

3.1 Why did humans start counting?

Before schools, before cities, before writing, there was one very practical problem: **keeping count**. Imagine a herdsman on the banks of the Saraswati river thousands of years ago. His cows go to the forest every morning and return in the evening. How will he know if a calf is missing? He had no number names. So he did a clever thing called **one-to-one correspondence**: for every cow that leaves, put **one pebble** in a clay pot; for every cow that returns, take one pebble out. If the pot is empty in the evening, all cows are back. If pebbles are left, that many cows are missing.

This simple matching of one thing with another gave birth to the **Natural Numbers**: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Bones that count: Lebombo and Ishango

- The **Lebombo bone** (South Africa/Eswatini, about **35,000 years old**) has **29 neat notches**, probably a moon-phase calendar. So people were counting time with numbers.
- The **Ishango bone** (Congo, about **20,000 BCE**) has three columns of notches. One column shows **11, 13, 17, 19**, the **prime numbers between 10 and 20**. Another seems to show **doubling**. So the idea of number is tens of thousands of years old.

The Indian story: trade and big numbers

In the Indus Valley cities such as **Lothal and Harappa**, standard weights and measures were needed for trade (pottery, lapis lazuli, cotton). In the Vedas, names were given to all powers of 10 up to **10^{12}** (called **parārdha**). The Lalitavistara goes up to **10^{53}** (**tallakṣhana**). The R̥gveda used powers of 10, and this prepared the ground for our **place-value, base-10 system** and for the idea of **zero**.

Exercise Set 3.1 (solved)

Q.1 A merchant in Lothal gets 15 copper ingots for every 2 bags of spices. He brings 12 bags. How many ingots does he get?

Ans. 12 bags = 6 groups of 2 bags. Each group gives 15 ingots. So $6 \times 15 = 90$ ingots.

Q.2 The Ishango column has 11, 13, 17, 19. What is common? Give the next three numbers.

Ans. All are **prime numbers** (only divisible by 1 and themselves). Next three primes: 23, 29, 31.

Q.3 Natural numbers are closed under addition. Are they closed under subtraction?

Ans. **No.** $7 - 3 = 4$ is natural, but $3 - 7 = -4$ and $5 - 5 = 0$ are **not** natural numbers. So subtraction can take us out of N . This is why we needed zero and negatives.

Q.4 Each finger has 3 joints, counted with the thumb. How many can you count on one hand? Relation with base 12?

Ans. 4 fingers $\times$ 3 joints = **12**. So one hand counts up to 12. That is why ancient people used **base 12** (a dozen). We still see it: 12 months, 12 hours on the clock, 12 inches in a foot.

3.2 The great idea: Śhūnya (zero)

For thousands of years the number line began at 1. If you had 5 apples and gave all 5 away, there was no number for 'nothing left'. Babylonians and Mayans used a **placeholder** (a mark for an empty column), but they did not treat it as a number you can add or multiply.

India's thinkers had already given deep respect to **Śhūnyatā** (emptiness) in the Upanishads, Buddhist texts and Patanjali's Yoga Sutras, where emptying

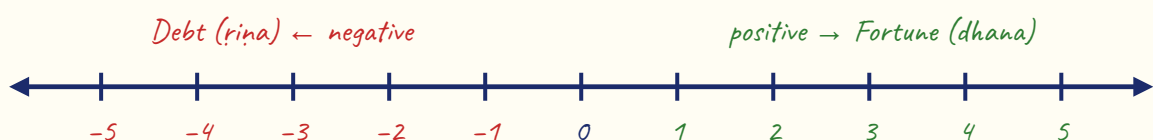
the mind is the goal of meditation. Because of this, the idea of 'nothing' was welcome. It moved into architecture, language, then into mathematics through Āryabhata and finally **Brahmagupta (628 CE)**.

The **Bakhshālī Manuscript** (early centuries CE) uses a bold dot (**bindu**) for zero. But a symbol is just a mark until it has **rules**. Brahmagupta, in the **Brāhmasphuṭasiddhānta**, defined zero as $a - a = 0$ and gave its rules.

Rule	Meaning	Example
$a + 0 = a$	adding zero changes nothing	$7 + 0 = 7$
$a - 0 = a$	subtracting zero changes nothing	$9 - 0 = 9$
$a \times 0 = 0$	anything times zero is zero	$25 \times 0 = 0$

3.3 Integers: the world on both sides of zero

If $5 - 5 = 0$, what is $3 - 5$? Brahmagupta answered with business sense. A **fortune (dhana)** is a positive number. A **debt (rīṇa)** is a negative number. Going to the **left** of zero on the number line gives negatives. Positive numbers, their negatives and zero together form the **Integers, Z** (from the German word **Zahlen**, 'numbers').



Brahmagupta's rules for integers

- **Fortune + fortune = fortune:** $5 + 4 = 9$.
- **Debt + debt = debt:** $(-5) + (-4) = -9$. You owe ₹5 and borrow ₹4 more, so you owe ₹9.
- **Fortune - 0 = fortune; debt - 0 = debt:** $7 - 0 = 7$, and $-6 - 0 = -6$.

- **Debt $\times$ fortune = debt:** $(-3) \times 4 = -12$. Four debts of ₹3 make a debt of ₹12.
- **Debt $\times$ debt = fortune:** $(-3) \times (-4) = +12$.

Think! Why is negative $\times$ negative = positive? A negative number is a debt. Multiplying by a negative number means **removing** that debt. If someone takes away 4 debts of ₹3 each, you are ₹12 **richer**. So $(-3) \times (-4) = +12$.

Teacher's Note: Quick sign rules: **same signs $\rightarrow$ positive, different signs $\rightarrow$ negative** (for $\times$ and $\div$). $(-)(-) = +$, $(+)(+) = +$, $(-)(+) = -$.

Exercise Set 3.2 (solved)

Q.1 Ladakh is 4°C at noon and falls by 15°C by midnight. Midnight temperature?

Ans. $4 - 15 = -11^\circ\text{C}$. (Going 4 steps down reaches 0, then 11 more below zero.)

Q.2 A trader takes a loan of ₹850, next day earns ₹1200, next week loses ₹450. Write the equation and the final position.

Ans. Debt = -850. Profit = +1200. Loss = -450. Equation: $-850 + 1200 - 450$. Compute: $-850 + 1200 = 350$; $350 - 450 = -100$. He is still in debt of ₹100.

Q.3 Calculate: (i) $(-12) \times 5$ (ii) $(-8) \times (-7)$ (iii) $0 - (-14)$ (iv) $(-20) \div 4$

Ans. (i) different signs, so negative: -60 .

(ii) same signs, so positive: 56 .

(iii) taking away a debt of 14 from zero makes you richer: $0 + 14 = 14$.

(iv) different signs: -5 .

Q.4 Using debt, explain why subtracting a negative = adding a positive, e.g. $10 - (-5) = 15$.

Ans. You have ₹10. Someone removes a **debt of ₹5** that you owed. Removing a debt makes you ₹5 richer: $10 + 5 = 15$. So subtracting -5 is the same as adding 5.

3.4 Fractions and Rational Numbers

Counting is not enough; we must also **measure**. How do three children share a wheat field? How much is half a cup of ghee? Parts of a whole are **fractions**. Just as 3 has the opposite -3 , every positive fraction has an opposite, a **negative fraction**. The minus sign can sit anywhere: $-1/5 = (-1)/5 = 1/(-5)$.

Put all integers and all fractions (positive and negative) together and you get the **Rational Numbers, Q** (Q for *quotient*). **A rational number is any number that can be written as p/q , where p and q are integers and $q \neq 0$.**

Think! Why $q \neq 0$? Because dividing by zero has no meaning. If $5/0 = x$, then $x \times 0$ should be 5, but anything $\times 0$ is 0. Contradiction. So we never allow zero in the denominator.

Four things to understand clearly

- **Every integer is rational.** $5 = 5/1$ and $-10 = -10/1$. So N , whole numbers and Z are all inside Q .
- **A rational number has many forms.** $-1/3 = -2/6 = -3/9 = -10/30$. These are **equivalent fractions**. Dividing or multiplying numerator and denominator by the same number does not change the value. $12/30 = 2/5$ (divide both by 6).

- **Standard form:** when we plot or name a rational p/q , we take $q > 0$ and p, q with no common factor except 1 (**co-prime**). Out of $1/2, 2/4, 3/6, 1013/2026 \dots$ we choose **$1/2$** .
- **Laws.** $a/b = c/d$ if $ad = bc$. $a/b \pm c/b = (a \pm c)/b$ (same denominator!).
 $a/b \times c/d = ac/bd$. $a/b \div c/d = a/b \times d/c = ad/bc$ ($c \neq 0$). Addition and multiplication are **commutative**, and **distributive law** holds: $p(q + r) = pq + pr$.

Teacher's Note: Closure. Rationals are closed under $+$, $-$ and $\times$: the result is again rational. They are closed under $\div$ too, **except division by 0**.
 Naturals are not closed under $-$; integers are not closed under $\div$ ($1 \div 2$ is not an integer). Rationals fix both problems.

Think! To add $1/3$ and $1/4$ with different denominators, make them equal using the **LCM** of the denominators: $\text{LCM}(3, 4) = 12$. So $1/3 = 4/12$ and $1/4 = 3/12$; sum $= 7/12$. Distributive law check: $2 \times (1/2 + 1/3) = 2 \times 5/6 = 5/3$, and $2 \times 1/2 + 2 \times 1/3 = 1 + 2/3 = 5/3 \checkmark$.

Exercise Set 3.3 (solved)

Q.1 Prove equal: (i) $2/3$ and $4/6$ (ii) $5/4$ and $10/8$ (iii) $-3/5$ and $-6/10$ (iv) $9/3$ and 3

Ans. Use $a/b = c/d$ if $ad = bc$ (cross-multiply).

(i) $2 \times 6 = 12$ and $3 \times 4 = 12 \checkmark$. (ii) $5 \times 8 = 40$ and $4 \times 10 = 40 \checkmark$.
 (iii) $(-3) \times 10 = -30$ and $5 \times (-6) = -30 \checkmark$. (iv) $3 = 3/1$: $9 \times 1 = 9$ and $3 \times 3 = 9 \checkmark$.

Q.2 Sum: (i) $2/5 + 3/10$ (ii) $7/12 + 5/8$ (iii) $-4/7 + 3/14$

Ans. (i) LCM 10: $4/10 + 3/10 = 7/10$.

(ii) LCM 24: $14/24 + 15/24 = 29/24$.

(iii) LCM 14: $-8/14 + 3/14 = -5/14$.

Q.3 Difference: (i) $5/6 - 1/4$ (ii) $11/8 - 3/4$ (iii) $-7/9 - (-2/3)$

Ans. (i) LCM 12: $10/12 - 3/12 = 7/12$.

(ii) LCM 8: $11/8 - 6/8 = 5/8$.

(iii) $-7/9 + 2/3 = -7/9 + 6/9 = -1/9$.

Q.4 Product: (i) $2/3 \times 3/10$ (ii) $7/11 \times 5/8$ (iii) $-4/7 \times 5/14$

Ans. (i) $6/30 = 1/5$. (ii) $35/88$. (iii) $-20/98 = -10/49$.

Q.5 Quotient: (i) $2/3 \div 3/10$ (ii) $7/11 \div 5/8$ (iii) $-4/7 \div 5/14$

Ans. Flip the second fraction and multiply.

(i) $2/3 \times 10/3 = 20/9$. (ii) $7/11 \times 8/5 = 56/55$. (iii) $-4/7 \times 14/5 = -56/35 = -8/5$.

Q.6 Show that $(1/2 + 3/4) \times 8/3 = 1/2 \times 8/3 + 3/4 \times 8/3$.

Ans. Left side: $1/2 + 3/4 = 5/4$, and $5/4 \times 8/3 = 40/12 = 10/3$. Right side: $1/2 \times 8/3 = 4/3$ and $3/4 \times 8/3 = 2$, so $4/3 + 2 = 10/3$. Both sides are $10/3$ ✓.

