

Chapter Review

- **Quadratic equation:** An equation of the form $ax^2 + bx + c = 0$, where a, b, c are real numbers and $a \neq 0$, is called a quadratic equation in the variable x . This is the standard form. Examples: $x^2 - 5x + 6 = 0$, $2x^2 + x - 1 = 0$. A real number α is a root (solution) of the equation if $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$. A quadratic equation has at most two roots.
- **Identifying quadratic equations:** An equation $p(x) = 0$ is quadratic if after simplification it can be written as $ax^2 + bx + c = 0$ with $a \neq 0$. For example $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ simplifies to $x^2 + 7 = 0$, which is quadratic, while $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$ simplifies to $x + 12 = 0$, which is not quadratic.
- **Solution by factorisation:** Split the middle term bx into two terms whose product is ac and sum is b , then factorise and equate each factor to zero. Example: $2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0 \rightarrow 2x(x - 1) - 3(x - 1) = 0 \rightarrow (2x - 3)(x - 1) = 0$, so $x = 3/2$ or $x = 1$.
- **Solution by completing the square:** Divide by a , move the constant, add $(b/2a)^2$ to both sides to make a perfect square, then take the square root. Example: $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 9 \rightarrow x + 2 = \pm 3 \rightarrow x = 1$ or $x = -5$. This method gives the quadratic formula.
- **Quadratic formula:** The roots of $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) are $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, provided $b^2 - 4ac \geq 0$. Example: $x^2 - 7x + 12 = 0$ gives $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = 4$ or 3 .
- **Discriminant:** The expression $D = b^2 - 4ac$ decides the nature of the roots. If $D > 0$, there are two distinct real roots. If $D = 0$, there are two equal real roots, $x = -b/2a$. If $D < 0$, there are no real roots. Example: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ has $D = 16 - 24 = -8 < 0$, so no real roots.

- **Condition for roots in problems:** When a problem says 'equal roots' use $D = 0$; 'real roots' use $D \geq 0$; 'distinct real roots' use $D > 0$; 'no real roots' use $D < 0$. Example: Find k so that $kx(x - 2) + 6 = 0$ has equal roots: $kx^2 - 2kx + 6 = 0$, $D = 4k^2 - 24k = 0$, so $k = 6$ ($k \neq 0$).
- **Word problems:** Form a quadratic equation from the situation, with the unknown as x , and solve it; reject roots that are not valid (such as negative length, age or speed). Typical problems: product of consecutive integers, ages, speed and time, area and dimensions of a rectangle, work problems, and the number of articles bought. Example: the product of two consecutive positive integers is 306: $x(x + 1) = 306$, $x^2 + x - 306 = 0$, $x = 17$, so the integers are 17 and 18.

Key Terms

Quadratic Equation - $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$.

Standard Form - The form $ax^2 + bx + c = 0$ of a quadratic equation.

Root - A value of x that satisfies the equation.

Factorisation Method - Split middle term and equate each factor to zero.

Completing the Square - Making one side a perfect square $(x + p)^2$ to solve.

Quadratic Formula - $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Discriminant - $D = b^2 - 4ac$; tells the nature of roots.

$D > 0$ - Two distinct real roots.

$D = 0$ - Two equal real roots, $x = -b/2a$.

$D < 0$ - No real roots.

Sum of Roots - $-b/a$ for $ax^2 + bx + c = 0$.

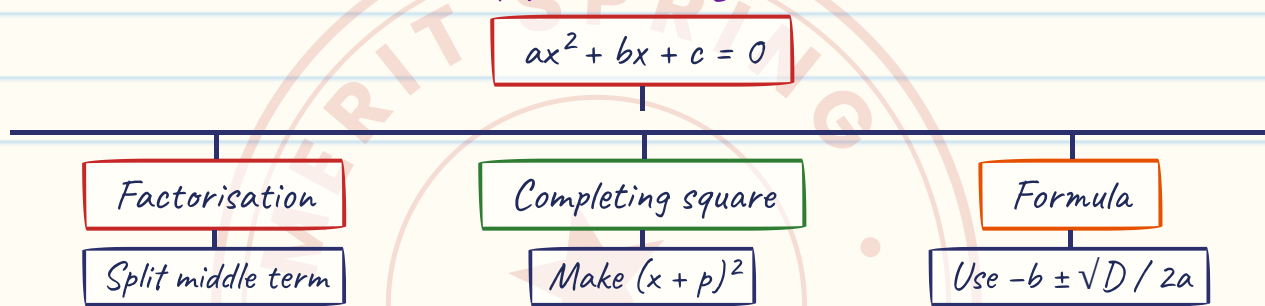
Product of Roots - c/a for $ax^2 + bx + c = 0$.

