ENGLISH SECTION (Hindi terms in brackets)

Exploring Some Geometric Themes

Class 8 Maths (Ganita Prakash Part-II) • Notes + Step-by-Step Textbook Solutions + Board Questions (2026-27)

Chapter Review in Easy Language

1. Fractals (फ्रैक्टल)

- A ***fractal*** *is a* ***self-similar*** *shape: the same (or similar) pattern repeats again and again at smaller and smaller scales. Nature: fern leaves, trees, clouds, coastlines, mountains, lightning. Art: Kandariya Mahadev Temple (Khajuraho, c. 1025 CE), temples of Madurai, Hampi, Rameswaram, Varanasi; Fulani wedding blankets (Nigeria); M.C. Escher's 'Smaller and Smaller'.*
- ***Sierpinski Carpet:*** *take a square, break it into 9 equal squares,* ***remove the central one****; repeat on each of the remaining 8 squares. R_n = remaining squares =* $\mathbf{8^n}$*; holes H_n =* $H_{(n-1)} + R_{(n-1)} = 1 + 8 + 8^2 + \ldots + 8^{n-1} =$ $\mathbf{(8^n - 1)/7}$*. Area left (start 1) =* $\mathbf{(8/9)^n}$*.*
- ***Sierpinski Gasket (Triangle):*** *join the midpoints of an equilateral triangle → 4 identical equilateral triangles;* ***remove the central one****; repeat on the 3 remaining. Triangles left =* $\mathbf{3^n}$*; holes =* $1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} =$ $\mathbf{(3^n - 1)/2}$*; area left =* $\mathbf{(3/4)^n}$*.*
- ***Koch Snowflake*** *(von Koch, 1904): start with an equilateral triangle; divide each side into 3 equal parts, raise an equilateral triangle on the middle part and remove that middle part (a 'bump'); repeat on every new side. Sides at step n =* $\mathbf{3 \times 4^n}$*; each side =* $(1/3)^n$ *(start side 1); perimeter =* $3 \times 4^n \times (1/3)^n =$ $\mathbf{3 \times (4/3)^n}$ *– it keeps growing.*

2. Visualising solids (ठोसों की कल्पना)

- *A solid shows a different* ***profile*** *(outline) from different viewpoints: a cube, cylinder or cone can give a square, circle or triangle. The same solid may give very different profiles, and different solids can give the same profile.*
- ***Faces*** *= flat surfaces;* ***edges*** *= line segments where faces meet;* ***vertices*** *= points where edges meet. Cube/cuboid: 6 faces, 12 edges, 8 vertices.* ***Prism*** *with n-sided polygons: n + 2 faces, 3n edges, 2n vertices.* ***Pyramid*** *with n-sided base: n + 1 faces, 2n edges, n + 1 vertices. (Euler: V − E + F = 2.) Triangular pyramid =* ***tetrahedron****.*
- ***Net*** *= flat shape that folds into a solid (flaps for sticking are not part of the net). A cube has* **11** *different nets; a regular tetrahedron has* **2***; an octahedron 11; a dodecahedron 43,380. Cylinder net: two circles + a rectangle (height × circumference 2πr). Cone net: a circle + a*

sector *of a circle (centre = apex O). A* **sphere has no net** *(cannot be flattened without wrinkles/gaps).*

- **Shortest path on a cuboid:** *unfold the cuboid into a net; the shortest path is a* **straight line on the net** *(then use the Baudhāyana theorem $d^2 = a^2 + b^2$). The way you unfold matters – check all possible unfoldings and pick the shortest. Example (12 × 12 × 30 box, ant and laddu): 42 cm, 40 cm ... the shortest is* **40 cm**.

3. Projections and views (प्रक्षेपण और दृश्य)

- *The* **projection** *of a point P on a plane is the foot O of the perpendicular from P. The projection of an object is the set of projections of all its points = the shape of its shadow under a very distant light (the Sun) = the shape of the hole it would make passing straight through the plane.* **A projection does not identify the object** *(many objects give the same projection).*
- **Three views:** *projection on the vertical plane =* **front view**; *on the horizontal plane =* **top view**; *on the side plane =* **side view**. *Parallel lines always project to* **parallel lines**; *a line's projection is never longer than the line ($p = l \cos\theta \le l$) and equals it only when the line is parallel to the plane.*
- **Isometric projection** *(iso = equal, metric = measure): a cube balanced on a corner, projected down, looks like a* **regular hexagon**; *all projected edges are equal. Tiling the plane with hexagons gives the* **isometric grid**: *vertical lines = height, and the two slanted directions = length and depth. Equal units on the three axes are drawn with equal length.*
- **Tetris shapes:** *the five ways of joining 4 squares (I, O, T, L, S). With cubes there are 3 more non-flat ways (8 solid tetra-cubes in all). Impossible figures (impossible triangle, endless staircase) look right locally but cannot exist as solids.*

