

असुविधाजनक। रोमन: (i) 1222 = 1000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 = MCCXXII (ii) 2999 = 1000 + 1000 + 900 + 90 + 9 = MMCMXCIX (iii) 302 = CCCII (iv) 715 = DCCXV।

पृष्ठ 59–60 – रोमन अंकों में जोड़ो (a) CCXXXII + CCCCXIII और (b) LXXXVII + LXXVIII; गुणा करो V × L, L × D, V × D, VII × IX; CCXXXI और MDCCCLII का गुणा।

उत्तर: (a) 232 + 413 = 645: चिह्न गिनने पर 6 C, 4 X, 5 I; 5 C = D, इसलिए D C XXXX V = DCXLV (DCXXXXV भी लिखा जाता है)। (b) 87 + 78 = 165 = CLXV। गुणनफल (मान → रोमन): V × L = 5 × 50 = 250 = CCL; L × D = 50 × 500 = 25000 – M से बड़ा चिह्न नहीं, इसलिए M को 25 बार लिखना होगा; V × D = 5 × 500 = 2500 = MMD; VII × IX = 7 × 9 = 63 = LXIII। CCXXXI × MDCCCLII = 231 × 1852 = 4,27,812 – इसके लिए M को 427 बार लिखकर DCCCXII लिखना होगा, जिससे रोमन गुणा की कठिनाई दिखती है।

Figure it Out पृ. 60–61 – प्र1. प्रशांत महासागर के एक द्वीप-समूह के लोग अलग-अलग वस्तुओं के लिए अलग संख्या-नाम अनुक्रम क्यों प्रयोग करते हैं? प्र2. गुमुलगल: मान निकालो (i) (उ-उ-उ-उ-उरा) + (उ-उ-उ-उरा) (ii) (उ-उ-उ-उ-उरा) – (उ-उ-उ) (iii) (उ-उ-उ-उ-उरा) × (उ-उ) (iv) (8 उकासर) ÷ (उ-उ)। प्र3. हिंदू पद्धति को कुशल बनाने वाली विशेषताएँ।

उत्तर: प्र1 (खुला उत्तर, मेरी व्याख्या): संख्या-शब्द गिनी जा रही वस्तु के प्रकार से जुड़े थे और अमूर्त संख्या का विचार बाद में आया, इसलिए हर प्रकार की वस्तु का अपना अनुक्रम रहा। प्र2: उकासर = 2, उरापोन = 1। (i) 9 + 7 = 16 = उकासर 8 बार (ii) 9 – 6 = 3 = उकासर-उरापोन (iii) 9 × 4 = 36 = उकासर 18 बार (iv) 16 ÷ 4 = 4 = उकासर-उकासर। (जोड़ = दोनों नाम जोड़ना; घटाव = उकासर हटाना; गुणा = दोहराना; भाग = समूह बनाना।) प्र3: हिंदू पद्धति: (i) स्थानीय मान, (ii) अंक 0, (iii) केवल दस चिह्नों से किसी भी संख्या के साथ +, –, ×, ÷ की सरल गणना। रोमन: निश्चित मान के चिह्न, शून्य नहीं, गणना अत्यंत कठिन।

पृष्ठ 61–62 – मिस्री पद्धति: प्र1. 10458, 1023, 2660, 784, 1111, 70707 को दर्शाओ। प्र2. दिए गए दो मिस्री अंक किन संख्याओं के हैं?

उत्तर: मिस्री चिह्न: | = 1, ∩ = 10, कुंडली = 10^2, कमल = 10^3, उँगली = 10^4, अगला चिह्न = 10^5 … हर चिह्न की गिनती लिखो: 10458 = 10000 + 400 + 50 + 8 → 1 उँगली, 4 कुंडली, 5 ∩, 8 डंडियाँ। 1023 = 1000 + 20 + 3 → 1 कमल, 2 ∩, 3 डंडियाँ। 2660 = 2000 + 600 + 60 → 2 कमल, 6 कुंडली, 6 ∩। 784 = 700 + 80 + 4 → 7 कुंडली, 8 ∩, 4 डंडियाँ। 1111 = 1 कमल, 1 कुंडली, 1 ∩, 1 डंडी। 70707 = 7 × 10^4 + 7 × 10^2 + 7 → 7 उँगलियाँ, 7 कुंडलियाँ, 7 डंडियाँ। प्र2: अंक (i) 276 और (ii) 4322 हैं (पाठ्यपुस्तक के उत्तर से)।