Diagrams / Flowcharts

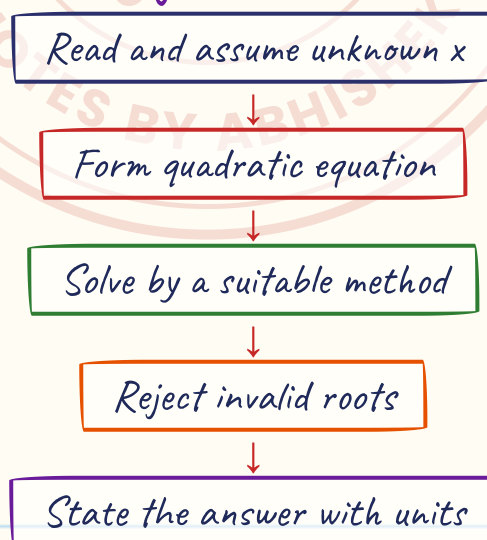
Nature of Roots

Discriminant	Roots
$D = b^2 - 4ac > 0$	Two distinct real roots
$D = 0$	Two equal real roots
$D < 0$	No real roots

Methods to Solve



Solving a Word Problem



Factorisation vs Formula

Factorisation

- Quick when roots are rational
- Needs ac split

Formula

- Works for every equation
- Uses discriminant D

Textbook Exercise Questions

Q.1 Solve by factorisation: $6x^2 - x - 2 = 0$.

Ans. $6x^2 - 4x + 3x - 2 = 2x(3x - 2) + 1(3x - 2) = (2x + 1)(3x - 2) = 0$. So $x = -1/2$ or $x = 2/3$.

Q.2 Solve $x^2 - 7x + 12 = 0$ using the quadratic formula.

Ans. $a = 1, b = -7, c = 12. D = 49 - 48 = 1. x = (7 \pm 1)/2 = 4$ or 3 .

Q.3 Find the nature of the roots of $2x^2 - 6x + 3 = 0$.

Ans. $D = 36 - 24 = 12 > 0$, so two distinct real roots.

Q.4 Find k for which $2x^2 + kx + 3 = 0$ has two equal roots.

Ans. $D = k^2 - 24 = 0$, so $k = \pm 2\sqrt{6}$.

Q.5 The product of two consecutive positive integers is 306. Find the integers.

Ans. $x(x + 1) = 306, x^2 + x - 306 = 0, (x + 18)(x - 17) = 0. x = 17$ (reject -18). The integers are 17 and 18.

Q.6 A train travels 360 km at uniform speed. If the speed had been 5 km/h more, it would have taken 1 hour less. Find the speed.

Ans. $360/x - 360/(x + 5) = 1 \rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0 \rightarrow (x + 45)(x - 40) = 0$. Speed = 40 km/h.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] Write the discriminant of $3x^2 - 2x + 1/3 = 0$.

Ans. $D = 4 - 4(3)(1/3) = 0$.

Q.2 [1 mark] Is 0.2 a root of $x^2 - 0.4 = 0$? Justify.

Ans. $(0.2)^2 - 0.4 = 0.04 - 0.4 \neq 0$. So no.

Q.3 [2 marks] Solve: $x^2 - 3x - 10 = 0$.

Ans. $(x - 5)(x + 2) = 0$; $x = 5$ or -2 .

Q.4 [2 marks] Find k so that $x^2 - 4x + k = 0$ has equal roots.

Ans. $D = 16 - 4k = 0$; $k = 4$.

Q.5 [3 marks] Solve $2x^2 - 7x + 3 = 0$ by completing the square.

