

Chapter Review

- **Trigonometry:** The word comes from Greek words 'tri' (three), 'gon' (side) and 'metron' (measure); it is the study of relations between the sides and angles of a triangle. In this chapter we study trigonometric ratios of an acute angle in a right-angled triangle.
- **Trigonometric ratios:** In a right triangle ABC , right-angled at B , with angle A : $\sin A = \text{opposite/hypotenuse} = BC/AC$; $\cos A = \text{adjacent/hypotenuse} = AB/AC$; $\tan A = \text{opposite/adjacent} = BC/AB$; $\text{cosec } A = \text{hypotenuse/opposite} = AC/BC$; $\sec A = \text{hypotenuse/adjacent} = AC/AB$; $\cot A = \text{adjacent/opposite} = AB/BC$. Memory trick: Pandit Badri Prasad Har Har Bole Shankar Bhagwan ($\sin = P/H$, $\cos = B/H$, $\tan = P/B$).
- **Reciprocal and quotient relations:** $\text{cosec } A = 1/\sin A$; $\sec A = 1/\cos A$; $\cot A = 1/\tan A$; $\tan A = \sin A/\cos A$; $\cot A = \cos A/\sin A$. The ratios depend only on the angle, not on the size of the triangle, because the triangles are similar.
- **Values of trigonometric ratios of specific angles:** $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = 1/2$, $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 90^\circ = 1$. $\cos$ is the reverse: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\cos 60^\circ = 1/2$, $\cos 90^\circ = 0$. $\tan 0^\circ = 0$, $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 90^\circ$ is not defined. cosec , $\sec$ and $\cot$ are the reciprocals of $\sin$, $\cos$ and $\tan$.
- **Range of ratios:** For $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, $\sin \theta$ and $\cos \theta$ lie between 0 and 1. $\tan \theta$ and $\cot \theta$ range from 0 to infinity, and $\sec \theta$ and $\text{cosec } \theta$ are at least 1. As θ increases from 0° to 90° , $\sin \theta$, $\tan \theta$ and $\sec \theta$ increase, while $\cos \theta$, $\cot \theta$ and $\text{cosec } \theta$ decrease. $\tan 90^\circ$ and $\sec 90^\circ$ are not defined; $\cot 0^\circ$ and $\text{cosec } 0^\circ$ are not defined.

- Ratios of complementary angles: Angles A and $(90^\circ - A)$ are complementary. $\sin(90^\circ - A) = \cos A$; $\cos(90^\circ - A) = \sin A$; $\tan(90^\circ - A) = \cot A$; $\cot(90^\circ - A) = \tan A$; $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$; $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$. Example: $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$; $\tan 35^\circ \times \tan 55^\circ = \tan 35^\circ \times \cot 35^\circ = 1$.
- Trigonometric identities: An identity is true for all values of the angle for which the ratios are defined. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$; $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$; $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$. Useful forms: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$.
- Proving identities and finding ratios: To prove an identity, start with the more complicated side (usually LHS) and convert everything into $\sin$ and $\cos$, then simplify to the other side. To find all ratios from one ratio, draw a right triangle with the given sides and use the Pythagoras theorem. Example: if $\sin A = 3/5$ then the adjacent side is 4, so $\cos A = 4/5$ and $\tan A = 3/4$.

Key Terms

Trigonometric Ratio – Ratio of two sides of a right triangle for an acute angle.

Sine (sin) – Opposite side / hypotenuse.

Cosine (cos) – Adjacent side / hypotenuse.

Tangent (tan) – Opposite side / adjacent side.

Cosecant (cosec) – Reciprocal of sine; hypotenuse / opposite.

Secant (sec) – Reciprocal of cosine; hypotenuse / adjacent.

Cotangent (cot) – Reciprocal of tangent; adjacent / opposite.

Complementary Angles – Two angles that add up to 90° .

Trigonometric Identity – An equation true for all angle values where it is defined.