पृष्ठ 63 – आधार-5 पद्धति (△ = 1, □ = 5, ⬡ = 25, ○ = 125, लहरदार रेखा = 625) : प्र1. 15, 50, 137, 293, 651 लिखो। प्र2. क्या कोई संख्या दर्शाई नहीं जा सकती? प्र3. आधार-7 और आधार-n के मील-पत्थर।

उत्तर : प्र1 (चिह्न गिनकर) : 15 = 3 × 5 → □□□। 50 = 2 × 25 → ⬡⬡। 137 = 125 + 2 × 5 + 2 → ○ □□ △△। 293 = 2 × 125 + 25 + 3 × 5 + 3 → ○○ ⬡ □□□ △△△। 651 = 625 + 25 + 1 → (625 का चिह्न) ⬡ △। प्र2 : हाँ – शून्य (0), क्योंकि पद्धति में इसका चिह्न नहीं है। प्र3 : आधार 7 : $7^0 = 1$, $7^1 = 7$, $7^2 = 49$, $7^3 = 343$, …; आधार n: $n^0 = 1$, n, n^2, n^3, …

पृष्ठ 64–65 – मिस्री अंक जोड़ो (i) [9 कमल, 6 कुंडली, 8 डंडियाँ] + [5 कुंडली, 7 डंडियाँ] (ii) [1 कमल, 8 ∩] + [4 ∩, 6 डंडियाँ]; आधार-5 में जोड़ो [○ ⬡⬡ □ △△] + [○○○ ⬡ □□ △△]।

उत्तर : आकृतियाँ पाठ्यपुस्तक के चित्र से पढ़ी गई हैं। (i) 9608 + 507 : डंडियाँ 8 + 7 = 15 → 1 ∩ + 5 डंडियाँ; ∩ शून्य + 1 = 1; कुंडली 6 + 5 = 11 → 1 कमल + 1 कुंडली; कमल 9 + 1 = 10 → 1 उँगली। योग = 1 उँगली, 0 कमल, 1 कुंडली, 1 ∩, 5 डंडियाँ = 10115। (ii) 1080 + 46 : डंडियाँ 6; ∩ 8 + 4 = 12 → 1 कुंडली + 2 ∩। योग = 1 कमल, 1 कुंडली, 2 ∩, 6 डंडियाँ = 1126। आधार-5 : पहला = 125 + 50 + 5 + 2 = 182; दूसरा = 375 + 25 + 10 + 2 = 412। △ 2 + 2 = 4, □ 1 + 2 = 3, ⬡ 2 + 1 = 3, ○ 1 + 3 = 4 (कोई 5 तक नहीं पहुँचा, पुनर्संमूहन नहीं) → ○○○○ ⬡⬡⬡ □□□ △△△△ = 594।

पृष्ठ 66–68 – ∩ (10) से गुणा : (i) ∩ × ∩ (ii) कुंडली × ∩ (iii) कमल × ∩ (iv) उँगली × ∩; कुंडली (10^2) से : ∩ × कुंडली, कुंडली × कुंडली, कमल × कुंडली, उँगली × कुंडली; अन्य गुणनफल और (i) (5 कुंडली + 2 ∩ + 2 डंडियाँ) × ∩ (ii) (कमल + ∩) × ∩। क्या यह गुण आधार 5 में और हर आधार में सही है? ∩ से गुणा का नियम?

उत्तर : मील-पत्थर को 10 से गुणा करने पर अगला मील-पत्थर मिलता है : ∩ × ∩ = 10^2 (कुंडली); कुंडली × ∩ = 10^3 (कमल); कमल × ∩ = 10^4 (उँगली); उँगली × ∩ = 10^5। 10^2 से गुणा : 10^3, 10^4, 10^5, 10^6। अन्य : ∩ × (10^5) = 10^6; कुंडली × कमल = 10^5; कमल × कमल = 10^6; उँगली (10^4) × (10^6) = 10^{10}। (i) (500 + 20 + 2) × 10 = 5220 → 5 कमल, 2 कुंडली, 2 ∩। (ii) (1000 + 10) × 10 = 10,100 → 1 उँगली + 1 कुंडली। हाँ – आधार 5 में ($5^a \times 5^b = 5^{a+b}$) और हर आधार-n पद्धति में दो मील-पत्थर का गुणनफल मील-पत्थर होता है। नियम : ∩ (10) से गुणा करने पर हर चिह्न अगले मील-पत्थर के चिह्न पर चला जाता है।

पृष्ठ 68–70 – अबेकस : 2907 + 43 कैसे जोड़ें; Figure it Out: प्र1. क्या मिस्री चिह्न 10 या अधिक बार आ सकता है? प्र2. आधार-4 पद्धति बनाकर 1 से 16 दर्शाओ। प्र3. हमारी आधार-5 पद्धति में 5 से गुणा का नियम।