Important Terms (Glossary)

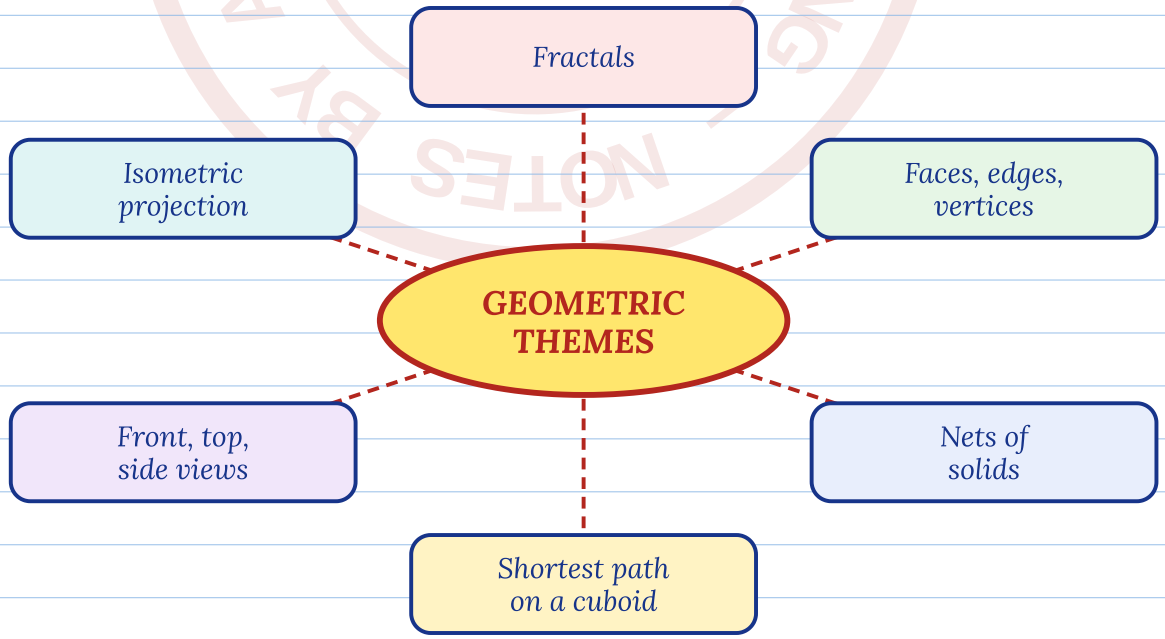
Term	Meaning
Fractal	*Self-similar shape repeating at smaller scales.*
Self-similar	*Contains smaller copies of itself.*
Net	*Flat shape that folds into a solid.*
Face, edge, vertex	*Flat surface; line where faces meet; point where edges meet.*
Prism / Pyramid	*Two congruent polygon ends + parallelogram faces / polygon base + apex.*
Tetrahedron / Octahedron	*Solid with 4 / 8 triangular faces.*

Projection	Foot of perpendicular of each point on a plane.
Front / Top / Side view	Projections on the vertical / horizontal / side plane.
Isometric projection	Projection in which all cube edges look equal (regular hexagon).
Isometric grid	Hexagon-tiled paper to draw 3-D solids.