Standard Angles – 0° , 30° , 45° , 60° and 90° with fixed ratio values.

Hypotenuse – Side opposite the right angle.

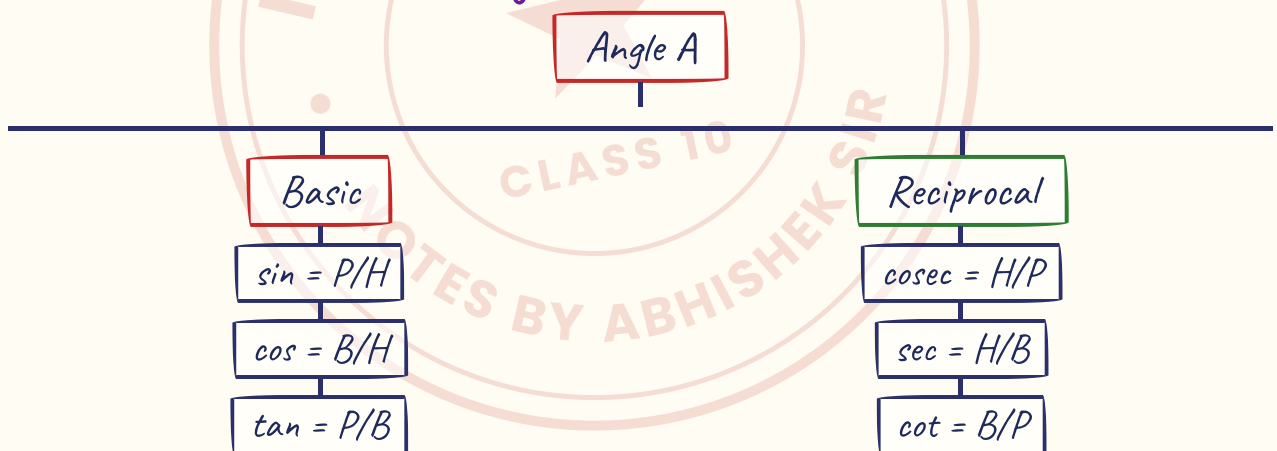
Pythagoras Identity – $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

Diagrams / Flowcharts

Values of Standard Angles

Angle	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
tan	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Trigonometric Ratios



Three Identities

Identity	Form
I	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
II	$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
III	$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

Complementary Angles

Ratio of $(90^\circ - A)$	Equals
$\sin$	$\cos A$
$\cos$	$\sin A$
$\tan$	$\cot A$
$\sec$	$\operatorname{cosec} A$

Textbook Exercise Questions

Q.1 In $\triangle ABC$ right-angled at B, $AB = 24$ cm and $BC = 7$ cm. Find $\sin A$, $\cos A$ and $\tan C$.

Ans. $AC = \sqrt{(576 + 49)} = 25$. $\sin A = BC/AC = 7/25$; $\cos A = AB/AC = 24/25$; $\tan C = AB/BC = 24/7$.

Q.2 If $\tan A = 4/3$, find $\sin A$ and $\cos A$.

Ans. Opposite = 4, adjacent = 3, hypotenuse = 5. $\sin A = 4/5$, $\cos A = 3/5$.

Q.3 Evaluate: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$.

Ans. $(\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) + (1/2)(1/2) = 3/4 + 1/4 = 1$.

Q.4 Evaluate: $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$.

Ans. $\tan 55^\circ = \cot 35^\circ$, $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$, $\tan 45^\circ = 1$. Product = $(\tan 35^\circ \cot 35^\circ)(\tan 40^\circ \cot 40^\circ) \times 1 = 1$.

Q.5 Prove that $(1 + \tan^2 A)(1 - \sin A)(1 + \sin A) = 1$.

Ans. $LHS = \sec^2 A \times (1 - \sin^2 A) = \sec^2 A \times \cos^2 A = 1 = RHS$.

Q.6 Prove that $(\operatorname{cosec} A - \cot A)^2 = (1 - \cos A)/(1 + \cos A)$.

