Chapter Review

- Linear equation in two variables: An equation of the form $ax + by + c = 0$, where a, b, c are real numbers and a, b are not both zero. It has infinitely many solutions, and its graph is a straight line. A pair of linear equations in two variables is a system: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
- Graphical method: Each equation is drawn as a line on the same graph. (i) If the lines intersect at one point, that point is the unique solution (the pair is consistent). (ii) If the lines coincide, there are infinitely many solutions (consistent, dependent). (iii) If the lines are parallel, there is no solution (inconsistent).
- Conditions for consistency: For $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$: if $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ the lines intersect, giving a unique solution. If $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ the lines coincide, giving infinitely many solutions. If $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ the lines are parallel, giving no solution.
- Substitution method: Step 1: express one variable (say y) in terms of the other from either equation. Step 2: substitute it into the other equation to get an equation in one variable. Step 3: solve it. Step 4: put the value back to find the second variable. Example: $x + y = 14$, $x - y = 4$: $x = 14 - y$, so $14 - y - y = 4$, $y = 5$, $x = 9$.
- Elimination method: Step 1: multiply the equations by suitable numbers so that the coefficients of one variable become equal. Step 2: add or subtract the equations to eliminate that variable. Step 3: solve the resulting equation. Step 4: substitute to get the other variable. Example: $3x + 2y = 11$, $2x + 3y = 4$: multiplying and subtracting gives $x = 5$, $y = -2$.
- Cross-multiplication method: For $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ and $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ with $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, $x/(b_1c_2 - b_2c_1) = y/(c_1a_2 - c_2a_1) = 1/(a_1b_2 - a_2b_1)$. This gives the solution directly.

- Equations reducible to a linear pair: Equations such as $2/x + 3/y = 13$ can be reduced to a linear pair by putting $1/x = p$ and $1/y = q$, solving for p and q, then finding x and y.
- Word problems: Read the problem, assume two variables for the unknowns (for example ages, numbers, speed and time, cost of items), write two equations from the conditions, and solve by any method. Typical types: ages, digits of a number, speed-distance-time (upstream and downstream), fractions, geometry and cost problems. Always verify the answer with the conditions.

Key Terms

Linear Equation – $ax + by + c = 0$; graph is a straight line.

Pair of Linear Equations – Two linear equations in the same two variables.

Consistent Pair – A pair that has at least one solution.

Inconsistent Pair – A pair with no solution (parallel lines).

Dependent Pair – Consistent pair with infinitely many solutions (coincident lines).

Substitution Method – Express one variable in terms of the other and substitute.

Elimination Method – Make coefficients equal and add or subtract to remove a variable.

Cross-multiplication – Direct formula for the solution using a, b and c.

Coincident Lines – Lines lying on top of each other; infinitely many solutions.

Parallel Lines – Lines that never meet; no solution.

Intersecting Lines – Lines meeting at one point; unique solution.

Solution – The pair (x, y) that satisfies both equations.

MERIT SPRING CLASS 10 NOTES BY ABHISHEK SIR

Diagrams / Flowcharts

Conditions for a Pair of Lines

Ratio condition	Graph	Solution
$a_1/a_2 \neq b_1/b_2$	Intersecting	Unique
$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$	Coincident	Infinite
$a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$	Parallel	None

Methods of Solving

Pair of Equations

- Graphical
  - Draw both lines
  - Read the meeting point
- Algebraic
  - Substitution
  - Elimination
  - Cross-multiplication

Substitution Method

Express x in terms of y

↓

Substitute in other equation

↓

Solve for y

↓

Put y back to get x

↓

Verify the solution

MERIT SPRING NOTES BY ABHISHEK SIR CLASS 10

Consistent vs Inconsistent

Consistent
- Unique or infinite solutions
- Lines meet or coincide

Inconsistent
- No solution
- Lines are parallel

Textbook Exercise Questions

Q.1 Solve by substitution: $x + y = 14$ and $x - y = 4$.

Ans. From the first, $x = 14 - y$. Put in the second: $14 - y - y = 4$, so $y = 5$, and $x = 9$. Solution: $(9, 5)$.

Q.2 Solve by elimination: $3x + 2y = 11$ and $2x + 3y = 4$.

Ans. Multiply first by 3 and second by 2: $9x + 6y = 33$, $4x + 6y = 8$. Subtract: $5x = 25$, $x = 5$. Then $y = -2$. Solution $(5, -2)$.