उत्तर : अबेकस : 2907 और 43 को दोनों ओर रखो, मनके साथ लाओ; 7 + 3 = 10 इकाई की जगह दहाई-रेखा पर 1 मनका; दहाई 0 + 4 + 1 = 5 (रेखा के ऊपर एक मनका); कुल 2950। प्र1 : नहीं – किसी भी मील-पत्थर के 10 को अगले मील-पत्थर के 1 में बदला जाता है। प्र2 (एक तरीका) : मील-पत्थर $4^0 = 1$ → L, $4^1 = 4$ → Δ, $4^2 = 16$ → □। 1 = L, 2 = LL, 3 = LLL, 4 =

Λ, 5 = ΛL, 6 = ΛLL, 7 = ΛLLL, 8 = ΛΛ, 9 = ΛΛL, 10 = ΛΛLL, 11 = ΛΛLLL, 12 = ΛΛΛ, 13 = ΛΛΛL, 14 = ΛΛΛLL, 15 = ΛΛΛLLL, 16 = □। प्र3 : 5 से गुणा करने पर हर चिह्न अगले मील-पत्थर के चिह्न पर चला जाता है (△ → □, □ → ⬡, ⬡ → ○, ○ → अगला)।

पृष्ठ 70–76 – Figure it Out: मेसोपोटामियाई पद्धति में दर्शाओ (i) 63 (ii) 132 (iii) 200 (iv) 60 (v) 3605 ; माया पद्धति में दर्शाओ (i) 77 (ii) 100 (iii) 361 (iv) 721।

उत्तर : मेसोपोटामियाई (आधार 60 ; स्थान-दर-स्थान समूहों की गिनती लिखो) : (i) 63 = 1 × 60 + 3 → [1][3] (ii) 132 = 2 × 60 + 12 (10 + 2) → [2][10 और 2] (iii) 200 = 3 × 60 + 20 → [3][20] (iv) 60 = 1 × 60 + 0 → [1] और इकाई का स्थान रिक्त (v) 3605 = 1 × 3600 + 0 × 60 + 5 → [1][रिक्त][5]। माया (बिंदु 1, पट्टी 5, सीपी 0 ; नीचे = इकाई, ऊपर = 20, उससे ऊपर = 360) : (i) 77 = 3 × 20 + 17 → ऊपर 3 (3 बिंदु), नीचे 17 (3 पट्टी + 2 बिंदु) (ii) 100 = 5 × 20 + 0 → ऊपर 5 (एक पट्टी), नीचे सीपी (iii) 361 = 1 × 360 + 0 × 20 + 1 → 1 बिंदु / सीपी / 1 बिंदु (iv) 721 = 2 × 360 + 0 × 20 + 1 → 2 बिंदु / सीपी / 1 बिंदु।

पृष्ठ 80 – Figure it Out: प्र1. चीनियों ने ज़ोंग और हेंग बारी-बारी से क्यों रखे ? केवल ज़ोंग से 41 कैसा दिखेगा और क्या उसे दूसरे प्रकार से पढ़ा जा सकता है ? प्र2. 'उकासर' और 'उरापोन' को अंक मानकर आधार-2 पद्धति बनाओ और गुमुलगल से तुलना करो।

उत्तर : प्र1 : ऊर्ध्वाधर (ज़ोंग) और क्षैतिज (हेंग) छड़ रूप बारी-बारी से आकर पास के स्थानों को अलग करते हैं ताकि 10 की घातें गड़बड़ न हों। केवल ज़ोंग से : 41 = चार छड़ें फिर एक छड़ (|||| |) ; साफ़ दूरी न हो तो इसे 41, 14, 23, 32, 122, 5 … भी पढ़ा जा सकता है (5 छड़ों को अंकों में बाँटने का कोई भी तरीका)। प्र2 : आधार 2 के लिए दो अंक : उरापोन = 0, उकासर = 1। 1 = उकासर ; 2 = उकासर उरापोन ; 3 = उकासर उकासर ; 4 = उकासर उरापोन उरापोन ; 5 = उकासर उरापोन उकासर ; 6 = उकासर उकासर उरापोन ; 7 = उकासर उकासर उकासर ; 8 = उकासर उरापोन उरापोन उरापोन (स्थानीय मान 1, 2, 4, 8)। गुमुलगल : 3 = उकासर-उरापोन, 4 = उकासर-उकासर, 5 = उकासर-उकासर-उरापोन, 6 = उकासर-उकासर-उकासर और 6 के आगे कुछ नहीं (रास)। तुलना : दोनों में केवल दो शब्द और दो मील-पत्थर (1 और 2) हैं, पर आधार-2 स्थानीय मान छोटे अंकों में हर संख्या तक पहुँचता है जबकि गुमुलगल में हर 2 पर लंबाई 1 बढ़ती है।