Ans. $LHS = (1 - \cos A)^2 / \sin^2 A = (1 - \cos A)^2 / [(1 - \cos A)(1 + \cos A)] = (1 - \cos A)/(1 + \cos A) = RHS$.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] Find the value of $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$.

Ans. $1/4 + 3/4 = 1$.

Q.2 [1 mark] Write the value of $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$.

Ans. $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

Q.3 [2 marks] If $\sin A = 3/5$, find $\cos A$ and $\tan A$.

Ans. $\cos A = 4/5$, $\tan A = 3/4$.

Q.4 [2 marks] Evaluate: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$.

Ans. $2(1) + 3/4 - 3/4 = 2$.

Q.5 [3 marks] If $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos(90^\circ - \theta)$, find $\cot \theta$.

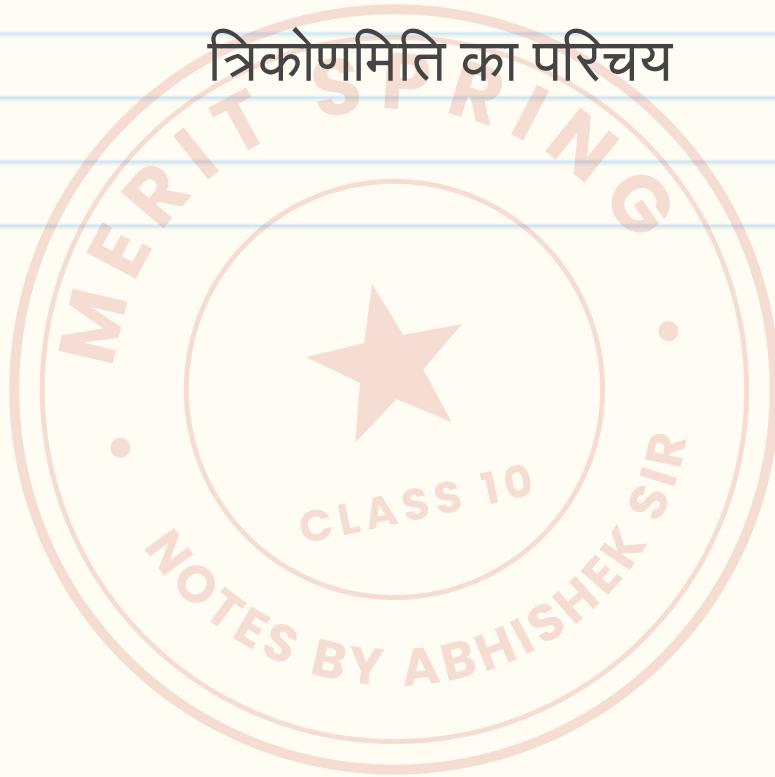
Ans. $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \theta$, so $\cos \theta = (\sqrt{2} - 1) \sin \theta$ and $\cot \theta = \sqrt{2} - 1$.

Q.6 [3 marks] Prove that $\sin \theta / (1 + \cos \theta) + (1 + \cos \theta) / \sin \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$.

Ans. $LHS = [\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2] / [\sin \theta (1 + \cos \theta)] = (2 + 2 \cos \theta) / [\sin \theta (1 + \cos \theta)] = 2 / \sin \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$.