Q.3 For what value of k does $2x + 3y = 7$ and $(k - 1)x + (k + 2)y = 3k$ have infinitely many solutions?

Ans. Need $2/(k-1) = 3/(k+2) = 7/(3k)$. From $2(k+2) = 3(k-1)$: $k = 7$. Check $3/(9) = 7/21 = 1/3$. Hence $k = 7$.

Q.4 Check whether $2x + 3y = 9$ and $4x + 6y = 18$ are consistent.

Ans. $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = 1/2$, so the lines coincide: consistent with infinitely many solutions.

Q.5 Five years hence, the age of Jacob will be three times that of his son. Five years ago, Jacob's age was seven times his son's. Find their present ages.

Ans. Let present ages be x and y. $x + 5 = 3(y + 5)$; $x - 5 = 7(y - 5)$. So $x - 3y = 10$ and $x - 7y = -30$. Subtract: $4y = 40$, $y = 10$, $x = 40$. Jacob 40 years, son 10 years.

Q.6 A boat goes 30 km upstream and 44 km downstream in 10 hours; 40 km upstream and 55 km downstream in 13 hours. Find the speed of the

MERIT SPRING · CLASS 10 · NOTES BY ABHISHEK SIR

stream and the boat in still water.

Ans. Let u = speed of boat, v = stream. Put $1/(u - v) = p$, $1/(u + v) = q$: $30p + 44q = 10$, $40p + 55q = 13$. Solving: $p = 1/5$, $q = 1/11$. So $u - v = 5$, $u + v = 11$, $u = 8$ km/h, $v = 3$ km/h.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] The pair $x + 2y - 5 = 0$ and $-3x - 6y + 15 = 0$ has how many solutions?

Ans. Ratios $1/-3 = 2/-6 = -5/15$, so lines coincide: infinitely many solutions.

Q.2 [1 mark] If the lines are parallel, how many solutions does the pair have?

Ans. No solution.

Q.3 [2 marks] Solve: $2x + 3y = 11$ and $2x - 4y = -24$.

Ans. Subtract: $7y = 35$, $y = 5$. Then $2x = 11 - 15 = -4$, $x = -2$.

Q.4 [2 marks] Find k for which the pair $3x + y = 1$ and $(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$ has no solution.

Ans. $3/(2k-1) = 1/(k-1) \neq 1/(2k+1)$: $3k - 3 = 2k - 1$, $k = 2$.

Q.5 [3 marks] The sum of the digits of a two-digit number is 9. Nine times the number is twice the number obtained by reversing the digits. Find the number.

Ans. Let tens digit x, units y. $x + y = 9$; $9(10x + y) = 2(10y + x)$, i.e. $88x = 11y$, so $y = 8x$. With $x + y = 9$ we get $9x = 9$, $x = 1$, $y = 8$. Number: 18.

Q.6 [3 marks] Solve by cross-multiplication: $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$.

Ans. $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -3$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1$, $c_2 = -1$. $x/(-2-3) = y/(-6+1) = 1/(-1-4)$: $x = 1$, $y = 1$.