पृष्ठ 80 – प्र3. दैनिक जीवन और व्यवसायों में हिंदू अंक और 0 कहाँ महत्वपूर्ण हैं ? इनके बिना जीवन कैसा होता ? प्र4. यदि हमारी केवल 8 उँगलियाँ होतीं : आधार 8 और आधार 5 ; 25 को आधार 8, आधार 5 और आधार 2 में लिखो।

उत्तर : प्र3 (खुला उत्तर) : खरीदारी, बैंक-लेखा, माप, फ़ोन नंबर, तिथि-समय, कंप्यूटर, इंजीनियरिंग, विज्ञान, सर्वेक्षण और चिकित्सा में प्रयोग ; स्थानीय मान और 0 के बिना बड़ी संख्याएँ लिखना-गिनना धीमा और त्रुटिपूर्ण होता और आधुनिक तकनीक का विकास बहुत धीमा रहता। प्र4 : 8 उँगलियाँ होतीं तो संभवत: आधार 8 होता, $n = a_k 8^k + \ldots + a_1 8 + a_0$ केवल अंक 0–7 के साथ (आधार 5 में अंक 0–4)। 25 = 3 × 8 + 1 → आधार 8 में 31 ; 25 = 1 × 25 + 0 × 5

+ 0 → आधार 5 में 100; $25 = 16 + 8 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2 + 1$ → आधार 2 में 11001।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 1 अंक

1. किस अंक-पद्धति को हिंदू-अरबी पद्धति भी कहते हैं? (1)

उत्तर: 0–9 अंकों वाली हिंदू (भारतीय) संख्या पद्धति।

2. शून्य सहित दस अंकों के पहले ज्ञात प्रयोग वाली पांडुलिपि का नाम? (1)

उत्तर: बख्शाली पांडुलिपि (लगभग तीसरी शताब्दी ई.)।

3. 27 को रोमन अंकों में लिखो। (1)

उत्तर: XXVII।

4. आधार-n पद्धति के मील-पत्थर कौन-से हैं? (1)

उत्तर: $1, n, n^2, n^3, \ldots$

5. किस प्राचीन सभ्यता ने आधार 60 प्रयोग किया? (1)

उत्तर: मेसोपोटामियाई (बेबीलोनी)।

6. माया पद्धति में बिंदु और पट्टी क्या दर्शाते हैं? (1)

उत्तर: बिंदु = 1, पट्टी = 5।

7. 2999 को रोमन अंकों में लिखो। (1)

उत्तर: MMCMXCIX।

8. माया पद्धति में शून्य के लिए कौन-सा चिह्न था? (1)

उत्तर: सीपी जैसा चिह्न।

9. गुमुलगल शब्द 'उकासर' का अर्थ? (1)

उत्तर: 2।

10. 628 ई. में 0 के साथ अंकगणित के नियम किसने व्यवस्थित किए? (1)

उत्तर: ब्रह्मगुप्त (ब्राह्मस्फुटसिद्धांत)।

11. 25 को आधार 5 में लिखो। (1)

उत्तर: 100।

12. 29 निशानों वाली सबसे पुरानी टैली हड्डी का नाम? (1)

उत्तर: लेबोम्बो हड्डी (लगभग 44,000 वर्ष पुरानी)।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 3 अंक

1. मील-पत्थर 1, 5, 25, 125 वाली आधार-5 पद्धति में 143 लिखो। (3)

उत्तर: $125 + 5 + 5 + 5 + 1 + 1 + 1 = 1 \times 125 + 0 \times 25 + 3 \times 5 + 3 \times 1$, यानी एक ○, तीन □ और तीन △।

2. मेसोपोटामियाई पद्धति में 7530 और 640 दर्शाओ। (3)

उत्तर: $7530 = 2 \times 3600 + 5 \times 60 + 30$ → समूह [2][5][30]। $640 = 10 \times 60 + 40$ → समूह [10][40]।

3. आधार वाली पद्धति में गुणा रोमन पद्धति से आसान क्यों है? (3)