HINDI VERSION

त्रिकोणमिति का परिचय



अध्याय समीक्षा

- त्रिकोणमिति: यह शब्द यूनानी शब्दों 'त्रि' (तीन), 'गॉन' (भुजा) और 'मेट्रोन' (माप) से बना है; यह त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के संबंधों का अध्ययन है। इस अध्याय में समकोण त्रिभुज में न्यून कोण के त्रिकोणमितीय अनुपात पढ़ते हैं।
- त्रिकोणमितीय अनुपात: समकोण त्रिभुज ABC में, B पर समकोण, कोण A के लिए: $\sin A = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{कर्ण}} = \frac{BC}{AC}$; $\cos A = \frac{\text{आसन्न}}{\text{कर्ण}} = \frac{AB}{AC}$; $\tan A = \frac{\text{सम्मुख}}{\text{आसन्न}} = \frac{BC}{AB}$; $\operatorname{cosec} A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{सम्मुख}} = \frac{AC}{BC}$; $\sec A = \frac{\text{कर्ण}}{\text{आसन्न}} = \frac{AC}{AB}$; $\cot A = \frac{\text{आसन्न}}{\text{सम्मुख}} = \frac{AB}{BC}$ । याद रखने की युक्ति: पंडित बद्री प्रसाद हर हर बोले शंकर भगवान ($\sin = \text{लंब/कर्ण}$, $\cos = \text{आधार/कर्ण}$, $\tan = \text{लंब/आधार}$)।
- व्युत्क्रम और भागफल संबंध: $\operatorname{cosec} A = 1/\sin A$; $\sec A = 1/\cos A$; $\cot A = 1/\tan A$; $\tan A = \sin A/\cos A$; $\cot A = \cos A/\sin A$ । अनुपात केवल कोण पर निर्भर करते हैं, त्रिभुज के माप पर नहीं, क्योंकि त्रिभुज समरूप होते हैं।
- विशिष्ट कोणों के अनुपातों के मान: $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = 1/2$, $\sin 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\sin 60^\circ = \sqrt{3}/2$, $\sin 90^\circ = 1$ । $\cos$ इसका उलटा क्रम है: $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$, $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$, $\cos 60^\circ = 1/2$, $\cos 90^\circ = 0$ । $\tan 0^\circ = 0$, $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\tan 90^\circ$ परिभाषित नहीं। cosec , $\sec$ और $\cot$ क्रमशः $\sin$, $\cos$ और $\tan$ के व्युत्क्रम हैं।
- अनुपातों का परास: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ के लिए $\sin \theta$ और $\cos \theta$ का मान 0 और 1 के बीच होता है। $\tan \theta$ और $\cot \theta$ का मान 0 से अनंत तक जाता है तथा $\sec \theta$ और $\operatorname{cosec} \theta$ कम से कम 1 होते हैं। θ के 0° से 90° बढ़ने पर $\sin \theta$, $\tan \theta$ और $\sec \theta$ बढ़ते हैं जबकि $\cos \theta$, $\cot \theta$ और $\operatorname{cosec} \theta$ घटते हैं। $\tan 90^\circ$ और $\sec 90^\circ$ परिभाषित नहीं हैं; $\cot 0^\circ$ और $\operatorname{cosec} 0^\circ$ परिभाषित नहीं हैं।
- पूरक कोणों के अनुपात: कोण A और $(90^\circ - A)$ पूरक कोण हैं। $\sin(90^\circ - A) = \cos A$; $\cos(90^\circ - A) = \sin A$; $\tan(90^\circ - A) = \cot A$; $\cot(90^\circ - A) = \tan A$; $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$; $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$ । उदाहरण: $\sin 65^\circ = \cos 25^\circ$; $\tan 35^\circ \times \tan 55^\circ = \tan 35^\circ \times \cot 35^\circ = 1$ ।

- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ: सर्वसमिका वह समीकरण है जो कोण के उन सभी मानों के लिए सत्य हो जिनके लिए अनुपात परिभाषित हैं। $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$; $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$; $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ । उपयोगी रूप: $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$, $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ ।
- सर्वसमिका सिद्ध करना और अनुपात ज्ञात करना: सर्वसमिका सिद्ध करने के लिए अधिक जटिल पक्ष (प्रायः LHS) से आरंभ करें, सब कुछ $\sin$ और $\cos$ में बदलें और सरल करके दूसरे पक्ष तक पहुँचें। एक अनुपात से शेष अनुपात निकालने के लिए दी गई भुजाओं वाला समकोण त्रिभुज बनाएँ और पाइथागोरस प्रमेय लगाएँ। उदाहरण: यदि $\sin A = 3/5$ तो आसन्न भुजा 4 है, अतः $\cos A = 4/5$ और $\tan A = 3/4$ ।