MERIT SPRING · CLASS 10 · NOTES BY ABHISHEK SIR

HINDI VERSION

दो चरों वाले रैखिक समीकरण युग्म

MERIT SPRING
CLASS 10
NOTES BY ABHISHEK SIR

अध्याय समीक्षा

- दो चरों में रैखिक समीकरण: $ax + by + c = 0$ रूप का समीकरण, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और a, b दोनों शून्य नहीं हैं। इसके अनंत हल होते हैं और आलेख सीधी रेखा है। दो चरों में रैखिक समीकरण युग्म: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$।
- आलेखीय विधि: दोनों समीकरणों की रेखाएँ एक ही ग्राफ पर खींचते हैं। (i) रेखाएँ एक बिंदु पर काटें तो वह बिंदु अद्वितीय हल है (संगत युग्म)। (ii) रेखाएँ संपाती हों तो अनंत हल (संगत, आश्रित)। (iii) रेखाएँ समांतर हों तो कोई हल नहीं (असंगत)।
- संगतता की शर्तें: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के लिए: यदि $a_1/a_2 \neq b_1/b_2$ तो रेखाएँ प्रतिच्छेद करती हैं, अद्वितीय हल। यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$ तो रेखाएँ संपाती हैं, अनंत हल। यदि $a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$ तो रेखाएँ समांतर हैं, कोई हल नहीं।
- प्रतिस्थापन विधि: चरण 1: किसी समीकरण से एक चर (जैसे y) को दूसरे चर के पदों में लिखें। चरण 2: उसे दूसरे समीकरण में रखें ताकि एक चर का समीकरण मिले। चरण 3: उसे हल करें। चरण 4: मान वापस रखकर दूसरा चर निकालें। उदाहरण: $x + y = 14$, $x - y = 4$: $x = 14 - y$, अतः $14 - 2y = 4$, $y = 5$, $x = 9$।
- विलोपन विधि: चरण 1: समीकरणों को उपयुक्त संख्याओं से गुणा करें ताकि किसी एक चर के गुणांक बराबर हो जाएँ। चरण 2: समीकरणों को जोड़कर या घटाकर वह चर हटा दें। चरण 3: प्राप्त समीकरण हल करें। चरण 4: मान रखकर दूसरा चर निकालें। उदाहरण: $3x + 2y = 11$, $2x + 3y = 4$ से $x = 5$, $y = -2$।
- वज्र गुणन विधि: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ और $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के लिए, जहाँ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, $x/(b_1c_2 - b_2c_1) = y/(c_1a_2 - c_2a_1) = 1/(a_1b_2 - a_2b_1)$। इससे हल सीधे मिलता है।
- रैखिक युग्म में समानीत होने वाले समीकरण: $2/x + 3/y = 13$ जैसे समीकरणों में $1/x = p$ और $1/y = q$ रखकर रैखिक युग्म बनाते हैं, p और q हल करते हैं, फिर x और y ज्ञात करते हैं।
- शाब्दिक प्रश्न: प्रश्न पढ़कर अज्ञात राशियों (आयु, संख्या, चाल व समय, वस्तुओं के मूल्य) के लिए दो चर मानें, शर्तों से दो समीकरण बनाएँ और किसी भी विधि से हल करें। प्रमुख प्रकार: आयु, संख्या के अंक, चाल-दूरी-समय (धारा के अनुकूल व प्रतिकूल), भिन्न, ज्यामिति और मूल्य के प्रश्न। उत्तर की जाँच शर्तों से अवश्य करें।

मुख्य शब्दावली

रैखिक समीकरण – $ax + by + c = 0$; आलेख सीधी रेखा।

रैखिक समीकरण युग्म – समान दो चरों में दो रैखिक समीकरण।

संगत युग्म – जिसका कम से कम एक हल हो।

असंगत युग्म – जिसका कोई हल न हो (समांतर रेखाएँ)।

आश्रित युग्म – संगत युग्म जिसके अनंत हल हों (संपाती रेखाएँ)।

प्रतिस्थापन विधि – एक चर को दूसरे के पदों में लिखकर रखना।

विलोपन विधि – गुणांक बराबर करके जोड़/घटाकर एक चर हटाना।

वज्र गुणन – a, b, c से हल का सीधा सूत्र।

संपाती रेखाएँ – एक-दूसरे पर पड़ी रेखाएँ; अनंत हल।

समांतर रेखाएँ – कभी न मिलने वाली रेखाएँ; कोई हल नहीं।

प्रतिच्छेदी रेखाएँ – एक बिंदु पर मिलने वाली रेखाएँ; अद्वितीय हल।

हल – युग्म (x, y) जो दोनों समीकरणों को संतुष्ट करे।

आरेख / फ्लोचार्ट

रेखा युग्म की शर्तें

अनुपात शर्त	आलेख	हल
$a_1/a_2 \neq b_1/b_2$	प्रतिच्छेदी	अद्वितीय
$a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2$	संपाती	अनंत
$a_1/a_2 = b_1/b_2 \neq c_1/c_2$	समांतर	कोई नहीं

हल करने की विधियाँ

समीकरण युग्म

- आलेखीय
  - दोनों रेखाएँ खींचें
  - मिलन बिंदु पढ़ें
- बीजीय
  - प्रतिस्थापन
  - विलोपन
  - वज्र गुणन

प्रतिस्थापन विधि

x को y में लिखें
↓
दूसरे समीकरण में रखें
↓
y हल करें
↓
y से x निकालें
↓
हल की जाँच करें