Quick Revision & Formulas

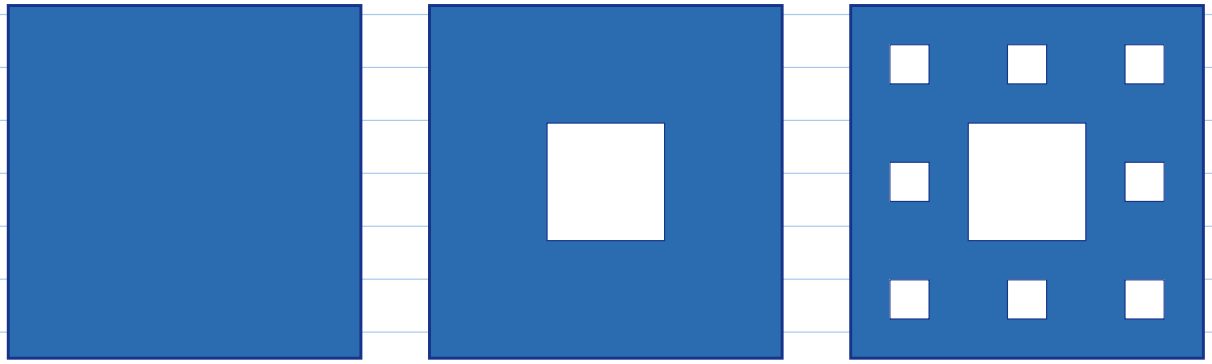
- Carpet: $R_n = 8^n$, $H_n = (8^n - 1)/7$, area $= (8/9)^n$. Gasket: $T_n = 3^n$, $H_n = (3^n - 1)/2$, area $= (3/4)^n$. Koch: sides $= 3 \times 4^n$, perimeter $= 3 \times (4/3)^n$.
- Cube: 6 F, 12 E, 8 V. n-prism: $F = n + 2$, $E = 3n$, $V = 2n$. n-pyramid: $F = n + 1$, $E = 2n$, $V = n + 1$. Euler: $V - E + F = 2$.
- Nets: cube 11, regular tetrahedron 2, octahedron 11, dodecahedron 43,380; sphere – none.
- Cylinder net: rectangle $h \times 2\pi r$ + 2 circles. Cone net: circle + sector (radius = slant height l).
- Shortest path on a cuboid = straight line on a net; use $d^2 = a^2 + b^2$; try all unfoldings.
- Line with views f, t, s and true length l: $f^2 + t^2 + s^2 = 2l^2$. Isometric: edge projects to $a\sqrt{(2/3)} \approx 0.816a$.
- Parallel lines project to parallel lines; a parallelogram projects to a parallelogram.