Q.7 Simplify using distributive property: $7/9 \times (6/7 - 3/4)$.

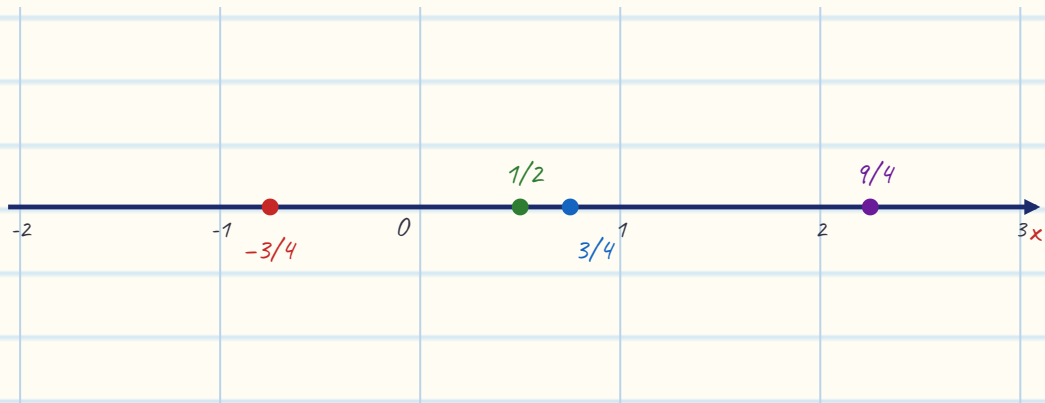
Ans. $7/9 \times 6/7 - 7/9 \times 3/4 = 6/9 - 21/36 = 2/3 - 7/12 = 8/12 - 7/12 = 1/12$.

Q.8 Find x: $5/6 (x + 3/5) = 5/6 x + 1/2$.

Ans. Expand the left: $5/6 x + 5/6 \times 3/5 = 5/6 x + 1/2$. Both sides are exactly the same! So the equation is true for **every rational x** (it is an identity).

Rational numbers on the number line

To mark p/q : divide the unit gap between two integers into **q equal parts**, then move **p** parts from 0 (right if positive, left if negative). Example: $3/4$ means divide 0 to 1 into 4 parts and take 3 parts. For $9/4 = 2\frac{1}{4}$, it lies between 2 and 3, so divide 2 to 3 into 4 parts and take 1 part from 2.



$-3/4$, $1/2$, $3/4$ and $9/4$ on the number line

Absolute value and distance

The **absolute value** $|x|$ is the distance of x from 0 on the number line. So $|3/5| = 3/5$ and $|-3/5| = 3/5$, $|0| = 0$. It is never negative: $|x| \geq 0$. The distance between two numbers a and b is $|a - b|$. Example: between -4 and 3 : $|-4 - 3| = |-7| = 7$.

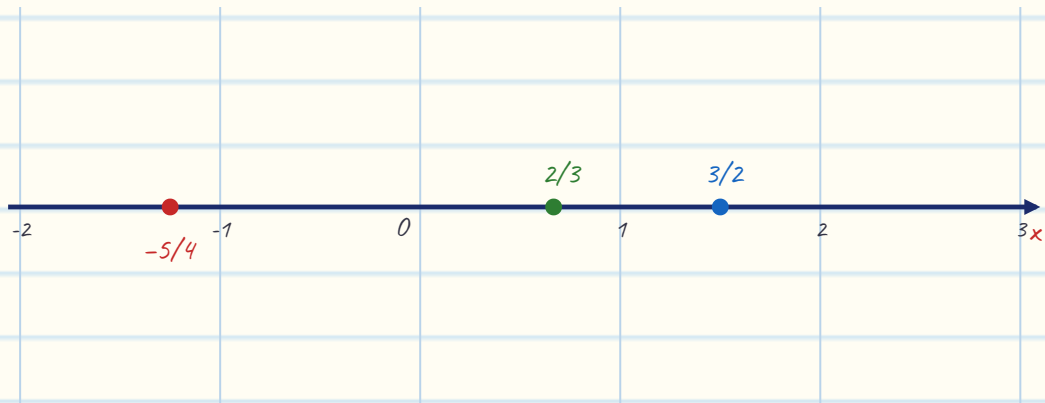
Density: infinitely many between any two

Between 1 and 2 there is $3/2$. Between 1 and $3/2$ there is $5/4$. This never stops. **Between any two rational numbers, their average $(a + b)/2$ is another rational number lying between them.** Why? If $a < b$ then $a + a < a + b < b + b$, so $a < (a + b)/2 < b$. Because of this, rational numbers are called **dense**. It feels as if they must fill the whole number line. But do they? Wait for section 3.5.

Exercise Set 3.4 (solved)

Q.1 Represent $2/3$, $-5/4$ and $1\frac{1}{2}$ on one number line.

Ans. $2/3$ is between 0 and 1: divide into 3 parts, take 2. $-5/4 = -1\frac{1}{4}$: between -2 and -1 , go 1 whole and then $1/4$ more to the left. $1\frac{1}{2} = 3/2$: halfway between 1 and 2.



$2/3$, $-5/4$ and $3/2$

Q.2 Find three rational numbers strictly between $-1/2$ and $1/4$.

Ans. Many answers. Take $-1/4$ (it is bigger than $-1/2$), 0 , and $1/8$ (smaller than $1/4$). So $-1/4$, 0 , $1/8$ work. (Writing in eighths: $-4/8 < -2/8 < 0 < 1/8 < 2/8$.)

Q.3 Simplify $(-1/4) + (5/12)$.

Ans. LCM 12: $-3/12 + 5/12 = 2/12 = 1/6$.

Q.4 A tailor has $15\frac{3}{4}$ m of silk. One kurta needs $2\frac{1}{4}$ m. How many kurtas?

Ans. $15\frac{3}{4} = 63/4$ and $2\frac{1}{4} = 9/4$. Kurtas = $63/4 \div 9/4 = 63/9 = 7$ kurtas, with no silk left.

Q.5 Find three rational numbers between 3.1415 and 3.1416.

Ans. Write them with one more digit: 3.14150 and 3.14160. Now pick 3.14152, 3.14155, 3.14158.

Q.6 Another way to find a rational number between two rationals?

Ans. Yes. Write both with the same denominator and then multiply top and bottom by 10 (or any big number) to make space. Example: $1/3$ and $1/2 = 2/6$ and $3/6 = 20/60$ and $30/60$, so $21/60$ lies between them. Or use more decimal digits as in Q5.

3.5 Irrational numbers: the gaps in the line

For centuries people believed every length is a ratio of integers. Then Baudhāyana (about 800 BCE, Śhulbasūtra) and the Greeks met a length that is not. Take a **square of side 1**. By the Baudhāyana–Pythagoras theorem, diagonal d has $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, so $d = \sqrt{2}$. And $\sqrt{2}$ **cannot** be written as p/q . Numbers on the line that are not ratios of integers are **irrational numbers**.

Proof that $\sqrt{2}$ is irrational (proof by contradiction)

The method: **assume the opposite** of what we want, and show that it leads to something impossible. Hippasus (about 400 BCE) did this first.

Proof

Step 1 Suppose $\sqrt{2}$ is rational. Then $\sqrt{2} = p/q$ in simplest form (p, q integers, $q \neq 0$, **no common factor** except 1).

Step 2 Square both sides: $2 = p^2/q^2$.

Step 3 Multiply by q^2 : **$2q^2 = p^2$** .

Step 4 So p^2 is even. If the square of a number is even, the number is even. So **p is even**: $p = 2k$.

Step 5 Put back: $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$.

Step 6 Divide by 2: **$q^2 = 2k^2$** .

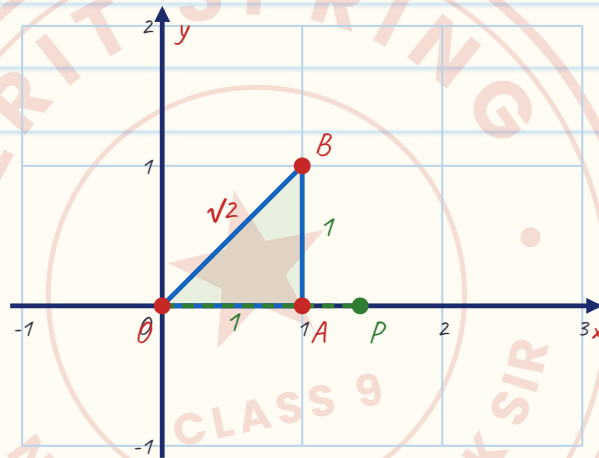
Step 7 So q^2 is even, hence **q is even**.

Step 8 Now p and q are both even, so **2 is a common factor**. This contradicts Step 1. So our assumption was wrong: **$\sqrt{2}$ is irrational**.

Think! The same proof works for $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ (replace 2 by the prime). It also works for $\sqrt{10}$. It does **not** work for $\sqrt{4}$ or $\sqrt{9}$, because those are perfect squares: $\sqrt{4} = 2$ is rational. So: $\sqrt{n}$ is irrational when n is not a perfect square.

Drawing $\sqrt{2}$ on the number line

- On the number line take $OA = 1$ unit. At A draw a perpendicular and mark B with $AB = 1$. Join OB . By Pythagoras $OB = \sqrt{(1^2 + 1^2)} = \sqrt{2}$.
- With centre O and radius OB , draw an arc to meet the number line at P . Then $OP = \sqrt{2}$ and **P represents $\sqrt{2}$** on the line (about 1.414).
- To get $\sqrt{3}$: at P draw a perpendicular of length 1, join O to its top, giving $\sqrt{(2 + 1)} = \sqrt{3}$. Continue the same way to get $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{n}$. This is the **square root spiral**.



Construction of $\sqrt{2}$: right triangle OAB , then arc $OB \rightarrow P$

π and Mādhava's infinite series

π = circumference $\div$ diameter is also irrational (proved by Lambert in 1761). Āryabhaṭa (499 CE) gave $3927/1250 = 3.1416$ but wisely called it **āsanna**, an approximation. Mādhava of Kerala (14th century) found that an irrational number needs an **infinite sum**: $\pi = 4 \times (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$

- Adding infinitely many terms means seeing what value we get closer and closer to.

3.6 Real numbers and decimals

Rationals and irrationals together make the **Real Numbers, R** : the full, unbroken number line. The easiest way to tell them apart is the **decimal expansion**.

Type	Decimal	Example
Rational (terminates)	stops	$3/8 = 0.375$
Rational (repeats)	a block repeats forever (digits in brackets repeat)	$5/11 = 0.454545... = 0.(45)$
Irrational	never stops, never repeats	$\sqrt{2} = 1.41421356..., \pi = 3.14159...$

Think! $10/3 = 3.333...$ (the digit 3 repeats). $11/12 = 0.91666...$ (91 does not repeat, then 6 repeats). So repetition may begin after a few digits.

Why do some rationals repeat? Divide 1 by 7. The only possible remainders are 1, 2, 3, 4, 5, 6 (never 0, or it would stop). After at most 6 steps a remainder **must come again**. From there the whole division repeats. So $1/7 = 0.142857142857...$

Predict before dividing

Write p/q in lowest terms. The decimal **terminates** only when the prime factors of q are **only 2s and/or 5s**. Why? Because then we can multiply top and bottom to make the denominator a power of 10. Example: $3/20$: $20 = 2^2 \times 5$. Multiply by 5: $15/100 = 0.15$. Otherwise the decimal is **non-terminating repeating**.

Fraction	Denominator factors	Decimal
$3/20$	$2^2 \times 5$	0.15 terminates
$7/8$	2^3	0.875 terminates
$1/3$	3	0.333... repeats
$5/6$	2×3	0.8333... repeats

Converting a decimal into p/q

Case 1: Terminating. Convert 0.35

Step 1: $0.35 = 35/100 = 7/20$.

Case 2: Pure repeating. Convert 0.(6) (6 repeats)

Step 1: Let $x = 0.666...$

Step 2: One digit repeats, so multiply by 10: $10x = 6.666...$

Step 3: Subtract: $10x - x = 6.666... - 0.666... = 6$. So $9x = 6$.