उत्तर: आधार-n पद्धति में मील-पत्थर n की घातें होते हैं, इसलिए दो मील-पत्थरों का गुणनफल भी मील-पत्थर होता है ($10^2 \times 10^3 = 10^5$) और वितरण नियम बाकी काम कर देता है। रोमन में मील-पत्थर (V, X, L, C, D, M) एक संख्या की घातें नहीं हैं, इसलिए L × D जैसे गुणनफल में बहुत से चिह्न लगते हैं।

4. मेसोपोटामियाई पद्धति में क्या समस्या थी और उसे आंशिक रूप से कैसे सुलझाया गया? (3)

उत्तर: 60 की छूटी घातों के रिक्त स्थान देखना और समान रखना कठिन था, इसलिए एक ही अंक कई तरह से पढ़ा जा सकता था। बाद में स्थान-पूरक चिह्न (शून्य जैसा) आया, पर मुख्यतः संख्या के बीच में, अंत में नहीं, इसलिए कुछ भ्रम बना रहा।

5. 25 को आधार 8 और आधार 2 में लिखो। (3)

उत्तर: आधार 8: $25 = 3 \times 8 + 1 = 31$। आधार 2: $25 = 16 + 8 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11001$।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 5 अंक

1. संख्या-निरूपण के विचारों के विकास के पाँच चरण उदाहरण सहित बताओ। (5)

उत्तर: (1) एक संख्या के समूहों में गिनना – गुमुलगल उकासर-उकासर-उरापोन (5)। (2) मील-पत्थर संख्याओं से समूह – रोमन I, V, X, L, C, D, M (2367 = MMCCCLXII)। (3) किसी संख्या की घातों को मील-पत्थर चुनना – आधार का विचार, जैसे मिस्री आधार 10 (1, 10, 100, …)। (4) स्थिति से मील-पत्थर दर्शाना – स्थानीय मान, जैसे मेसोपोटामियाई आधार 60, माया, चीनी छड़ अंक। (5) शून्य, स्थानीय अंक और संख्या दोनों रूपों में – हिंदू पद्धति (बख्शाली, आर्यभट, ब्रह्मगुप्त), जो भ्रम मिटाती है और कुशल गणना संभव करती है।

2. रोमन अंकों में CCXXXII और CCCCXIII जोड़ो, फिर मिस्री अंक [9 कमल, 6 कुंडली, 8 डंडियाँ] और [5 कुंडली, 7 डंडियाँ] जोड़ो; बताओ पुनर्समूहन के बारे में दोनों क्या दिखाते हैं। (5)

उत्तर: रोमन: 232 + 413 = 645; 6 C, 4 X, 5 I गिनो; 5 C मिलकर D बनाते हैं, इसलिए योग D C XXXX V = DCXLV – पुनर्समूहन में अलग-अलग चिह्नों के लिए अलग समूह-आकार (5 या 10) चाहिए। मिस्री: 9608 + 507: डंडियाँ 15 → 1 ∩ + 5 डंडियाँ; कुंडली 11 → 1 कमल + 1 कुंडली; कमल 10 → 1 उँगली। योग = 1 उँगली, 1 कुंडली, 1 ∩, 5 डंडियाँ = 10115। आधार पद्धति में हर पुनर्समूहन एक ही संख्या से होता है (किसी मील-पत्थर के 10 से अगला), जैसे हिंदू जोड़ में हासिल।

3. हिंदू संख्या पद्धति की वे विशेषताएँ बताओ जो इसे रोमन, मिस्री और मेसोपोटामियाई

पद्धतियों से बेहतर बनाती हैं ; शून्य की भूमिका सहित। (5)

उत्तर : हिंदू : (i) आधार 10 और केवल दस चिह्न 0–9 – कितनी भी बड़ी संख्या सीमित चिह्नों से लिखी जाती है (मिस्री में 10 की हर घात के लिए नया चिह्न, रोमन में और अधिक चिह्न चाहिए)। (ii) स्थानीय मान – अंक की स्थिति उसकी मील-पत्थर संख्या बताती है ($375 = 3 \times 10^2 + 7 \times 10 + 5$)। (iii) अंक के रूप में शून्य रिक्त स्थानों की उस उलझन को मिटाता है जिससे मेसोपोटामियाई और माया पद्धतियाँ जूझती थीं। (iv) शून्य एक संख्या भी है जिसके नियम हैं ($0 + a = a$, $0 \times a = 0$), जिन्हें आर्यभट ने प्रयोग किया और ब्रह्मगुप्त ने 628 ई. में व्यवस्थित किया। (v) गणना सरल है – इसीलिए यह पूरे विश्व में प्रयुक्त है।

ABHISHEK SIR • MERIT SPRING • NOTES BY