Diagrams, Tables & Flowcharts



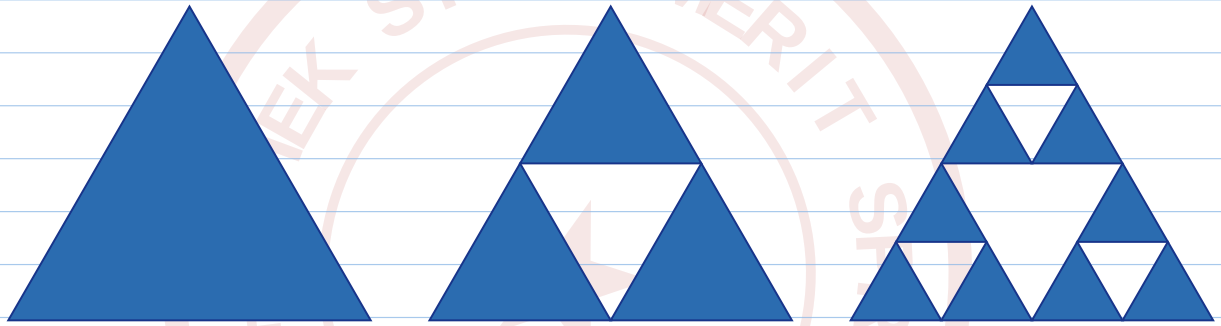
Concept map

Fractals



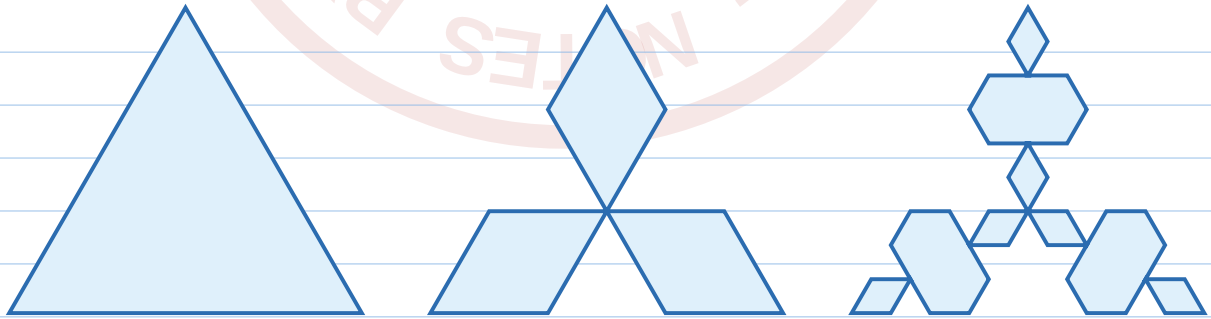
Step 0 Step 1 Step 2

Sierpinski Carpet – steps 0, 1, 2



Step 0 Step 1 Step 2

Sierpinski Gasket – steps 0, 1, 2



Step 0 (3 sides) Step 1 (12 sides) Step 2 (48 sides)

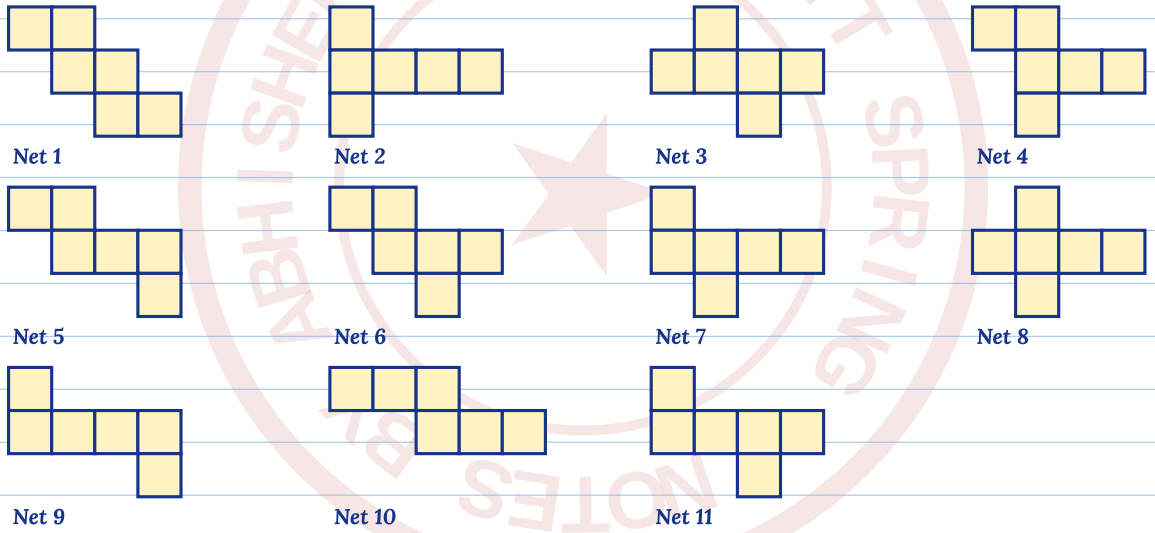
Koch Snowflake – steps 0, 1, 2

Step n	Carpet: squares R_n	Carpet: holes H_n	Gasket: triangles	Gasket: holes

0	1	0	1	0
1	8	1	3	1
2	64	1 + 8 = 9	9	1 + 3 = 4
3	512	1 + 8 + 64 = 73	27	1 + 3 + 9 = 13
n	8^n	$(8^n - 1)/7$	3^n	$(3^n - 1)/2$

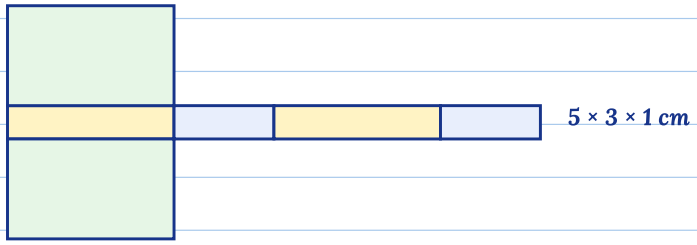
Step n	Koch: sides	Side length	Perimeter
0	3	1	3
1	12	1/3	4
2	48	1/9	16/3 ≈ 5.33
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

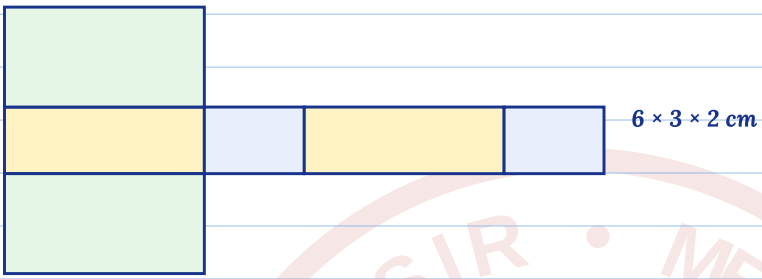
All 11 nets of a cube



The 11 nets of a cube (one-flip/rotation variants counted as the same)