Step 4: $x = 6/9 = 2/3$.

Pure repeating with two digits: 0.4545... = 0.(45)

Step 1: Let $x = 0.4545...$ Two digits repeat, so multiply by 100: $100x = 45.4545...$

Step 2: Subtract: $99x = 45$, so $x = 45/99 = 5/11$.

Case 3: General repeating. Convert 0.1666... (1 does not repeat, 6 repeats)

Step 1: Let $x = 0.1666...$

Step 2: Move the non-repeating digit: $10x = 1.666...$

Step 3: Move one repeating block more: $100x = 16.666...$

Step 4: Subtract: $100x - 10x = 16.666... - 1.666... = 15$, so $90x = 15$ and $x = 15/90 = 1/6$.

Another: 2.3577... (35 does not repeat, 7 repeats)

Step 1: $x = 2.35777...$ Multiply by 100 (two non-repeating digits): $100x = 235.777...$

Step 2: Multiply by 1000 (one more repeating digit): $1000x = 2357.777...$

Step 3: Subtract: $900x = 2122$, so $x = 2122/900 = 1061/450$.

Decimal type	Steps
Pure repeating	$x = \text{number}$. Multiply by 10^n ($n = \text{repeating digits}$). Subtract. Solve.
General repeating	$x = \text{number}$. Multiply by 10^m ($m = \text{non-repeating digits}$) and again by 10^n more ($n = \text{repeating digits}$). Subtract. Solve.

Careful! Common mistakes: multiplying by the wrong power of 10, and forgetting to simplify the fraction at the end. Always check by dividing p by q once.

The magic of cyclic numbers

$1/7 = 0.142857142857...$ The block **142857** is a **cyclic number**. Multiply it by 1 to 6 and the same digits just rotate: $142857 \times 2 = 285714$, $\times 3 = 428571$, $\times 4 = 571428$, $\times 5 = 714285$, $\times 6 = 857142$. A beautiful pattern hidden inside the rational number $1/7$.

Irrational decimals

Irrational numbers have decimals that **never end and never repeat**: $\sqrt{2} = 1.4142135623...$, $\pi = 3.1415926535...$ No block loops forever.

Exercise Set 3.5 (solved)

Q.1 Without dividing, say which of $7/20$, $4/15$, $13/250$ terminate. Then check by long division.

Ans. $7/20$: $20 = 2^2 \times 5$, only 2 and 5, so **terminates**: $7/20 = 0.35$.

4/15: $15 = 3 \times 5$. A factor 3 is present, so it **repeats**: $4/15 = 0.2666... = 0.2(6)$ (6 repeats).

13/250: $250 = 2 \times 5^3$, so **terminates**: $13/250 = 0.052$.

Q.2 Long division of $1/13$. Repeating block? What about $2/13$, $3/13$, $4/13$?

Ans. $1/13 = 0.076923\ 076923...$ The block is **076923** (6 digits). $2/13 = 0.153846...$, $3/13 = 0.230769...$, $4/13 = 0.307692...$

Observation: $3/13$ and $4/13$ use the **same digits 0-7-6-9-2-3 in the same circular order**, only starting at a different place (cyclic). But $2/13$ gives a different block 153846 (which is itself cyclic: $5/13 = 0.384615$, $6/13 = 0.461538$, and so on). So 13 gives **two** cyclic families.

Q.3 Classify as rational or irrational and give fractions: (i) $\sqrt{81}$ (ii) $\sqrt{12}$ (iii) $0.33333...$ (iv) $0.123451234512345...$ (v) $1.01001000100001...$ (vi) 23.560185612239874790120

Ans. (i) $\sqrt{81} = 9 = 9/1$: **rational**.

(ii) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. 12 is not a perfect square, so **irrational**.

(iii) $0.333...$ repeats: **rational**, $= 1/3$.

(iv) The block 12345 repeats: **rational**. $x = 0.1234512345...$; $100000x - x = 12345$, so $x = 12345/99999 = 4115/33333$.

(v) The number of zeros between the 1s keeps growing (1, then 2, then 3 zeros ...). **No single block repeats**, so it is **irrational**.

(vi) It **ends** (terminating), so **rational**: $23.560185612239874790120 = 23560185612239874790120/10^{20}$ (can be reduced).

Q.4 Show that $0.999... = 1$.

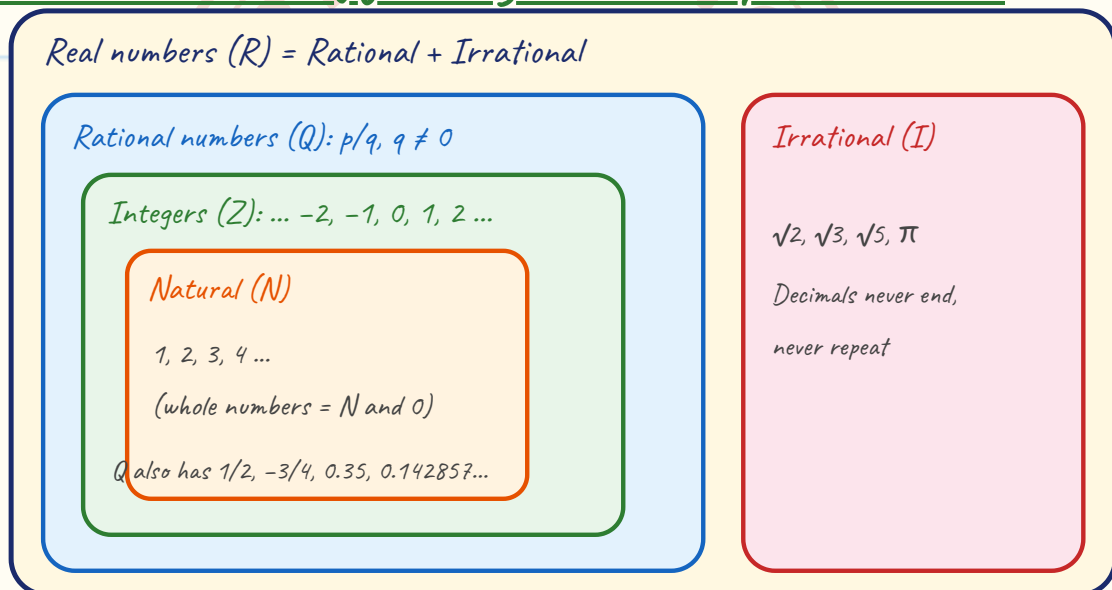
Ans. Let $x = 0.999...$. Then $10x = 9.999...$. Subtract: $10x - x = 9.999... - 0.999... = 9$. So $9x = 9$ and $x = 1$. Yes, $0.999...$ is exactly 1, not 'slightly less'.

Q.5 $1/7$ has a cyclic block. Find more n whose $1/n$ gives cyclic blocks.

Ans. Try primes. $1/17 = 0.0588235294117647...$ (16-digit block), $1/19 = 0.052631578947368421...$ (18-digit block), $1/23$ (22 digits), $1/29$, $1/47$, $1/59$, $1/61$ also give cyclic blocks. Multiplying the block by 1, 2, 3 ... just rotates the digits.

Teacher's Note: Two forms of the same number. Just as $1 = 10/10 = 100/100$, any terminating decimal has a second form with repeating 9s: $1.000... = 0.999...$, $2.47000... = 2.46999...$

3.7 The never-ending journey: the family of numbers



- **Natural (N):** 1, 2, 3 ... counting numbers.
- **Integers (Z):** add zero and negatives.
- **Rational (Q):** all p/q ($q \neq 0$). Decimals terminate or repeat.
- **Irrational (I):** like $\sqrt{2}$, π , $\sqrt{10}$. Decimals never end, never repeat.
- **Real (R):** rationals + irrationals = the whole number line.

Think! What is $\sqrt{-1}$? No real number multiplied by itself gives -1 . So mathematicians invented **imaginary numbers**, written i , used in electrical engineering, quantum physics and your mobile phone. That is a journey for a higher class.

End-of-Chapter Exercises (solved)

Q.1 Convert by long division: (i) $3/50$ (ii) $2/9$

Ans. (i) $3/50 = 6/100 = 0.06$ (terminating). (ii) $2 \div 9 = 0.222... = 0.(2)$ (the digit 2 repeats; remainder 2 comes again).

Q.2 Prove $\sqrt{5}$ is irrational.

Ans. Suppose $\sqrt{5} = p/q$, co-prime, $q \neq 0$. Square: $5q^2 = p^2$. So 5 divides p^2 . Since 5 is **prime**, 5 divides p . Let $p = 5k$. Then $5q^2 = 25k^2$, so $q^2 = 5k^2$, so 5 divides q^2 . So 5 divides q . Now 5 divides both p and q , which contradicts co-primality. So **$\sqrt{5}$ is irrational**.

Q.3 Convert to p/q : (i) 12.6 (ii) 0.0120 (iii) 3.0(52) (iv) 1.2(35) (v) 0.(23) (vi) 2.0(5) (vii) 2.12(5) (viii) 3.12(5) (ix) 2.(1625)

Ans. (Bar means that block repeats: (iii) 3.0 52 52..., (iv) 1.2 35 35..., (v) 0.23 23..., (vi) 2.0 5 5..., (vii) 2.12 5 5..., (viii) 3.12 5 5..., (ix) 2.1625 1625....)

(i) $126/10 = 63/5$.

(ii) $120/10000 = 3/250$.

(iii) $x = 3.05252...: 10x = 30.5252..., 1000x = 3052.5252... \text{ Subtract: } 990x = 3022, \text{ so } x = 1511/495$.

(iv) $x = 1.23535...: 10x = 12.3535..., 1000x = 1235.3535... \text{ } 990x = 1223, \text{ so } x = 1223/990$.

(v) $100x = 23.2323..., \text{ subtract: } 99x = 23, x = 23/99$.

(vi) $x = 2.0555...: 10x = 20.555..., 100x = 205.555... \text{ } 90x = 185, \text{ so } x = 185/90 = 37/18$.

(vii) $x = 2.12555\dots$: $100x = 212.555\dots$, $1000x = 2125.555\dots$ $900x = 1913$, so $x = \mathbf{1913/900}$.

(viii) $x = 3.12555\dots$: $100x = 312.555\dots$, $1000x = 3125.555\dots$ $900x = 2813$, so $x = \mathbf{2813/900}$.

(ix) $x = 2.16251625\dots$: $10000x = 21625.1625\dots$ Subtract x : $9999x = 21623$, so $x = \mathbf{21623/9999}$.

Q.4 Locate on the number line: (i) 0.532 (ii) 1.1(5)

Ans. (i) $0.532 = 532/1000 = 133/250$. It lies between 0.5 and 0.6. Divide 0.5 to 0.6 into 10 parts; it lies between 0.53 and 0.54, so divide that into 10 parts and take the 2nd mark.

(ii) $1.1555\dots = 52/45$. It lies between 1.1 and 1.2. Divide that gap into 10 parts; the value 1.1555... is just past the middle (1.15), a little before 1.16.

Q.5 Find 6 rational numbers between 3 and 4.

Ans. **3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6** (or $31/10, 32/10, \dots$).

Q.6 Find 5 rational numbers between $2/5$ and $3/5$.

Ans. Write as $20/50$ and $30/50$. Take **$21/50, 22/50, 23/50, 24/50, 25/50$** .

Q.7 Find 5 rational numbers between $1/6$ and $2/5$.

Ans. LCM 30: $1/6 = 5/30$ and $2/5 = 12/30$. Take **$6/30, 7/30, 8/30, 9/30, 10/30$** (that is $1/5, 7/30, 4/15, 3/10, 1/3$).

Q.8 $x/3 + x/5 = 16/15$. Find x .

Ans. LCM 15: $5x/15 + 3x/15 = 8x/15 = 16/15$. So $8x = 16$ and **$x = 2$** .

Check: $2/3 + 2/5 = 10/15 + 6/15 = 16/15 \checkmark$.