मुख्य शब्दावली

त्रिकोणमितीय अनुपात - न्यून कोण के लिए समकोण त्रिभुज की दो भुजाओं का अनुपात।

ज्या ($\sin$) - सम्मुख भुजा / कर्ण।

कोज्या ($\cos$) - आसन्न भुजा / कर्ण।

स्पर्शज्या ($\tan$) - सम्मुख भुजा / आसन्न भुजा।

व्युत्क्रम ज्या (cosec) - $\sin$ का व्युत्क्रम; कर्ण / सम्मुख।

व्युत्क्रम कोज्या ($\sec$) - $\cos$ का व्युत्क्रम; कर्ण / आसन्न।

व्युत्क्रम स्पर्शज्या ($\cot$) - $\tan$ का व्युत्क्रम; आसन्न / सम्मुख।

पूरक कोण - दो कोण जिनका योग 90° हो।

त्रिकोणमितीय सर्वसमिका - वह समीकरण जो कोण के सभी मानों के लिए सत्य हो।

मानक कोण - 0° , 30° , 45° , 60° और 90° , जिनके अनुपात निश्चित हैं।

कर्ण - समकोण के सामने की भुजा।

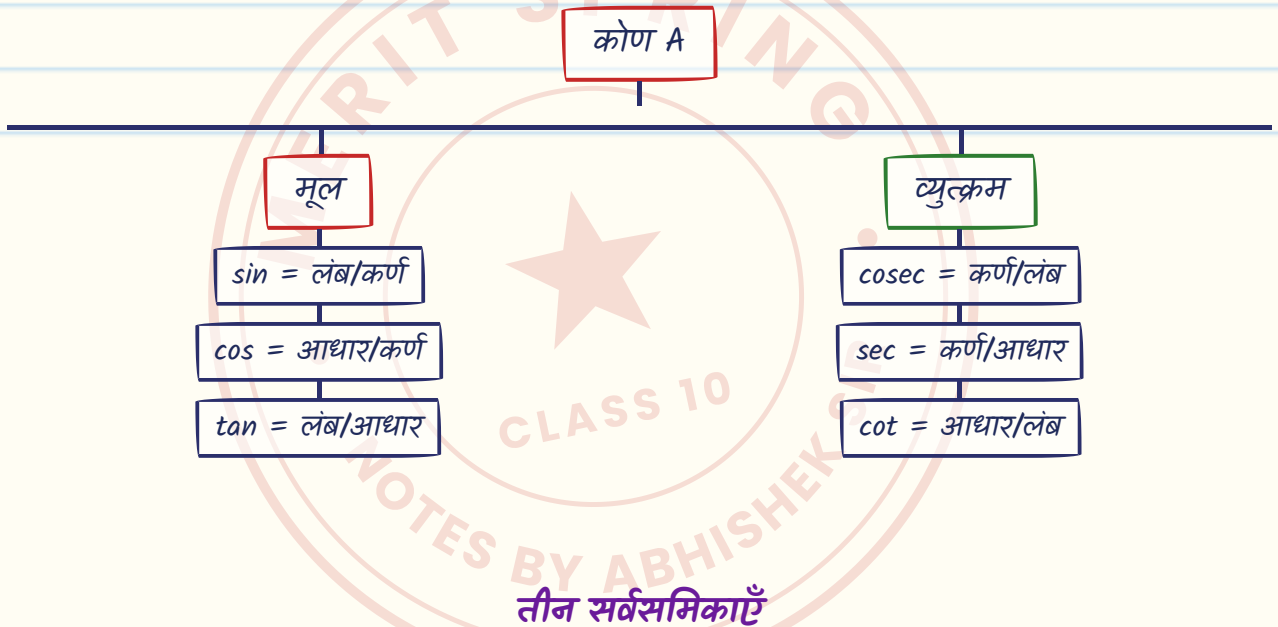
पाइथागोरस सर्वसमिका - $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ।

आरेख / फ्लोचार्ट

मानक कोणों के मान

कोण	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	अपरि.