Nets of cuboids (Figure it Out)



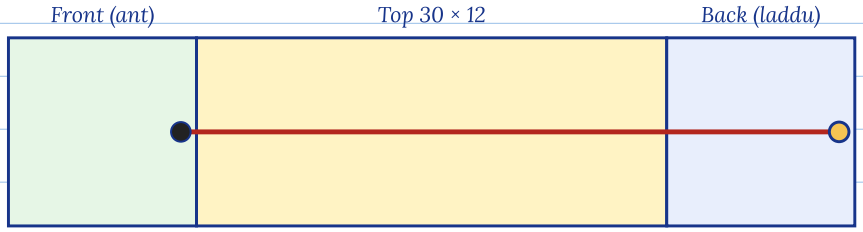


Cuboid nets: four side faces in a row + top and bottom (yellow = large faces)

Table: faces, edges, vertices

Solid	Faces F	Edges E	Vertices V	V − E + F
Cube / cuboid	6	12	8	2
Triangular prism	5	9	6	2
Prism, 10-sided ends	12	30	20	2
Prism, n-sided ends	$n + 2$	$3n$	$2n$	2
Square pyramid	5	8	5	2
Tetrahedron	4	6	4	2
Pyramid, 10-sided base	11	20	11	2
Pyramid, n-sided base	$n + 1$	$2n$	$n + 1$	2
Octahedron	8	12	6	2

Shortest path: ant and laddu on a 12 × 12 × 30 box



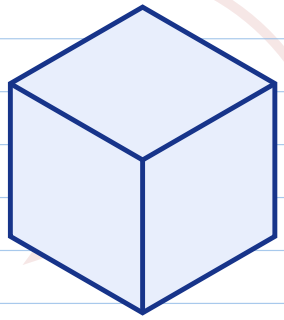
Path over the top: 1 + 30 + 11 = 42 cm

Spiral path through 5 faces (24-32-40 triangle) = 40 cm ← shortest

One unfolding gives 42 cm; the 5-face unfolding gives 40 cm

Isometric projection of a cube

height ↑
length / depth ↗ ↖



Regular hexagon:
3 edges meet at the centre
projected edge = a√(2/3)

A cube balanced on a corner projects to a regular hexagon

Table: views of common solids (upright)

Solid	Front	Top	Side
Cube	Square	Square	Square
Cuboid	Rectangle	Rectangle	Rectangle
Cylinder	Rectangle	Circle	Rectangle
Cone	Triangle	Circle (with centre)	Triangle
Square pyramid	Triangle	Square with diagonals	Triangle
Triangular prism (lying)	Rectangle	Rectangle	Triangle
Sphere	Circle	Circle	Circle

Flowchart: finding the shortest path on a cuboid

Mark the ant and the laddu on the box ➤ Unfold the box into a net so both lie on connected faces ➤ Join them by a straight line on the net ➤ Find the length with $d^2 = a^2 + b^2$ ➤ Repeat for every possible unfolding; take the smallest

Step-by-Step Textbook Solutions

Sierpinski Carpet (p.71): draw steps 0–2; find R_n and H_n.

Ans. Draw: Step 0: one square. Step 1: split into 9 equal squares, remove the middle one (1 hole, 8 squares). Step 2: do the same in each of the 8 squares (8 more holes, 64 squares).

R_n: every remaining square gives 8 squares in the next step $\Rightarrow R_{(n+1)} = 8R_n$, $R_0 = 1 \Rightarrow \mathbf{R_n = 8^n}$.

H_n: each remaining square gives 1 new hole, old holes stay $\Rightarrow H_{(n+1)} = H_n + R_n$, $H_0 = 0 \Rightarrow H_1 = 1$, $H_2 = 1 + 8 = 9$, $H_3 = 1 + 8 + 64 = 73 \Rightarrow \mathbf{H_n = 1 + 8 + \ldots + 8^{n-1} = (8^n - 1)/7}$.

Math Talk (p.72): Show that joining the midpoints of an equilateral triangle divides it into 4 identical equilateral triangles.