Q.9 a, b non-zero rationals with $a + 1/b = 0$. Is ab positive or negative?

Ans. $a + 1/b = 0$ means $a = -1/b$. Multiply both sides by b : $ab = -1$. So ab is negative.

Q.10 A rational with terminating decimal whose last non-zero digit is in the 4th decimal place. Show it is $p/10^4$ with p not divisible by 10. Must the lowest-form denominator be divisible by 2^4 or 5^4 ?

Ans. Moving the decimal 4 places gives an integer p , so the number is $p/10^4$. The 4th digit is non-zero, so p does not end in 0, so 10 does not divide p .

Now $10^4 = 2^4 \times 5^4$. p is not divisible by 10, so p is not divisible by 2 or not divisible by 5 (or both). If p is odd, no 2 cancels, so 2^4 stays in the denominator. If 5 does not divide p , 5^4 stays. So the denominator is divisible by 2^4 or 5^4 (at least one of them), but not necessarily both. Example: $0.0005 = 5/10^4 = 1/2000$ and $2000 = 2^4 \times 5^3$ (divisible by 2^4 only).

Q.11 Without dividing: is $18/125$ terminating? How many decimal places?

Ans. $125 = 5^3$, only 5s, so it terminates. Multiply by 2^3 : $18/125 = 144/1000 = 0.144$, so 3 decimal places.

Q.12 A rational in lowest form has denominator $2^3 \times 5$. How many decimal places?

Ans. Multiply top and bottom by 5^2 to make $2^3 \times 5^3 = 10^3$. So the decimal ends after 3 places. (In general the number of places = the larger of the powers of 2 and 5.)

Q.13 $a = 7/12$, $b = 5/6$. Write $a = k_1/m$ and $b = k_2/m$ with $k_2 - k_1 > 6$. Give five rationals between a and b . Why is $k_2 - k_1 > n + 1$ needed for n numbers?

Ans. In twelfths, $a = 7/12$ and $b = 10/12$, with $k_2 - k_1 = 3$ only. Multiply top and bottom by 3: $a = 21/36$, $b = 30/36$, so $m = 36$, $k_1 = 21$, $k_2 = 30$, and $k_2 - k_1 = 9 > 6$ ✓.

Five numbers between: **$22/36, 23/36, 24/36, 25/36, 26/36$** .

Why the condition? Between the integers k_1 and k_2 there are exactly $k_2 - k_1 - 1$ whole numbers. To fit n distinct numerators we need $k_2 - k_1 - 1 \geq n$, that is $k_2 - k_1 \geq n + 1$ (the book asks for strictly more to be safe). If the gap is small, we multiply by a bigger number to create room.

Q.14 x, y, z rational with $x + y + z = 0$ and $xy + yz + zx = 0$. Show $x = y = z = 0$.

Ans. Square the first: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$. The left side is 0 and the bracket on the right is 0, so **$x^2 + y^2 + z^2 = 0$** . Squares are never negative, so the sum of three squares is zero only when each is zero. Hence **$x = y = z = 0$** .

Q.15 Show $(a + b)/2$ lies between a and b .

Ans. Take $a < b$. Then $a + a < a + b$, so $a < (a + b)/2$. Also $a + b < b + b$, so $(a + b)/2 < b$. Hence **$a < (a + b)/2 < b$** .

Q.16 Lengths of hypotenuses in the square root spiral.

Ans. Start with a right triangle with both legs 1: hypotenuse **$\sqrt{2}$** . The next triangle has legs $\sqrt{2}$ and 1: hypotenuse $\sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$. Next legs $\sqrt{3}$ and 1: **$\sqrt{4} = 2$** . Then **$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3 (= \sqrt{9})$** , and so on. In general the n th hypotenuse is **$\sqrt{n + 1}$** . Each new one is $\sqrt{(\text{previous}^2 + 1)}$.

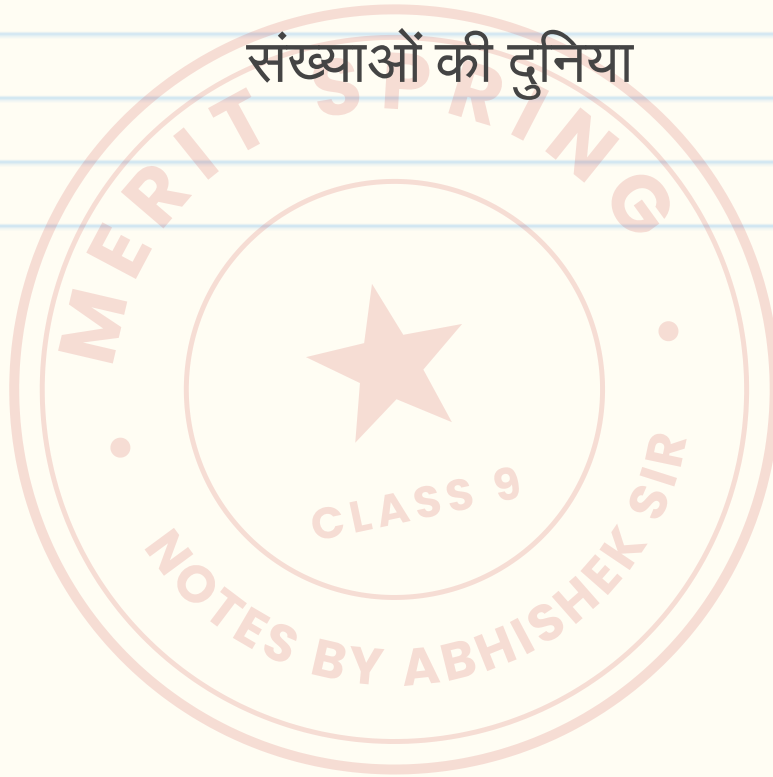
Quick Revision

- $\mathbb{N}$ counting numbers $\rightarrow \mathbb{Z}$ adds 0 and negatives $\rightarrow \mathbb{Q}$ all p/q ($q \neq 0$) $\rightarrow \mathbb{R}$ adds irrationals.
- Brahmagupta's rules: $a + 0 = a$, $a \times 0 = 0$, debt $\times$ debt = fortune.
- Rationals are dense: $(a + b)/2$ lies between a and b .
- p/q (lowest terms) terminates if q has only 2s and 5s; otherwise repeats.
- Repeating decimal $\rightarrow$ fraction: multiply by 10^n and subtract.
- $\sqrt{2}$ and π are irrational: decimals never end, never repeat. Proof of $\sqrt{2}$ by contradiction.
- $0.999... = 1$. Distance between a and $b = |a - b|$.

Teacher's Note: Do it yourself: Find the decimal of $1/7$, $2/7$, $3/7$ using long division. Which digits appear in each? What do you notice about the block?

हिंदी संस्करण

संख्याओं की दुनिया



3.1 इंसान ने गिनना क्यों शुरू किया?

स्कूल, शहर और लिखाई से भी पहले एक बहुत व्यावहारिक समस्या थी: **गिनती रखना**। हजारों साल पहले सरस्वती नदी के किनारे एक चरवाहे की कल्पना करो। उसकी गायें सुबह जंगल जाती हैं और शाम को लौटती हैं। उसे कैसे पता चले कि कोई बछड़ा खो गया? उसके पास संख्याओं के नाम नहीं थे। इसलिए उसने **एक-एक का मिलान** किया: जो गाय बाहर जाए उसके लिए मिट्टी के घड़े में **एक कंकड़** डालो; जो लौटे उसके लिए एक कंकड़ निकालो। शाम को घड़ा खाली हो तो सब गायें लौट आईं। कंकड़ बचे हों तो उतनी गायें गायब हैं।

एक चीज़ को दूसरी से मिलाने के इसी सरल काम से **प्राकृत संख्याएँ** जन्मीं: $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ।

गिनती वाली हड्डियाँ: लेबोम्बो और इशांगो

- **लेबोम्बो हड्डी** (दक्षिण अफ्रीका/एस्वातिनी, लगभग **35,000 साल पुरानी**) पर **29 सुंदर निशान** हैं, शायद चाँद की कलाओं का कैलेंडर। यानी लोग संख्याओं से समय गिन रहे थे।
- **इशांगो हड्डी** (कांगो, लगभग **20,000 ई.पू.**) पर निशानों के तीन स्तंभ हैं। एक स्तंभ में **11, 13, 17, 19** हैं, यानी **10 से 20 के बीच की अभाव्य संख्याएँ**। दूसरे में **दोगुना करना** दिखता है। अर्थात् संख्या का विचार दसियों हजार साल पुराना है।

भारत की कहानी: व्यापार और बड़ी संख्याएँ

सिंधु घाटी के शहरों, जैसे **लोथल और हड़प्पा**, में व्यापार (मिट्टी के बर्तन, लाजवर्द, कपास) के लिए मानक तौल-माप ज़रूरी थे। वेदों में 10 की सभी घातों के नाम **10^{12} (परार्ध)** तक दिए गए थे। ललितविस्तर में **10^{53} (तल्लक्षण)** तक के नाम हैं। ऋग्वेद में 10 की घातों का प्रयोग हुआ, जिससे हमारी **स्थानमान, आधार-10 प्रणाली** और **शून्य** के विचार की ज़मीन तैयार हुई।

प्रश्नावली 3.1 (हल सहित)

प्र.1 लोथल का एक व्यापारी 2 थैले मसालों के बदले 15 ताँबे की सिल्लियाँ पाता है। वह 12 थैले लाता है। उसे कितनी सिल्लियाँ मिलेंगी?

उत्तर- 12 थैले = 2-2 थैलों के 6 समूह। हर समूह से 15 सिल्लियाँ। अतः $6 \times 15 = 90$ सिल्लियाँ।

प्र.2 इशांगो के स्तंभ में 11, 13, 17, 19 हैं। इनमें क्या समान है? अगली तीन संख्याएँ?

उत्तर- सब **अभाज्य संख्याएँ** हैं (केवल 1 और स्वयं से विभाज्य)। अगली तीन अभाज्य: **23, 29, 31**।

प्र.3 प्राकृत संख्याएँ जोड़ में संवृत हैं। क्या घटाव में भी?

उत्तर- नहीं। $7 - 3 = 4$ प्राकृत है, पर $3 - 7 = -4$ और $5 - 5 = 0$ प्राकृत **नहीं** हैं। इसलिए घटाव हमें N से बाहर ले जा सकता है। इसी कारण शून्य और ऋणात्मक संख्याएँ जरूरी हुईं।

प्र.4 हर उँगली में 3 पोर हैं, अँगूठे से गिनते हैं। एक हाथ से कितना गिन सकते हो? इसका आधार-12 से संबंध?