त्रिकोणमितीय अनुपात



सर्वसमिका	रूप
I	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
II	$1 + \tan^2 A = \sec^2 A$
III	$1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$

पूरक कोण

$(90^\circ - A)$ का अनुपात	बराबर
$\sin$	$\cos A$
$\cos$	$\sin A$
$\tan$	$\cot A$
$\sec$	$\operatorname{cosec} A$

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 $\triangle ABC$ में B पर समकोण है, $AB = 24 \text{ cm}$ और $BC = 7 \text{ cm}$ । $\sin A$, $\cos A$ और $\tan C$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $AC = \sqrt{(24)^2 + (7)^2} = 25$ । $\sin A = BC/AC = 7/25$; $\cos A = AB/AC = 24/25$;
 $\tan C = AB/BC = 24/7$

प्र.2 यदि $\tan A = 4/3$ तो $\sin A$ और $\cos A$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- सम्मुख = 4, आसन्न = 3, कर्ण = 5। $\sin A = 4/5$, $\cos A = 3/5$

प्र.3 मान ज्ञात कीजिए: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$

उत्तर- $(\sqrt{3}/2)(\sqrt{3}/2) + (1/2)(1/2) = 3/4 + 1/4 = 1$

प्र.4 मान ज्ञात कीजिए: $\tan 35^\circ \tan 40^\circ \tan 45^\circ \tan 50^\circ \tan 55^\circ$

उत्तर- $\tan 55^\circ = \cot 35^\circ$, $\tan 50^\circ = \cot 40^\circ$, $\tan 45^\circ = 1$ । गुणनफल = $(\tan 35^\circ \cot 35^\circ)(\tan 40^\circ \cot 40^\circ) \times 1 = 1$

प्र.5 सिद्ध कीजिए: $(1 + \tan^2 A)(1 - \sin A)(1 + \sin A) = 1$

उत्तर- $LHS = \sec^2 A \times (1 - \sin^2 A) = \sec^2 A \times \cos^2 A = 1 = RHS$

प्र.6 सिद्ध कीजिए: $(\operatorname{cosec} A - \cot A)^2 = (1 - \cos A)/(1 + \cos A)$

उत्तर- $LHS = (1 - \cos A)^2 / \sin^2 A = (1 - \cos A)^2 / [(1 - \cos A)(1 + \cos A)] = (1 - \cos A)/(1 + \cos A) = RHS$

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] $\sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $1/4 + 3/4 = 1$

प्र.2 [1 अंक] $\sin 45^\circ + \cos 45^\circ$ का मान लिखिए।

उत्तर- $1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

प्र.3 [2 अंक] यदि $\sin A = 3/5$ तो $\cos A$ और $\tan A$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\cos A = 4/5$, $\tan A = 3/4$

प्र.4 [2 अंक] मान ज्ञात कीजिए: $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$

उत्तर- $2(1) + 3/4 - 3/4 = 2$

प्र.5 [3 अंक] यदि $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \cos(90^\circ - \theta)$ तो $\cot \theta$ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2} \sin \theta$, अतः $\cos \theta = (\sqrt{2} - 1) \sin \theta$ और $\cot \theta = \sqrt{2} - 1$

प्र.6 [3 अंक] सिद्ध कीजिए: $\sin \theta / (1 + \cos \theta) + (1 + \cos \theta) / \sin \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$

उत्तर- $LHS = [\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta)^2] / [\sin \theta (1 + \cos \theta)] = (2 + 2 \cos \theta) / [\sin \theta (1 + \cos \theta)] = 2 / \sin \theta = 2 \operatorname{cosec} \theta$