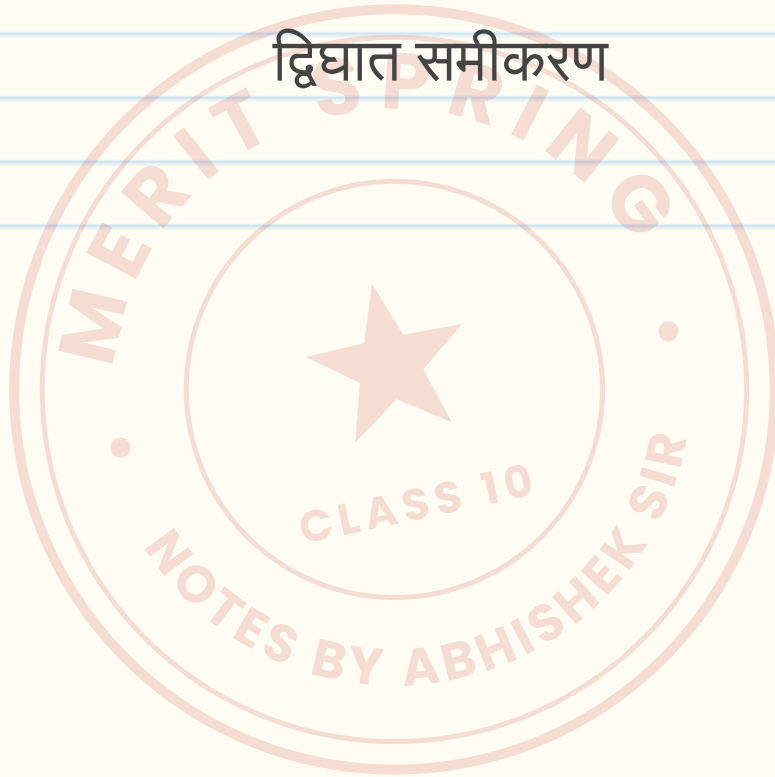
Ans. $x^2 - (7/2)x = -3/2$; add $(7/4)^2$: $(x - 7/4)^2 = 25/16$; $x - 7/4 = \pm 5/4$; $x = 3$ or $1/2$.

Q.6 [3 marks] A rectangular park is 3 m longer than twice its breadth and its area is 90 m². Find its sides.

Ans. Breadth x , length $2x + 3$: $x(2x + 3) = 90$, $2x^2 + 3x - 90 = 0$; $(x - 6)(2x + 15) = 0$, $x = 6$. Breadth 6 m, length 15 m.

HINDI VERSION

द्विघात समीकरण



अध्याय समीक्षा

- द्विघात समीकरण: $ax^2 + bx + c = 0$ रूप का समीकरण, जहाँ a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$, चर x में द्विघात समीकरण कहलाता है। यह मानक रूप है। उदाहरण: $x^2 - 5x + 6 = 0$, $2x^2 + x - 1 = 0$ । वास्तविक संख्या α समीकरण का मूल (हल) है यदि $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ । द्विघात समीकरण के अधिकतम दो मूल होते हैं।
- द्विघात समीकरण की पहचान: समीकरण $p(x) = 0$ द्विघात है यदि सरल करने पर वह $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) बने। उदाहरण: $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$ सरल करने पर $x^2 + 7 = 0$ बनता है, जो द्विघात है, जबकि $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$ सरल करने पर $x + 12 = 0$ बनता है, जो द्विघात नहीं है।
- गुणखंडन विधि: मध्य पद bx को दो पदों में तोड़ें जिनका गुणनफल ac और योग b हो, गुणखंड करें और प्रत्येक गुणखंड को शून्य के बराबर रखें। उदाहरण: $2x^2 - 5x + 3 = 0 \rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0 \rightarrow 2x(x - 1) - 3(x - 1) = 0 \rightarrow (2x - 3)(x - 1) = 0$, अतः $x = 3/2$ या $x = 1$ ।
- पूर्ण वर्ग बनाने की विधि: a से भाग दें, अचर पद दूसरी ओर ले जाएँ, दोनों ओर $(b/2a)^2$ जोड़कर पूर्ण वर्ग बनाएँ, फिर वर्गमूल लें। उदाहरण: $x^2 + 4x - 5 = 0 \rightarrow (x + 2)^2 = 9 \rightarrow x + 2 = \pm 3 \rightarrow x = 1$ या $x = -5$ । इसी विधि से द्विघात सूत्र मिलता है।
- द्विघात सूत्र: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) के मूल $x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / 2a$ हैं, बशर्ते $b^2 - 4ac \geq 0$ । उदाहरण: $x^2 - 7x + 12 = 0$ से $x = [7 \pm \sqrt{49 - 48}]/2 = (7 \pm 1)/2 = 4$ या 3 ।
- विविक्तकर (डिस्क्रिमिनेंट): व्यंजक $D = b^2 - 4ac$ मूलों की प्रकृति तय करता है। यदि $D > 0$, दो भिन्न वास्तविक मूल। यदि $D = 0$, दो बराबर वास्तविक मूल, $x = -b/2a$ । यदि $D < 0$, कोई वास्तविक मूल नहीं। उदाहरण: $2x^2 - 4x + 3 = 0$ में $D = 16 - 24 = -8 < 0$, अतः कोई वास्तविक मूल नहीं।
- प्रश्नों में मूलों की शर्त: 'बराबर मूल' के लिए $D = 0$; 'वास्तविक मूल' के लिए $D \geq 0$; 'भिन्न वास्तविक मूल' के लिए $D > 0$; 'कोई वास्तविक मूल नहीं' के लिए $D < 0$ । उदाहरण: k ज्ञात कीजिए ताकि $kx(x - 2) + 6 = 0$ के बराबर मूल हों: $kx^2 - 2kx + 6 = 0$, $D = 4k^2 - 24k = 0$, अतः $k = 6$ ($k \neq 0$)।