उत्तर- 4 उँगलियाँ $\times$ 3 पोर = **12**। एक हाथ से 12 तक गिनती। इसीलिए प्राचीन लोग **आधार 12** (दर्जन) इस्तेमाल करते थे। आज भी: 12 महीने, घड़ी में 12 घंटे, 1 फुट में 12 इंच।

3.2 महान विचार: शून्य

हज़ारों साल तक संख्या रेखा 1 से शुरू होती थी। तुम्हारे पास 5 सेब हों और तुम पाँचों दे दो तो 'कुछ नहीं बचा' बताने के लिए कोई संख्या नहीं थी। बेबीलोन और मय सभ्यता वाले **स्थान-पूरक** चिह्न (खाली खाने का निशान) इस्तेमाल करते थे, पर उसे ऐसी संख्या नहीं मानते थे जिसे जोड़ा-गुणा जा सके।

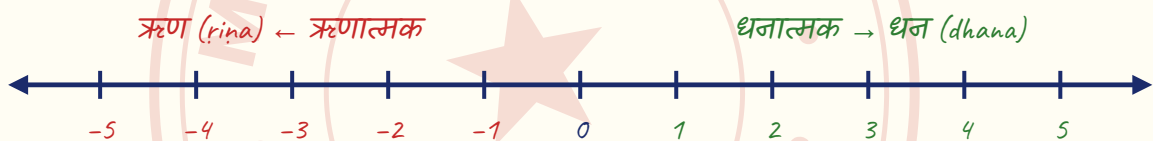
भारत के विचारकों ने उपनिषदों, बौद्ध ग्रंथों और पतंजलि के योगसूत्रों में **शून्यता** को गहरा सम्मान दिया, जहाँ मन को खाली करना ध्यान का लक्ष्य है। इसलिए 'कुछ नहीं' का विचार यहाँ स्वीकार्य था। यह वास्तुकला, भाषा और फिर आर्यभट्ट के रास्ते अंततः **ब्रह्मगुप्त (628 ई.)** के हाथों गणित में पहुँचा।

बख्शाली पांडुलिपि (आरंभिक सदियों ई.) में शून्य के लिए एक मोटा बिंदु (**बिंदु**) है। पर चिह्न तब तक केवल निशान है जब तक उसके **नियम** न हों। ब्रह्मगुप्त ने *ब्राह्मस्फुटसिद्धान्त* में शून्य को $a - a = 0$ कहकर परिभाषित किया और उसके नियम दिए।

नियम	अर्थ	उदाहरण
$a + 0 = a$	शून्य जोड़ने से कुछ नहीं बदलता	$7 + 0 = 7$
$a - 0 = a$	शून्य घटाने से कुछ नहीं बदलता	$9 - 0 = 9$
$a \times 0 = 0$	किसी भी संख्या $\times 0 = 0$	$25 \times 0 = 0$

3.3 पूर्णांक: शून्य के दोनों ओर की दुनिया

यदि $5 - 5 = 0$ है तो $3 - 5$ क्या होगा? ब्रह्मगुप्त ने व्यापारिक समझ से उत्तर दिया। **धन** (dhana) धनात्मक संख्या है। **ऋण** (rīṇa) ऋणात्मक संख्या है। संख्या रेखा पर शून्य के **बाईं ओर** जाने पर ऋणात्मक संख्याएँ मिलती हैं। धनात्मक संख्याएँ, उनकी ऋणात्मक संख्याएँ और शून्य मिलकर **पूर्णांक 2** बनाते हैं (जर्मन शब्द *Zahlen* = 'संख्याएँ' से)।



पूर्णाकों के ब्रह्मगुप्त के नियम

- धन + धन = धन: $5 + 4 = 9$
- ऋण + ऋण = ऋण: $(-5) + (-4) = -9$ । तुम पर ₹5 उधार है और ₹4 और लिए, तो ₹9 उधार हुआ।
- धन - 0 = धन; ऋण - 0 = ऋण: $7 - 0 = 7$, और $-6 - 0 = -6$ ।
- ऋण $\times$ धन = ऋण: $(-3) \times 4 = -12$ । ₹3 के चार कर्ज मिलकर ₹12 का कर्ज।
- ऋण $\times$ ऋण = धन: $(-3) \times (-4) = +12$ ।

सोचो! ऋण $\times$ ऋण = धन क्यों? ऋणात्मक संख्या कर्ज है। ऋणात्मक संख्या से गुणा का अर्थ उस कर्ज को **हटाना** है। कोई तुम्हारे ₹3 वाले 4 कर्ज हटा दे तो तुम ₹12 **अमीर** हो गए। अतः $(-3) \times (-4) = +12$ ।

शिक्षक की बात: चिह्न के झटपट नियम ($\times$ और $\div$ के लिए): **समान चिह्न $\rightarrow$ धनात्मक**, **भिन्न चिह्न $\rightarrow$ ऋणात्मक**। $(-)(-) = +$, $(+)(+) = +$, $(-)(+) = -$

प्रश्नावली 3.2 (हल सहित)

प्र.1 लद्दाख में दोपहर को 4°C है और आधी रात तक 15°C गिरता है। आधी रात का तापमान?

उत्तर- $4 - 15 = -11^\circ\text{C}$ । (4 कदम नीचे जाकर 0, फिर 11 और नीचे।)

प्र.2 एक व्यापारी ₹850 का कर्ज लेता है, अगले दिन ₹1200 कमाता है, अगले हफ्ते ₹450 गँवाता है। समीकरण और अंतिम स्थिति?

उत्तर- कर्ज = -850। लाभ = +1200। हानि = -450। समीकरण: $-850 + 1200 - 450$ ।
 $-850 + 1200 = 350$; $350 - 450 = -100$ । वह अब भी ₹100 के कर्ज में है।

प्र.3 निकालो: (i) $(-12) \times 5$ (ii) $(-8) \times (-7)$ (iii) $0 - (-14)$ (iv) $(-20) \div 4$

उत्तर- (i) भिन्न चिह्न, इसलिए ऋणात्मक: **-60**।

(ii) समान चिह्न, इसलिए धनात्मक: **56**।

(iii) शून्य में से 14 का कर्ज हटाने पर तुम अमीर होते हो: $0 + 14 = 14$ ।

(iv) भिन्न चिह्न: **-5**।

प्र.4 कर्ज के उदाहरण से समझाओ कि ऋणात्मक घटाना = धनात्मक जोड़ना, जैसे $10 - (-5) = 15$ ।

उत्तर- तुम्हारे पास ₹10 हैं। कोई तुम पर बकाया ₹5 का कर्ज हटा देता है। कर्ज हटने से तुम ₹5 अमीर हो जाते हो: $10 + 5 = 15$ । अतः -5 घटाना और 5 जोड़ना एक ही है।

3.4 भिन्न और परिमेय संख्याएँ

केवल गिनती काफी नहीं; **मापना** भी जरूरी है। तीन बच्चे गेहूँ का खेत कैसे बाँटें? आधा कप घी कितना? पूरे के हिस्से **भिन्न** कहलाते हैं। जैसे 3 का विपरीत -3 है, वैसे हर धनात्मक भिन्न का विपरीत एक **ऋणात्मक भिन्न** है। ऋण चिह्न कहीं भी लग सकता है: $-1/5 = (-1)/5 = 1/(-5)$ ।

सभी पूर्णाकों और सभी भिन्नों (धनात्मक और ऋणात्मक) को मिलाने पर **परिमेय संख्याएँ Q** मिलती हैं (Q = *quotient*, भागफल)। **परिमेय संख्या वह है जिसे p/q के रूप में लिखा जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ ।**

सोचो! $q \neq 0$ क्यों? क्योंकि शून्य से भाग का कोई अर्थ नहीं। यदि $5/0 = x$ होता तो $x \times 0 = 5$ होना चाहिए, पर कुछ भी $x \times 0 = 0$ होता है। विरोधाभास। इसलिए हर में शून्य कभी नहीं।

चार बातें साफ समझो

- **हर पूर्णांक परिमेय है।** $5 = 5/1$ और $-10 = -10/1$ अतः $\mathbb{N}$, पूर्ण संख्याएँ और $\mathbb{Z}$ सब $\mathbb{Q}$ के अंदर हैं।
- **परिमेय संख्या के कई रूप होते हैं।** $-1/3 = -2/6 = -3/9 = -10/30$ । ये **तुल्य भिन्न** हैं। अंश और हर को एक ही संख्या से भाग या गुणा देने पर मान नहीं बदलता। $12/30 = 2/5$ (दोनों को 6 से भाग)।
- **मानक रूप:** p/q बताते या अंकित करते समय हम $q > 0$ और p, q में 1 के सिवा कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं (**सह-अभाज्य**) लेते हैं। $1/2, 2/4, 3/6, 1013/2026 \dots$ में से हम **$1/2$** चुनते हैं।
- **नियम।** $a/b = c/d$ यदि $ad = bc$ । $a/b \pm c/b = (a \pm c)/b$ (हर समान होना चाहिए!)। $a/b \times c/d = ac/bd$ । $a/b \div c/d = a/b \times d/c = ad/bc$ ($c \neq 0$)। जोड़ और गुणा **क्रमविनिमेय** हैं और **वितरण नियम** लागू होता है: $p(q + r) = pq + pr$ ।

शिक्षक की बात: संवृतता। परिमेय संख्याएँ $+$, $-$ और $\times$ में संवृत हैं; परिणाम फिर परिमेय। $\div$ में भी संवृत हैं, **शून्य से भाग को छोड़कर**। प्राकृत संख्याएँ $-$ में संवृत नहीं; पूर्णांक $\div$ में संवृत नहीं ($1 \div 2$ पूर्णांक नहीं)। परिमेय संख्याएँ दोनों समस्याएँ हल कर देती हैं।

सोचो! अलग-अलग हर वाली $1/3$ और $1/4$ जोड़ने के लिए हरों का **ल.स.** लो: ल.स.(3, 4) = 12। अतः $1/3 = 4/12$ और $1/4 = 3/12$; योग = $7/12$ । वितरण नियम की जाँच: $2 \times (1/2 + 1/3) = 2 \times 5/6 = 5/3$, और $2 \times 1/2 + 2 \times 1/3 = 1 + 2/3 = 5/3 \checkmark$ ।

प्रश्नावली 3.3 (हल सहित)

प्र.1 सिद्ध करो कि बराबर हैं: (i) $2/3$ और $4/6$ (ii) $5/4$ और $10/8$ (iii) $-3/5$ और $-6/10$ (iv) $9/3$ और 3

उत्तर- $a/b = c/d$ यदि $ad = bc$ (तिरछा गुणा) का प्रयोग करो।

- (i) $2 \times 6 = 12$ और $3 \times 4 = 12 \checkmark$ । (ii) $5 \times 8 = 40$ और $4 \times 10 = 40 \checkmark$ । (iii) $(-3) \times 10 = -30$ और $5 \times (-6) = -30 \checkmark$ । (iv) $3 = 3/1$; $9 \times 1 = 9$ और 3×3

$$= 9 \checkmark$$

प्र.2 योग: (i) $2/5 + 3/10$ (ii) $7/12 + 5/8$ (iii) $-4/7 + 3/14$

उत्तर- (i) ल.स. 10: $4/10 + 3/10 = 7/10$ ।

(ii) ल.स. 24: $14/24 + 15/24 = 29/24$ ।

(iii) ल.स. 14: $-8/14 + 3/14 = -5/14$ ।

प्र.3 अंतर: (i) $5/6 - 1/4$ (ii) $11/8 - 3/4$ (iii) $-7/9 - (-2/3)$

उत्तर- (i) ल.स. 12: $10/12 - 3/12 = 7/12$ ।

(ii) ल.स. 8: $11/8 - 6/8 = 5/8$ ।

(iii) $-7/9 + 2/3 = -7/9 + 6/9 = -1/9$ ।

प्र.4 गुणनफल: (i) $2/3 \times 3/10$ (ii) $7/11 \times 5/8$ (iii) $-4/7 \times 5/14$

उत्तर- (i) $6/30 = 1/5$ । (ii) $35/88$ । (iii) $-20/98 = -10/49$ ।

प्र.5 भागफल: (i) $2/3 \div 3/10$ (ii) $7/11 \div 5/8$ (iii) $-4/7 \div 5/14$

उत्तर- दूसरी भिन्न को उलटकर गुणा करो।

(i) $2/3 \times 10/3 = 20/9$ । (ii) $7/11 \times 8/5 = 56/55$ । (iii) $-4/7 \times 14/5 = -56/35 = -8/5$ ।

प्र.6 दिखाओ: $(1/2 + 3/4) \times 8/3 = 1/2 \times 8/3 + 3/4 \times 8/3$

उत्तर- बायाँ पक्ष: $1/2 + 3/4 = 5/4$, और $5/4 \times 8/3 = 40/12 = 10/3$ दायाँ पक्ष: $1/2 \times 8/3 = 4/3$ और $3/4 \times 8/3 = 2$, अतः $4/3 + 2 = 10/3$ दोनों पक्ष $10/3 \checkmark$ ।