Ans. Step 1: Let ABC be equilateral with side a; D, E, F are the midpoints of AB, BC, CA.

Step 2: Corner triangle ADF: AD = AF = $a/2$ (midpoints), so it is isosceles with apex angle A = 60°.

Step 3: Base angles = (180° − 60°) ÷ 2 = 60° each $\Rightarrow$ ADF is **equilateral** with side $a/2$, so DF = $a/2$. Similarly BDE and CEF are equilateral with sides $a/2$ (DE = EF = $a/2$).

Step 4: The middle triangle DEF has DE = EF = FD = $a/2 \Rightarrow$ equilateral.

Step 5: All 4 triangles have three sides $a/2 \Rightarrow$ congruent by SSS $\Rightarrow$ 4 identical equilateral triangles ✓.

Figure it Out (p.72) Q1–Q3: Sierpinski triangle – (1) draw steps 0–2; (2) number of holes and triangles at each step; (3) area of the region left at step n for both Sierpinski fractals (starting area 1).

Ans. Q1 (draw): Step 0: a triangle. Step 1: join midpoints, remove the middle triangle (3 triangles left). Step 2: do the same in each of the 3 (9 triangles left).

Q2: Triangles left: 1, 3, 9, 27 … = $\mathbf{3^n}$ (each gives 3). Holes: each remaining triangle gives 1 new hole $\Rightarrow H_{n+1} = H_n + 3^n \Rightarrow 0, 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 9 = 13 \ldots \Rightarrow \mathbf{H_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2}$.

Q3 – Gasket: the 4 small triangles have equal area, 3 are kept $\Rightarrow$ area × 3/4 at each step $\Rightarrow$ $\mathbf{(3/4)^n}$ (1, 3/4, 9/16, 27/64 …).

Carpet: 8 of the 9 equal squares are kept ⇒ area × 8/9 at each step ⇒ $(8/9)^n$ (1, 8/9, 64/81 …).

Figure it Out (p.73) Q1–Q3: Koch snowflake – (1) draw steps 0–2; (2) number of sides at step n; (3) perimeter at step n if the starting triangle has side 1.

Ans. Q1 (draw): Step 0: equilateral triangle. Step 1: divide each side into 3, raise a small equilateral triangle on the middle third and remove its base ⇒ 6-pointed star. Step 2: repeat on each of the new sides.

Q2: Each side is replaced by 4 sides (two outer thirds + two sides of the bump) ⇒ sides: 3, 12, 48 … ⇒ 3×4^n.

Q3: Each new side is 1/3 of the old side ⇒ side at step n = $(1/3)^n$.

Perimeter = sides × side = $3 \times 4^n \times (1/3)^n = 3 \times (4/3)^n$: 3, 4, 16/3 ≈ 5.33, 64/9 ≈ 7.1 … (it grows without limit).

Build it in your imagination (p.75–77) Q1–Q12.

Ans. Q1: Picture your name and read it backwards (a personal activity; no fixed answer).

Q2: Cutting the 4 corners between midpoints of adjacent edges leaves a **tilted square** with **half** the area. The four corner triangles (right isosceles) can be joined with their right angles at a point to make a square, again of half the area.

Q3: Cutting the corners of an equilateral triangle at thirds gives a **regular hexagon** (6 equal sides = 1/3, all angles 120°).

Q4: Cutting the corners of a square at thirds gives an **octagon** (8 sides: 4 of length 1/3 and 4 slanted ones of length $\sqrt{2}/3$; not regular).

Q5: Square outline: a **cube** (from any face) or a cuboid / a cylinder with height = diameter seen from the side.

Q6: Circular outline: a **sphere** (from every direction), a cylinder from the top, a cone from below.

Q7: Triangular outline: a **cone** or a **pyramid** from the side, a triangular prism from its end.

Q8: Rectangle + circle: a **cylinder** (side view rectangle, top view circle).

Q9: Circle + triangle: a **cone** (top view circle, side view triangle).

Q10: Rectangle + triangle: a **triangular prism** (side view rectangle, end view triangle).

Q11: Trapezium + circle: a **frustum of a cone** (side view trapezium, top view circle).

Q12: Pentagon + rectangle: a **pentagonal prism** (end view pentagon, side view rectangle).

Unique? No – e.g. Q8 can also be a cuboid-with-round-hole-like rod; Q10 can also be a wedge/tent shape. Many solids are possible.