- शब्दिक प्रश्न: स्थिति से अज्ञात राशि को x मानकर द्विघात समीकरण बनाएँ और हल करें; अमान्य मूल (जैसे ऋणात्मक लंबाई, आयु या चाल) छोड़ दें। प्रमुख प्रश्न: क्रमागत पूर्णाकों का गुणनफल, आयु, चाल और समय, आयत का क्षेत्रफल व विमाएँ, कार्य के प्रश्न और खरीदी वस्तुओं की संख्या। उदाहरण: दो क्रमागत धनात्मक पूर्णाकों का गुणनफल 306: $x(x + 1) = 306$, $x^2 + x - 306 = 0$, $x = 17$, पूर्णांक 17 और 18।

मुख्य शब्दावली

द्विघात समीकरण - $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

मानक रूप - द्विघात समीकरण का रूप $ax^2 + bx + c = 0$

मूल - x का वह मान जो समीकरण को संतुष्ट करे।

गुणनखंडन विधि - मध्य पद तोड़कर प्रत्येक गुणनखंड को शून्य रखना।

पूर्ण वर्ग विधि - एक पक्ष को पूर्ण वर्ग $(x + p)^2$ बनाकर हल करना।

द्विघात सूत्र - $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

विविक्तकर - $D = b^2 - 4ac$; मूलों की प्रकृति बताता है।

$D > 0$ - दो भिन्न वास्तविक मूल।

$D = 0$ - दो बराबर वास्तविक मूल, $x = -b/2a$

$D < 0$ - कोई वास्तविक मूल नहीं।

मूलों का योग - $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए $-b/a$

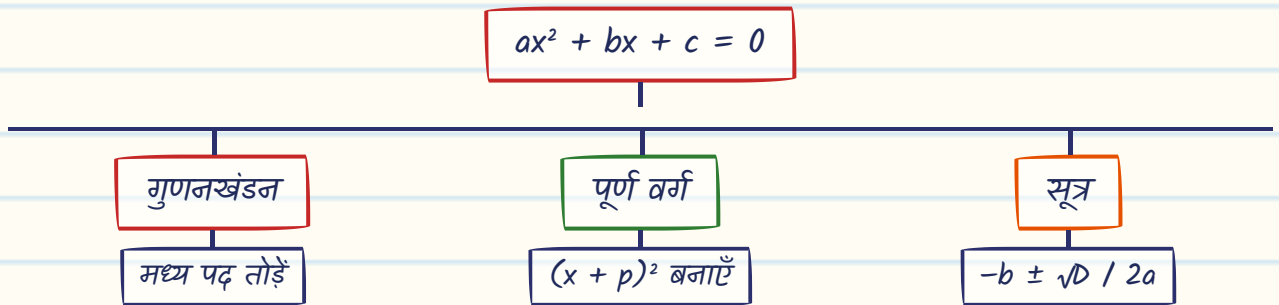
मूलों का गुणनफल - $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए c/a