प्र.7 वितरण गुण से सरल करो: $7/9 \times (6/7 - 3/4)$ ।

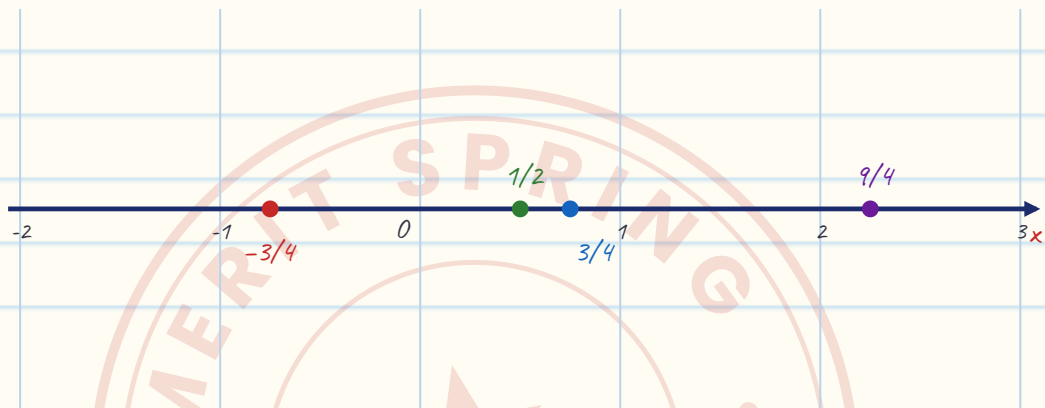
उत्तर- $7/9 \times 6/7 - 7/9 \times 3/4 = 6/9 - 21/36 = 2/3 - 7/12 = 8/12 - 7/12 = 1/12$ ।

प्र.8 x ज्ञात करो: $5/6 (x + 3/5) = 5/6 x + 1/2$

उत्तर- बायाँ पक्ष खोलो: $5/6 x + 5/6 \times 3/5 = 5/6 x + 1/2$ दोनों पक्ष बिल्कुल एक जैसे हैं।
अतः समीकरण हर परिमेय x के लिए सत्य है (यह एक सर्वसमिका है)।

संख्या रेखा पर परिमेय संख्याएँ

p/q अंकित करने के लिए: दो पूर्णाकों के बीच की इकाई दूरी को **q बराबर भागों** में बाँटो, फिर 0 से **p** भाग चलो (धनात्मक हो तो दाएँ, ऋणात्मक हो तो बाएँ)। उदाहरण: $3/4$ के लिए 0 से 1 को 4 भागों में बाँटो और 3 भाग लो। $9/4 = 2\frac{1}{4}$, यह 2 और 3 के बीच है, इसलिए 2 से 3 को 4 भागों में बाँटकर 2 से 1 भाग लो।



संख्या रेखा पर $-3/4$, $1/2$, $3/4$ और $9/4$

निरपेक्ष मान और दूरी

निरपेक्ष मान $|x|$ संख्या रेखा पर x की 0 से दूरी है। अतः $|3/5| = 3/5$ और $|-3/5| = 3/5$, $|0| = 0$ । यह कभी ऋणात्मक नहीं होता: **$|x| \geq 0$** । दो संख्याओं a और b के बीच की दूरी **$|a - b|$** है। उदाहरण: -4 और 3 के बीच: $|-4 - 3| = |-7| = 7$ ।

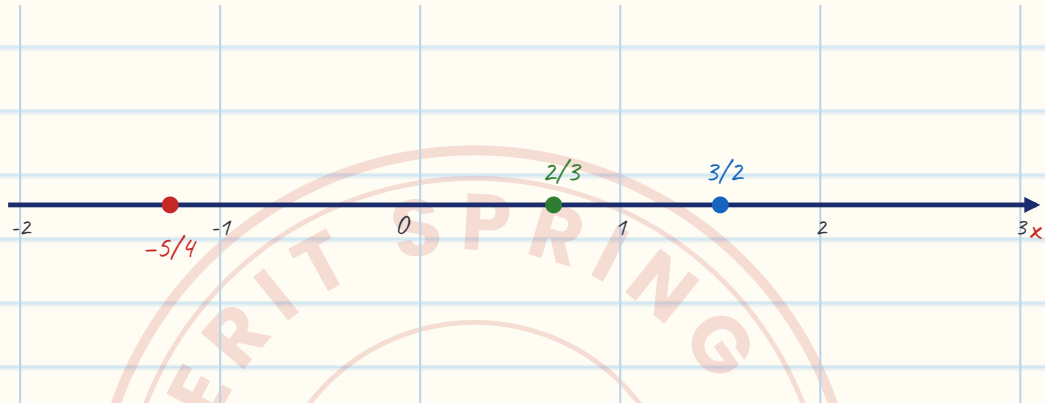
सघनता: किन्हीं दो के बीच अनंत

1 और 2 के बीच $3/2$ है। 1 और $3/2$ के बीच $5/4$ है। यह कभी रुकता नहीं। **किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का औसत $(a + b)/2$ उनके बीच की एक और परिमेय संख्या है।** क्यों? यदि $a < b$ तो $a + a < a + b < b + b$, अतः $a < (a + b)/2 < b$ । इसी कारण परिमेय संख्याएँ **सघन** कहलाती हैं। लगता है कि ये पूरी संख्या रेखा भर देती होंगी। पर क्या सचमुच? भाग 3.5 में देखो।

प्रश्नावली 3.4 (हल सहित)

प्र.1 $2/3$, $-5/4$ और $1\frac{1}{2}$ को एक संख्या रेखा पर अंकित करो।

उत्तर- $2/3$, 0 और 1 के बीच हैं: 3 भाग करके 2 लो। $-5/4 = -1\frac{1}{4}$: -2 और -1 के बीच, बाईं ओर। पूरा और $1/4$ और। $1\frac{1}{2} = 3/2$: 1 और 2 के ठीक बीच में।



$2/3$, $-5/4$ और $3/2$

प्र.2 $-1/2$ और $1/4$ के बीच तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात करो।

उत्तर- कई उत्तर। $-1/4$ (यह $-1/2$ से बड़ा है), 0 और $1/8$ (यह $1/4$ से छोटा है) लो। अतः $-1/4$, 0, $1/8$ सही हैं। (आठवों में: $-4/8 < -2/8 < 0 < 1/8 < 2/8$)

प्र.3 सरल करो: $(-1/4) + (5/12)$ ।

उत्तर- ल.स. 12: $-3/12 + 5/12 = 2/12 = 1/6$ ।

प्र.4 दर्जी के पास $15\frac{3}{4}$ मी रेशम है। एक कुर्ते को $2\frac{1}{4}$ मी चाहिए। कितने कुर्ते?

उत्तर- $15\frac{3}{4} = 63/4$ और $2\frac{1}{4} = 9/4$ । कुर्ते = $63/4 \div 9/4 = 63/9 = 7$ कुर्ते, रेशम बिल्कुल नहीं बचेगा।

प्र.5 3.1415 और 3.1416 के बीच तीन परिमेय संख्याएँ।

उत्तर- एक अंक और बढ़ाकर लिखो: 3.14150 और 3.14160 । अब 3.14152 , 3.14155 , 3.14158 लो।

प्र.6 दो परिमेय संख्याओं के बीच एक संख्या पाने का कोई और तरीका?

उत्तर- हाँ। दोनों को समान हर में लिखो, फिर जगह बनाने के लिए अंश-हर को 10 (या बड़ी संख्या) से गुणा करो। उदाहरण: $1/3$ और $1/2 = 2/6$ और $3/6 = 20/60$ और $30/60$, अतः $21/60$ इनके बीच है। या प्रश्न 5 की तरह एक अंक और बढ़ाओ।

3.5 अपरिमेय संख्याएँ: रेखा के खाली स्थान

सदियों तक लोग मानते थे कि हर लंबाई पूर्णाकों का अनुपात होती है। फिर बौधायन (लगभग 800 ई.पू., शुल्बसूत्र) और यूनानियों को ऐसी लंबाई मिली जो अनुपात नहीं थी। **भुजा 1** वाला वर्ग लो। बौधायन-पाइथागोरस प्रमेय से विकर्ण d के लिए $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, अतः $d = \sqrt{2}$ । और $\sqrt{2}$ को p/q के रूप में **नहीं** लिखा जा सकता। संख्या रेखा की जो संख्याएँ पूर्णाकों के अनुपात नहीं हैं, वे **अपरिमेय संख्याएँ** हैं।

$\sqrt{2}$ अपरिमेय है: उसका प्रमाण (विरोधाभास से)

तरीका: जो सिद्ध करना है उसका **उलटा मान लो** और दिखाओ कि इससे कुछ असंभव निकलता है। हिप्पासस (लगभग 400 ई.पू.) ने पहली बार ऐसा किया।

प्रमाण

चरण 1 मान लो $\sqrt{2}$ परिमेय है। तब $\sqrt{2} = p/q$ सरलतम रूप में (p, q पूर्णांक, $q \neq 0, 1$ के सिवा **कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं**)।

चरण 2 दोनों पक्षों का वर्ग: $2 = p^2/q^2$ ।

चरण 3 q^2 से गुणा: $2q^2 = p^2$ ।

चरण 4 अतः p^2 सम है। यदि किसी संख्या का वर्ग सम हो तो वह संख्या सम होती है। अतः **p सम है**: $p = 2k$ ।

चरण 5 वापस रखो: $2q^2 = (2k)^2 = 4k^2$ ।

चरण 6 2 से भाग: $q^2 = 2k^2$ ।

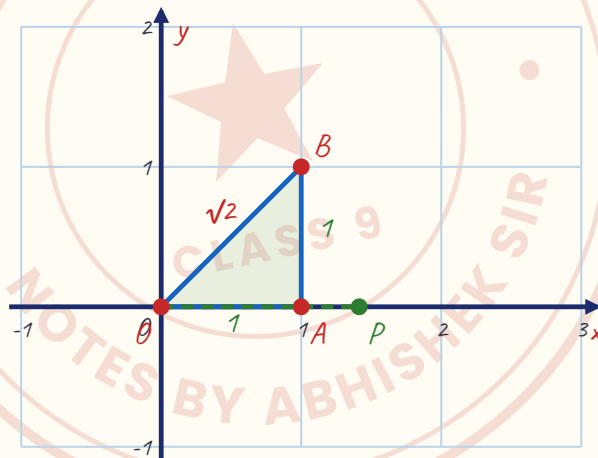
चरण 7 अतः q^2 सम है, इसलिए **q सम है**।

चरण 8 अब p और q दोनों सम हैं, इसलिए **2 उभयनिष्ठ गुणनखंड** है। यह चरण 1 का विरोध करता है। हमारी मान्यता गलत थी: **$\sqrt{2}$ अपरिमेय है।**

सोचो! यही प्रमाण $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$ के लिए चलता है (2 की जगह वह अभाव्य रखो)। $\sqrt{10}$ के लिए भी चलता है। पर $\sqrt{4}$ या $\sqrt{9}$ के लिए **नहीं** चलता, क्योंकि ये पूर्ण वर्ग हैं: $\sqrt{4} = 2$ परिमेय है। अतः जब n पूर्ण वर्ग न हो तो $\sqrt{n}$ अपरिमेय है।

संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ बनाना

- संख्या रेखा पर $OA = 1$ इकाई लो। A पर लंब खींचो और उस पर $AB = 1$ अंकित करो। OB मिलाओ। पाइथागोरस से $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ।
- O को केंद्र और OB को त्रिव्या मानकर चाप खींचो जो संख्या रेखा को P पर काटे। तब $OP = \sqrt{2}$ और **P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ को दर्शाता है** (लगभग 1.414)।
- $\sqrt{3}$ के लिए: P पर 1 लंबाई का लंब खींचो, O को उसके ऊपरी सिरे से मिलाओ: $\sqrt{(2 + 1)^2} = \sqrt{3}$ । इसी तरह $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... $\sqrt{n}$ मिलते हैं। यही **वर्गमूल सर्पिल** है।



$\sqrt{2}$ की रचना: समकोण त्रिभुज OAB , फिर चाप $OB \rightarrow P$

π और माधव की अनंत श्रेणी

π = परिधि ÷ व्यास भी अपरिमेय है (लैम्बर्ट ने 1761 में सिद्ध किया)। आर्यभट (499 ई.) ने $3927/1250 = 3.1416$ दिया, पर समझदारी से उसे **आसन्न** (सन्निकट) कहा। केरल के माधव (14वीं सदी) ने पाया कि अपरिमेय संख्या के लिए **अनंत योग** चाहिए: $\pi = 4 \times (1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots)$ । अनंत पद जोड़ने का अर्थ यह देखना है कि हम किस मान के और-और पास पहुँचते जाते हैं।