In-text (p.79): A prism has two congruent 10-sided polygons – how many faces, edges, vertices? If n-sided? A pyramid with a 10-sided base? n-sided base?

Ans. Prism, 10-sided ends: *Faces = 10 side faces + 2 ends =* **12**. *Edges = 10 + 10 (the two ends) + 10 (joining edges) =* **30**. *Vertices = 10 + 10 =* **20**.

***n*-sided prism:** *faces =* **n + 2**; *edges = n + n + n =* **3n**; *vertices =* **2n**.

Pyramid, 10-sided base: *Faces = 10 triangles + 1 base =* **11**. *Edges = 10 (base) + 10 (to the apex) =* **20**. *Vertices = 10 + 1 =* **11**.

***n*-sided pyramid:** *faces =* **n + 1**; *edges =* **2n**; *vertices =* **n + 1**.

Check (Euler): V − E + F: 20 − 30 + 12 = 2 ✓; 11 − 20 + 11 = 2 ✓.

Figure it Out (p.80–81) Q1: Which of the six figures are nets of a cube? Q2: Find all 11 nets of a cube. Q3: Draw a net of a cuboid with sides (i) 5, 3, 1 cm (ii) 6, 3, 2 cm.

Ans. Q1 – Test: *a cube net must have 6 squares, and when you fold it no two squares may land on the same face. The valid nets have these row patterns: 1-4-1, 2-3-1, 2-2-2, 3-3.*

(i) rows 2 + 4 (squares overlap when folded) ⇒ **not a net ✗**.

(ii) rows 3 + 3 (shifted by two) ⇒ **net ✓**.

(iii) staircase 2-2-2 ⇒ **net ✓**.

(iv) 1-4-1 (one above, one below the row of 4) ⇒ **net ✓**.

(v) a row of 4 with both extra squares hanging on the **same side** *⇒ they overlap ⇒* **not a net ✗**.

(vi) 1-4-1 (one above, one below) ⇒ **net ✓**.

Nets: (ii), (iii), (iv), (vi).

Q2: *see the picture of the 11 nets (6 of type 1-4-1, 3 of type 2-3-1, 1 of type 2-2-2, 1 of type 3-3).*

Q3: *see the cuboid net pictures: a row of four side faces (a, b, a, b) with the top and bottom attached to one long face. (i) side faces 5 × 1, 3 × 1, 5 × 1, 3 × 1; top and bottom 5 × 3. Area check: 2(15 + 5 + 3) = 46 cm². (ii) side faces 6 × 2, 3 × 2, 6 × 2, 3 × 2; top and bottom 6 × 3. Area check: 2(18 + 12 + 6) = 72 cm².*

In-text (p.81–84): nets of a regular tetrahedron; net of a square pyramid; cylinder, cone, triangular prism, octahedron, sphere.

Ans. Tetrahedron figures: *(1) big triangle split into 4 ⇒* **net ✓**; *(2) 3 triangles in a row + 1 below the end one – all 4 triangles meet at one vertex, so they overlap when folded ⇒* **not a net ✗**; *(3) strip of 4 triangles ⇒* **net ✓**; *(4) has* **5** *triangles ⇒* **not a net ✗**. *(A regular tetrahedron has only 2 nets: the 'big triangle' and the 'strip of 4'.)*

Regular tetrahedron net: *draw 4 equilateral triangles of side 5 cm as a big triangle (3*

corner triangles around the middle one). ***Square pyramid net:*** *a 4 cm square with an isosceles triangle (base 4 cm, height e.g. 5 cm) on each side.*

Cylinder: *rectangle with sides = height h and circumference 2πr, plus two circles of radius r.*

Cone: *a sector of a circle (centre O = apex, radius = slant height l); all boundary points are at distance l from O. If O is* ***not*** *the centre of the boundary curve you get a* ***slanted (oblique) cone-like surface****, not a right cone.*

Triangular prism: *e.g. triangle 3-4-5 cm and length 6 cm ⇒ rectangles 3 × 6, 4 × 6, 5 × 6 side by side and a triangle on each end of one rectangle.*

Octahedron: *8 equilateral triangles in the given net; 11 nets in all.*

Sphere: *has* ***no net*** *– paper cannot wrap a ball without wrinkles, gaps or overlaps.*

Shortest paths (p.84–87): (a) ant at the centre of the side face, laddu at the centre of the top face; laddu at the centre of an edge; (b) 4 × 8 × 4 cm cuboid case; (c) Try This – 12 × 12 × 30 cm box, ant and laddu.