संगत बनाम असंगत

संगत

- अद्वितीय या अनंत हल
- रेखाएँ मिलें या संपाती

असंगत

- कोई हल नहीं
- रेखाएँ समांतर

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 प्रतिस्थापन से हल कीजिए: $x + y = 14$ और $x - y = 4$।

उत्तर- पहले से $x = 14 - y$। दूसरे में रखने पर $14 - 2y = 4$, $y = 5$ और $x = 9$। हल: $(9, 5)$।

प्र.2 विलोपन से हल कीजिए: $3x + 2y = 11$ और $2x + 3y = 4$।

उत्तर- पहले को 3 और दूसरे को 2 से गुणा: $9x + 6y = 33$, $4x + 6y = 8$। घटाने पर $5x = 25$, $x = 5$। तब $y = -2$। हल $(5, -2)$।

प्र.3 k के किस मान के लिए $2x + 3y = 7$ और $(k - 1)x + (k + 2)y = 3k$ के अनंत हल होंगे?

उत्तर- $2/(k-1) = 3/(k+2) = 7/(3k)$ चाहिए। $2(k+2) = 3(k-1)$ से $k = 7$। जाँच: $3/9 = 7/21 = 1/3$। अतः $k = 7$।

प्र.4 जाँचिए कि $2x + 3y = 9$ और $4x + 6y = 18$ संगत हैं या नहीं।

उत्तर- $a_1/a_2 = b_1/b_2 = c_1/c_2 = 1/2$, अतः रेखाएँ संपाती हैं: संगत और अनंत हल।

प्र.5 पाँच वर्ष बाद जैकब की आयु उसके पुत्र की आयु की तीन गुनी होगी। पाँच वर्ष पहले जैकब की आयु पुत्र की आयु की सात गुनी थी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

उत्तर- वर्तमान आयु x और y मानें। $x + 5 = 3(y + 5)$; $x - 5 = 7(y - 5)$। अतः $x - 3y = 10$ और $x - 7y = -30$। घटाने पर $4y = 40$, $y = 10$, $x = 40$। जैकब 40 वर्ष, पुत्र 10 वर्ष।

प्र.6 एक नाव धारा के प्रतिकूल 30 km और अनुकूल 44 km जाने में 10 घंटे लेती है; प्रतिकूल 40 km और अनुकूल 55 km में 13 घंटे लेती है। धारा की चाल और स्थिर जल में नाव की चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- नाव की चाल u, धारा v। $1/(u - v) = p$, $1/(u + v) = q$ रखें: $30p + 44q = 10$, $40p + 55q = 13$। हल: $p = 1/5$, $q = 1/11$। अतः $u - v = 5$, $u + v = 11$, $u = 8$ km/h, $v = 3$ km/h।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] युग्म $x + 2y - 5 = 0$ और $-3x - 6y + 15 = 0$ के कितने हल हैं?

उत्तर- अनुपात $1/-3 = 2/-6 = -5/15$, अतः रेखाएँ संपाती: अनंत हल।

प्र.2 [1 अंक] यदि रेखाएँ समांतर हों तो युग्म के कितने हल होते हैं?

उत्तर- कोई हल नहीं।

प्र.3 [2 अंक] हल कीजिए: $2x + 3y = 11$ और $2x - 4y = -24$।

उत्तर- घटाने पर $7y = 35$, $y = 5$। तब $2x = 11 - 15 = -4$, $x = -2$।

प्र.4 [2 अंक] k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $3x + y = 1$ और $(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$ का कोई हल नहीं है।

उत्तर- $3/(2k-1) = 1/(k-1) \neq 1/(2k+1)$: $3k - 3 = 2k - 1$, $k = 2$।

प्र.5 [3 अंक] दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। संख्या का नौ गुना, अंक पलटने पर बनी संख्या के दुगुने के बराबर है। संख्या ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दहाई x, इकाई y। $x + y = 9$; $9(10x + y) = 2(10y + x)$ अर्थात $88x = 11y$, $y = 8x$। $x + y = 9$ से $x = 1$, $y = 8$। संख्या: 18।

प्र.6 [3 अंक] वज्र गुणन से हल कीजिए: $x + 2y = 3$, $2x - y = 1$।

उत्तर- $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = -3$; $a_2 = 2$, $b_2 = -1$, $c_2 = -1$। $x/(-2-3) = y/(-6+1) = 1/(-1-4)$: $x = 1$, $y = 1$।