3.6 वास्तविक संख्याएँ और दशमलव

परिमेय और अपरिमेय मिलकर **वास्तविक संख्याएँ $\mathbb{R}$** बनाती हैं: पूरी, अटूट संख्या रेखा। इन्हें पहचानने का सबसे आसान तरीका **दशमलव प्रसार** है।

प्रकार	दशमलव	उदाहरण
परिमेय (सांत)	रुक जाता है	$3/8 = 0.375$
परिमेय (आवर्ती)	एक खंड बार-बार दोहराता है	$5/11 = 0.454545... = 0.(45)$
अपरिमेय	न रुकता, न दोहराता	$\sqrt{2} = 1.41421356..., \pi = 3.14159...$

शिक्षक की बात: आवर्ती दशमलव लिखने में कोष्ठक के अंक बार-बार दोहराते हैं: $0.(45)$ का अर्थ $0.454545...$ ।

सोचो! $10/3 = 3.333...$ (अंक 3 दोहराता है)। $11/12 = 0.91666...$ (91 नहीं दोहराता, फिर 6 दोहराता है)। अतः दोहराव कुछ अंकों के बाद भी शुरू हो सकता है।

कुछ परिमेय संख्याएँ दोहराती क्यों हैं? 1 को 7 से भाग दो। संभव शेष केवल 1, 2, 3, 4, 5, 6 हो सकते हैं (0 नहीं, वरना रुक जाता)। अधिकतम 6 चरणों के बाद कोई शेष **दोबारा आना ही है**। वहाँ से पूरी भाग-क्रिया दोहराने लगती है। इसलिए $1/7 = 0.142857142857...$ ।

भाग किए बिना पहचानो

p/q को सरलतम रूप में लिखो। दशमलव तभी **सांत (रुकने वाला)** होता है जब q के अभाज्य गुणनखंड **केवल 2 और/या 5** हों। क्यों? क्योंकि तब अंश-हर को गुणा करके हर को 10 की घात बनाया जा सकता है। उदाहरण: $3/20$: $20 = 2^2 \times 5$ । 5 से गुणा: $15/100 = 0.15$ । नहीं तो दशमलव **असांत आवर्ती** होता है।

भिन्न	हर के गुणनखंड	दशमलव
$3/20$	$2^2 \times 5$	0.15 रुकता है
$7/8$	2^3	0.875 रुकता है
$1/3$	3	0.333... दोहराता है
$5/6$	2×3	0.8333... दोहराता है

दशमलव को p/q में बदलना

स्थिति 1: सांत 0.35 बदलो

चरण 1: $0.35 = 35/100 = 7/20$ ।

स्थिति 2: शुद्ध आवर्ती 0.(6) बदलो (6 दोहराता है)

चरण 1: $x = 0.666...$ लो।

चरण 2: एक अंक दोहराता है, इसलिए 10 से गुणा: $10x = 6.666...$

चरण 3: घटाओ: $10x - x = 6.666... - 0.666... = 6$ अतः $9x = 6$

चरण 4: $x = 6/9 = 2/3$ ।

दो अंक वाला शुद्ध आवर्ती 0.4545... = 0.(45)

चरण 1: $x = 0.4545...$ लो। दो अंक दोहराते हैं, इसलिए 100 से गुणा: $100x = 45.4545...$

चरण 2: घटाओ: $99x = 45$, अतः $x = 45/99 = 5/11$ ।

स्थिति 3: सामान्य आवर्ती 0.1666... बदलो (1 नहीं दोहराता, 6 दोहराता है)

चरण 1: $x = 0.1666...$ लो।

चरण 2: न दोहराने वाला अंक आगे लाओ: $10x = 1.666...$

चरण 3: एक दोहराव-खंड और आगे: $100x = 16.666...$

चरण 4: घटाओ: $100x - 10x = 16.666... - 1.666... = 15$, अतः $90x = 15$ और $x = 15/90 = 1/6$ ।

एक और: 2.3577... (35 नहीं दोहराता, 7 दोहराता है)

चरण 1: $x = 2.35777...$ 100 से गुणा (दो न दोहराने वाले अंक): $100x = 235.777...$

चरण 2: 1000 से गुणा (एक दोहराता अंक और): $1000x = 2357.777...$

चरण 3: घटाओ: $900x = 2122$, अतः $x = 2122/900 = 1061/450$ ।

दशमलव प्रकार	चरण
शुद्ध आवर्ती	$x = \text{संख्या} / 10^n$ से गुणा ($n = \text{दोहराने वाले अंक}$)। घटाओ। हल करो।
सामान्य आवर्ती	$x = \text{संख्या} / 10^m$ से गुणा ($m = \text{न दोहराने वाले अंक}$), फिर 10^n और से ($n = \text{दोहराने वाले अंक}$)। घटाओ। हल करो।

ध्यान रखो! आम गलतियाँ: 10 की गलत घात से गुणा करना, और अंत में भिन्न को सरल करना भूल जाना। एक बार p को q से भाग देकर जाँच लो।

चक्रीय संख्याओं का जादू

$1/7 = 0.142857142857...$ खंड **142857** एक **चक्रीय संख्या** है। इसे 1 से 6 तक गुणा करो तो वही अंक घूमते रहते हैं: $142857 \times 2 = 285714$, $\times 3 = 428571$, $\times 4 = 571428$, $\times 5 = 714285$, $\times 6 = 857142$ । परिमेय संख्या $1/7$ में छिपा सुंदर पैटर्न।

अपरिमेय दशमलव

अपरिमेय संख्याओं के दशमलव **न कभी रुकते हैं, न दोहराते हैं**: $\sqrt{2} = 1.4142135623...$, $\pi = 3.1415926535...$ । कोई खंड हमेशा के लिए नहीं दोहराता।

प्रश्नावली 3.5 (हल सहित)

प्र.1 बिना भाग किए बताओ कि $7/20$, $4/15$, $13/250$ में कौन रुकेंगे। फिर लंबे भाग से जाँचो।

उत्तर- $7/20$: $20 = 2^2 \times 5$, केवल 2 और 5, इसलिए **रुकता है**: $7/20 = 0.35$ ।

$4/15$: $15 = 3 \times 5$ । गुणनखंड 3 है, इसलिए **दोहराता है**: $4/15 = 0.2666... = 0.2(6)$ ।

$13/250$: $250 = 2 \times 5^3$, इसलिए **रुकता है**: $13/250 = 0.052$ ।

प्र.2 $1/13$ का लंबा भाग करो। दोहराव खंड? $2/13$, $3/13$, $4/13$ पर क्या दिखता है?

उत्तर- $1/13 = 0.076923\ 076923...$ खंड **076923** (6 अंक) है। $2/13 = 0.153846...$, $3/13 = 0.230769...$, $4/13 = 0.307692...$ ।

अवलोकन: 3/13 और 4/13 में वही अंक 0-7-6-9-2-3 उसी वृत्ताकार क्रम में हैं, बस शुरुआत अलग जगह से (चक्रीय)। पर 2/13 अलग खंड 153846 देता है (जो स्वयं चक्रीय है: $5/13 = 0.384615$, $6/13 = 0.461538$, ...)। अतः 13 से **दो** चक्रीय परिवार मिलते हैं।

प्र.3 परिमेय या अपरिमेय बताओ और भिन्न निकालो: (i) $\sqrt{81}$ (ii) $\sqrt{12}$ (iii) $0.33333...$ (iv) $0.123451234512345...$ (v) $1.01001000100001...$ (vi) 23.560185612239874790120

उत्तर- (i) $\sqrt{81} = 9 = 9/1$: **परिमेय** ।

(ii) $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ । 12 पूर्ण वर्ग नहीं, इसलिए **अपरिमेय** ।

(iii) $0.333...$ दोहराता है: **परिमेय**, $= 1/3$ ।

(iv) खंड 12345 दोहराता है: **परिमेय** । $x = 0.1234512345...$; $100000x - x = 12345$, अतः $x = 12345/99999 = 4115/33333$ ।

(v) 1 के बीच शून्य बढ़ते जाते हैं (1, फिर 2, फिर 3 शून्य ...)। **कोई एक खंड नहीं दोहराता**, इसलिए **अपरिमेय** ।

(vi) यह **रुक जाता है** (सांत), इसलिए **परिमेय**: $23.560185612239874790120 = 2356018561223987479012/10^{20}$ (सरल किया जा सकता है)।

प्र.4 दिखाओ कि $0.999... = 1$ ।

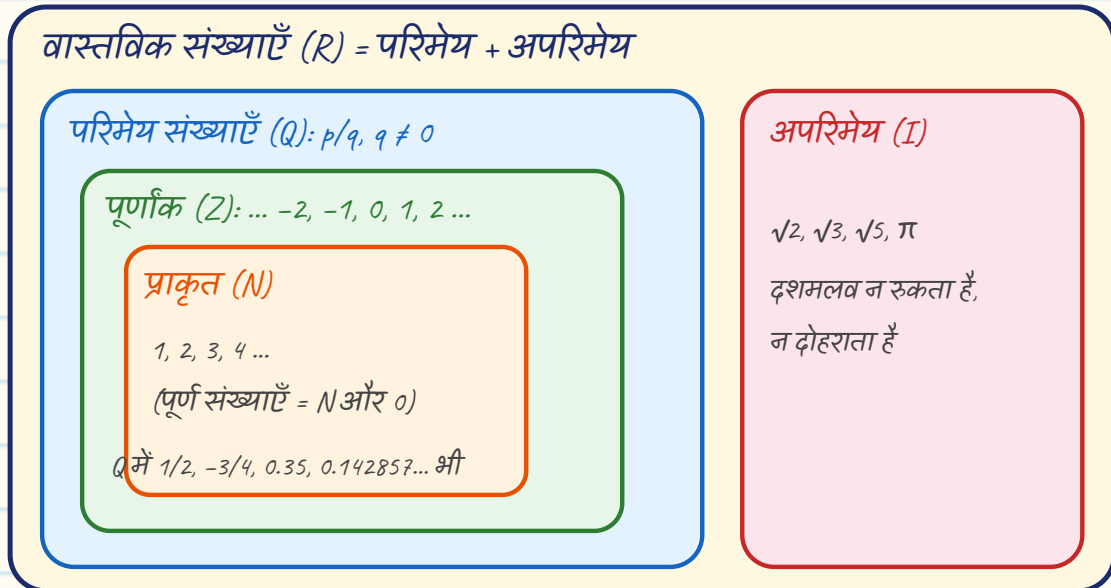
उत्तर- $x = 0.999...$ लो। तब $10x = 9.999...$ । घटाओ: $10x - x = 9.999... - 0.999... = 9$ । अतः $9x = 9$ और $x = 1$ । हाँ, $0.999...$ ठीक 1 है, 'थोड़ा कम' नहीं।

प्र.5 $1/7$ का खंड चक्रीय है। ऐसे और n खोजो जिनके $1/n$ चक्रीय खंड देते हों।

उत्तर- अभाज्य संख्याएँ आजमाओ। $1/17 = 0.0588235294117647...$ (16 अंकों का खंड), $1/19 = 0.052631578947368421...$ (18 अंक), $1/23$ (22 अंक), $1/29$, $1/47$, $1/59$, $1/61$ भी चक्रीय खंड देते हैं। खंड को 1, 2, 3 ... से गुणा करने पर अंक बस घूमते हैं।

शिक्षक की बात: एक ही संख्या के दो रूप। जैसे $1 = 10/10 = 100/100$, वैसे हर सांत दशमलव का 9 दोहराने वाला दूसरा रूप होता है: $1.000... = 0.999...$, $2.47000... = 2.46999...$ ।