आरेख / फ्लोचार्ट

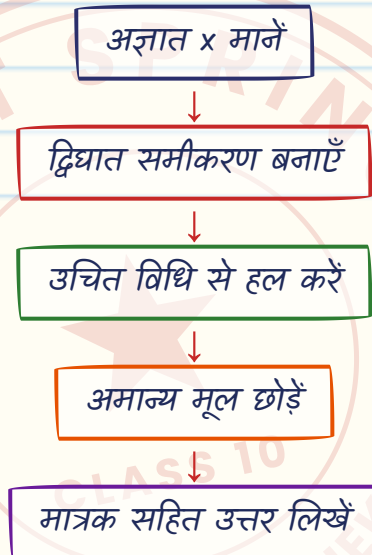
मूलों की प्रकृति

विविक्तकर	मूल
$D = b^2 - 4ac > 0$	दो भिन्न वास्तविक मूल
$D = 0$	दो बराबर वास्तविक मूल
$D < 0$	कोई वास्तविक मूल नहीं

हल करने की विधियाँ



शाब्दिक प्रश्न हल करना



गुणनखंडन बनाम सूत्र

गुणनखंडन

- मूल परिमेय हों तो शीघ्र
- ac का विभाजन चाहिए

सूत्र

- हर समीकरण पर लागू
- विविक्तकर D का उपयोग

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 गुणनखंडन से हल कीजिए: $6x^2 - x - 2 = 0$

उत्तर- $6x^2 - 4x + 3x - 2 = 2x(3x - 2) + 1(3x - 2) = (2x + 1)(3x - 2) = 0$ अतः

$x = -1/2$ या $x = 2/3$

प्र.2 द्विघात सूत्र से हल कीजिए: $x^2 - 7x + 12 = 0$

उत्तर- $a = 1, b = -7, c = 12 \mid D = 49 - 48 = 1 \mid x = (7 \pm 1)/2 = 4 \text{ या } 3$

प्र.3 $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $D = 36 - 24 = 12 > 0$, अतः दो भिन्न वास्तविक मूल।

प्र.4 k का मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $2x^2 + kx + 3 = 0$ के दो बराबर मूल हों।

उत्तर- $D = k^2 - 24 = 0$, अतः $k = \pm 2\sqrt{6}$

प्र.5 दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। पूर्णांक ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $x(x + 1) = 306, x^2 + x - 306 = 0, (x + 18)(x - 17) = 0 \mid x = 17 \text{ (-18 अस्वीकार)} \mid$ पूर्णांक 17 और 18।

प्र.6 एक रेलगाड़ी 360 km एकसमान चाल से चलती है। यदि चाल 5 km/h अधिक होती तो उसे 1 घंटा कम लगता। चाल ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $360/x - 360/(x + 5) = 1 \rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0 \rightarrow (x + 45)(x - 40) = 0 \mid$
चाल = 40 km/h।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] $3x^2 - 2x + 1/3 = 0$ का विविक्तकर लिखिए।

उत्तर- $D = 4 - 4(3)(1/3) = 0$

प्र.2 [1 अंक] क्या 0.2, $x^2 - 0.4 = 0$ का मूल है? कारण दीजिए।

उत्तर- $(0.2)^2 - 0.4 = 0.04 - 0.4 \neq 0 \mid$ अतः नहीं।

प्र.3 [2 अंक] हल कीजिए: $x^2 - 3x - 10 = 0$

उत्तर- $(x - 5)(x + 2) = 0; x = 5 \text{ या } -2$

प्र.4 [2 अंक] k ज्ञात कीजिए ताकि $x^2 - 4x + k = 0$ के बराबर मूल हों।

उत्तर- $D = 16 - 4k = 0; k = 4$

प्र.5 [3 अंक] पूर्ण वर्ग विधि से हल कीजिए: $2x^2 - 7x + 3 = 0$

उत्तर- $x^2 - (7/2)x = -3/2$; $(7/4)^2$ जोड़ें: $(x - 7/4)^2 = 25/16$; $x - 7/4 = \pm 5/4$; $x = 3$
या $1/2$

प्र.6 [3 अंक] एक आयताकार पार्क की लंबाई चौड़ाई के दुगुने से 3 m अधिक है और क्षेत्रफल 90 m² है। भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

उत्तर- चौड़ाई x, लंबाई 2x + 3: $x(2x + 3) = 90$, $2x^2 + 3x - 90 = 0$; $(x - 6)(2x + 15) = 0$, $x = 6$ । चौड़ाई 6 m, लंबाई 15 m।