3.7 कभी न खत्म होने वाली यात्रा: संख्याओं का परिवार



- **प्राकृत (N):** 1, 2, 3 ... गिनती की संख्याएँ।
- **पूर्णांक (Z):** शून्य और ऋणात्मक जोड़ो।
- **परिमेय (Q):** सब p/q ($q \neq 0$)। दशमलव रुकता या दोहराता है।
- **अपरिमेय (I):** $\sqrt{2}, \pi, \sqrt{10}$ जैसी। दशमलव न रुकता, न दोहराता।
- **वास्तविक (R):** परिमेय + अपरिमेय = पूरी संख्या रेखा।

सोचो! $\sqrt{-1}$ क्या है? कोई वास्तविक संख्या स्वयं से गुणा होकर -1 नहीं देती। इसलिए गणितज्ञों ने **काल्पनिक संख्याएँ** बनाईं, जिन्हें i लिखते हैं। ये विद्युत इंजीनियरिंग, क्वांटम भौतिकी और तुम्हारे मोबाइल में काम आती हैं। यह यात्रा ऊँची कक्षा में।

अध्याय के अंत के प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 लंबे भाग से बदलो: (i) $3/50$ (ii) $2/9$

उत्तर- (i) $3/50 = 6/100 = 0.06$ (सांत)। (ii) $2 \div 9 = 0.222... = 0.(2)$ (अंक 2 दोहराता है; शेष 2 बार-बार आता है)।

प्र.2 सिद्ध करो कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

उत्तर- मान लो $\sqrt{5} = p/q$, सह-अभाज्य, $q \neq 0$ । वर्ग: $5q^2 = p^2$ । अतः 5, p^2 को विभाजित करता है। 5 **अभाज्य** है, इसलिए 5, p को विभाजित करता है। $p = 5k$ लो। तब $5q^2 = 25k^2$,

अतः $q^2 = 5k^2$, इसलिए 5 , q^2 को विभाजित करता है। अतः 5 , q को भी विभाजित करता है। अब 5 , p और q दोनों को विभाजित करता है, जो सह-अभाज्य होने का विरोध है। अतः $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

प्र.3 p/q में बदलो: (i) 12.6 (ii) 0.0120 (iii) 3.0(52) (iv) 1.2(35) (v) 0.(23) (vi) 2.0(5) (vii) 2.12(5) (viii) 3.12(5) (ix) 2.(1625)

उत्तर- (कोष्ठक का खंड दोहराता है: (iii) 3.0 52 52..., (iv) 1.2 35 35..., (v) 0.23 23..., (vi) 2.0 5 5..., (vii) 2.12 5 5..., (viii) 3.12 5 5..., (ix) 2.1625 1625...।)

(i) $126/10 = 63/5$ ।

(ii) $120/10000 = 3/250$ ।

(iii) $x = 3.05252...$; $10x = 30.5252...$, $1000x = 3052.5252...$ । घटाओ: $990x = 3022$, अतः $x = 1511/495$ ।

(iv) $x = 1.23535...$; $10x = 12.3535...$, $1000x = 1235.3535...$ । $990x = 1223$, अतः $x = 1223/990$ ।

(v) $100x = 23.2323...$, घटाओ: $99x = 23$, $x = 23/99$ ।

(vi) $x = 2.0555...$; $10x = 20.555...$, $100x = 205.555...$ । $90x = 185$, अतः $x = 185/90 = 37/18$ ।

(vii) $x = 2.12555...$; $100x = 212.555...$, $1000x = 2125.555...$ । $900x = 1913$, अतः $x = 1913/900$ ।

(viii) $x = 3.12555...$; $100x = 312.555...$, $1000x = 3125.555...$ । $900x = 2813$, अतः $x = 2813/900$ ।

(ix) $x = 2.16251625...$; $10000x = 21625.1625...$ । x घटाओ: $9999x = 21623$, अतः $x = 21623/9999$ ।

प्र.4 संख्या रेखा पर अंकित करो: (i) 0.532 (ii) 1.1(5)

उत्तर- (i) $0.532 = 532/1000 = 133/250$ । यह 0.5 और 0.6 के बीच है। 0.5 से 0.6 को 10 भागों में बाँटो; यह 0.53 और 0.54 के बीच है, उसे फिर 10 भागों में बाँटकर दूसरा निशान लो।

(ii) $1.1555... = 52/45$ यह 1.1 और 1.2 के बीच है। उस दूरी को 10 भागों में बाँटो; $1.1555...$ मध्य (1.15) से थोड़ा आगे, 1.16 से पहले है।

प्र.5 3 और 4 के बीच 6 परिमेय संख्याएँ।

उत्तर- 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 (या $31/10, 32/10, \dots$)।

प्र.6 $2/5$ और $3/5$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ।

उत्तर- $20/50$ और $30/50$ लिखो। $21/50, 22/50, 23/50, 24/50, 25/50$ लो।

प्र.7 $1/6$ और $2/5$ के बीच 5 परिमेय संख्याएँ।

उत्तर- ल.स. 30: $1/6 = 5/30$ और $2/5 = 12/30$ । $6/30, 7/30, 8/30, 9/30, 10/30$ लो (यानी $1/5, 7/30, 4/15, 3/10, 1/3$)।

प्र.8 $x/3 + x/5 = 16/15$ । x ज्ञात करो।

उत्तर- ल.स. 15: $5x/15 + 3x/15 = 8x/15 = 16/15$ । अतः $8x = 16$ और $x = 2$ । जाँच: $2/3 + 2/5 = 10/15 + 6/15 = 16/15 \checkmark$ ।

प्र.9 a, b शून्येतर परिमेय हैं और $a + 1/b = 0$ । ab धनात्मक है या ऋणात्मक?

उत्तर- $a + 1/b = 0$ का अर्थ $a = -1/b$ । दोनों पक्षों को b से गुणा करो: $ab = -1$ । अतः ab ऋणात्मक है।

प्र.10 एक परिमेय संख्या का दशमलव सांत है और अंतिम अशून्य अंक चौथे स्थान पर है। दिखाओ कि वह $p/10^4$ है, $p, 10$ से विभाज्य नहीं। क्या सरलतम रूप का हर 2^4 या 5^4 से विभाज्य होना आवश्यक है?

उत्तर- दशमलव को 4 स्थान खिसकाने पर पूर्णांक p मिलता है, इसलिए संख्या $p/10^4$ है। चौथा अंक अशून्य है, इसलिए p का **अंतिम अंक 0 नहीं**, अतः $10, p$ को विभाजित नहीं करता। अब $10^4 = 2^4 \times 5^4$ । $p, 10$ से विभाज्य नहीं, इसलिए p **2 से विभाज्य नहीं** या **5 से विभाज्य नहीं** (या दोनों)। p विषम हो तो कोई 2 नहीं कटता, अतः हर में 2^4 बना रहता है। $p, 5$ से विभाज्य न हो तो 5^4 बना रहता है। अतः हर **2^4 या 5^4 (कम से कम एक)** से विभाज्य है, पर दोनों से आवश्यक नहीं। उदाहरण: $0.0005 = 5/10^4 = 1/2000$ और $2000 = 2^4 \times 5^3$ (केवल 2^4 से विभाज्य)।

प्र.11 बिना भाग किए बताओ कि $18/125$ सांत है या नहीं। कितने दशमलव स्थान?

उत्तर- $125 = 5^3$, केवल 5, इसलिए **सांत** है। 2^3 से गुणा: $18/125 = 144/1000 = 0.144$, अतः **3 दशमलव स्थान**।

प्र.12 सरलतम रूप में परिमेय संख्या का हर $2^3 \times 5$ है। कितने दशमलव स्थान?

उत्तर- अंश-हर को 5^2 से गुणा करके $2^3 \times 5^3 = 10^3$ बनाओ। अतः दशमलव **3 स्थान** पर समाप्त होता है। (सामान्यतः स्थान = 2 और 5 की घातों में से बड़ी घात।)

प्र.13 $a = 7/12$, $b = 5/6$ । $a = k_1/m$ और $b = k_2/m$ लिखो जहाँ $k_2 - k_1 > 6$ । a और b के बीच पाँच परिमेय संख्याएँ दो। n संख्याओं के लिए $k_2 - k_1 > n + 1$ क्यों चाहिए?

उत्तर- बारहवों में $a = 7/12$ और $b = 10/12$, $k_2 - k_1 =$ केवल 3। अंश-हर को 3 से गुणा: $a = 21/36$, $b = 30/36$, अतः $m = 36$, $k_1 = 21$, $k_2 = 30$, और $k_2 - k_1 = 9 > 6 \checkmark$ । बीच की पाँच संख्याएँ: **22/36, 23/36, 24/36, 25/36, 26/36**।

शर्त क्यों? पूर्णांकों k_1 और k_2 के बीच ठीक $k_2 - k_1 - 1$ पूर्ण संख्याएँ होती हैं। n भिन्न अंशों के लिए $k_2 - k_1 - 1 \geq n$ चाहिए, यानी $k_2 - k_1 \geq n + 1$ (पुस्तक सुरक्षित रहने को कठोर असमिका लेती है)। अंतर कम हो तो बड़ी संख्या से गुणा करके जगह बनाते हैं।

प्र.14 परिमेय x, y, z के लिए $x + y + z = 0$ और $xy + yz + zx = 0$ । दिखाओ $x = y = z = 0$ ।

उत्तर- पहले का वर्ग लो: $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$ । बायाँ पक्ष 0 है और दाएँ का कोष्ठक 0 है, अतः **$x^2 + y^2 + z^2 = 0$** । वर्ग कभी ऋणात्मक नहीं होते, इसलिए तीन वर्गों का योग तभी शून्य है जब हर एक शून्य हो। अतः **$x = y = z = 0$** ।

प्र.15 दिखाओ कि $(a + b)/2$, a और b के बीच है।

उत्तर- $a < b$ लो। तब $a + a < a + b$, अतः $a < (a + b)/2$ । साथ ही $a + b < b + b$, अतः $(a + b)/2 < b$ । इसलिए **$a < (a + b)/2 < b$** ।

प्र.16 वर्गमूल सर्पिल में कर्णों की लंबाइयाँ।

उत्तर- दोनों भुजाएँ 1 वाले समकोण त्रिभुज से शुरू: कर्ण **$\sqrt{2}$** । अगले त्रिभुज की भुजाएँ $\sqrt{2}$ और 1: कर्ण **$\sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$** । फिर भुजाएँ $\sqrt{3}$ और 1: **$\sqrt{4} = 2$** । उसके बाद **$\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}$** ,

$\sqrt{8}, 3 (= \sqrt{9})$, और आगे। सामान्यतः n -वाँ कर्ण $\sqrt{(n+1)}$ है। हर नया कर्ण = $\sqrt{(\text{पिछला}^2 + 1)}$ ।

त्वरित दोहराव

- $\mathbf{N}$ गिनती की संख्याएँ $\rightarrow \mathbf{Z}$ शून्य और ऋणात्मक जोड़ता है $\rightarrow \mathbf{Q}$ सब p/q ($q \neq 0$) $\rightarrow \mathbf{R}$ अपरिमेय जोड़ता है।
- ब्रह्मगुप्त के नियम: $a + 0 = a$, $a \times 0 = 0$, ऋण $\times$ ऋण = धन।
- परिमेय संख्याएँ सघन हैं: $(a+b)/2$, a और b के बीच होता है।
- सरलतम p/q सांत है यदि q में केवल 2 और 5 हों; नहीं तो आवर्ती।
- आवर्ती दशमलव $\rightarrow$ भिन्न: 10^n से गुणा करके घटाओ।
- $\sqrt{2}$ और π अपरिमेय हैं: दशमलव न रुकता, न दोहराता। $\sqrt{2}$ का प्रमाण विरोधाभास से।
- $0.999... = 1$ । a और b के बीच दूरी = $|a - b|$ ।

शिक्षक की बात: खुद करो: $1/7$, $2/7$, $3/7$ का दशमलव लंबे भाग से निकालो। हर में कौन से अंक आते हैं? खंड के बारे में तुम्हें क्या दिखता है?