Ans. (a) *Draw the net so the side face and top face touch along their common edge. The shortest path is the* ***straight line*** *joining the two centres on the net – it goes up the side face to the shared edge and straight across the top. When the laddu is at the centre of an edge, unfold so that the ant's face and the laddu's face are joined; the straight line between them is shortest; a path that is bent on the net is longer.*

(b) *(4 × 8 × 4 cm box; ant at the centre of an end face, laddu on the long face, 2 cm from the end). Unfold the end face* ***beside*** *the face with the laddu (second net). Horizontal distance = 2 + 2 = 4 cm, vertical distance = 2 cm ⇒* $d^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ *⇒* $\mathbf{d = \sqrt{20} \approx 4.5\ cm}$ *(read from the figure).*

(c) *Unfolding 1 (over the top): 1 + 30 + 11 =* **42 cm***. Unfolding 2 (through 5 faces): the straight segment makes a right triangle with legs 24 and 32 ⇒* $d^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600$ *⇒ d =* **40 cm***. Shortest =* **40 cm** *(less than 42 cm).*

Math Talk (p.89): length of a projected line; projections of a square, a parallelogram, an n-sided regular polygon; projections of a cube and a cone; another object with the same projection as a cone.

Ans. *Line:* *In Fig. 4.3, AE ⊥ BC and AECD is a rectangle, so AE = DC = p. In right triangle AEB the hypotenuse is AB = l and AE = p is a leg ⇒* $\mathbf{p \le l}$*. They are equal only when the line is* ***parallel*** *to the plane (then angle = 0).*

Square: *depending on the tilt, its projection can be a* ***square****, a* ***rectangle****, a* ***parallelogram****, or just a* ***line segment*** *(edge-on).*

Parallelogram: *the projection of parallel lines stays parallel, so a parallelogram always projects to a* ***parallelogram*** *(or a segment) –* ***never*** *a quadrilateral that is not a parallelogram.*

Regular n-gon: *the projection is made of the projections of its sides, so it is an* ***n-sided polygon*** *(stretched/squeezed, or a segment edge-on); for even n opposite sides stay parallel.*

Cube: *square, rectangle or (corner-on) a* ***hexagon***; ***cone:*** *triangle (side) or circle (from the base).*

Same projection as a cone (front view): *a triangular prism or a triangular pyramid or even a flat triangular plate also gives a triangle.*

Figure it Out (p.92) Q1–Q2: (1) relation between the lengths of the three views of a line; (2) front, top and side view of cube, cuboid, parallelepiped, cylinder, cone, prism, pyramid.

Ans. Q1: *Put the line along (dx, dy, dz) so its true length is l, $l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Front view length $f = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$; top $t = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; side $s = \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$. Adding: $f^2 + t^2 + s^2 = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \mathbf{2l^2}$. Also each view is* ***at most*** *l, and a view equals l when the line is parallel to that plane.*

Q2: *(see the table of views) Upright solids: cube – square, square, square; cuboid – rectangle, rectangle, rectangle; parallelepiped – parallelograms/rectangles (depending on the tilt); cylinder – rectangle, circle, rectangle; cone – triangle, circle with centre, triangle; triangular prism (lying on a rectangular face) – rectangle, rectangle, triangle; square pyramid – triangle, square with diagonals, triangle.*

Figure it Out (p.93) Q3: Match each object with its projections (front, top, side).

Ans. *Compare the three drawings (front, top, side) with the shape of each object from the matching direction. Objects in order from the top of the page, matched with the* ***row number*** *of the projections (counted from the top):*

Jug → row 8; funnel → row 6; hammer → row 7; car → row 1; ramp with box → row 3; chair → row 4; ceiling fan → row 5; pot with lid → row 2.

(Clues: the car's top view is a long rectangle; the funnel looks like a triangle from the front and side and a circle from the top; the ceiling fan's top view shows three blades; the jug's top view shows the spout and handle.)

Try This (p.94): shadows – how the size of the shadow changes as the torch moves; why a distant torch (the Sun) gives the projection; projection of a parallelogram.

Ans. Size: *when the torch is* ***closer*** *to the object the shadow is* ***bigger***; *moving the torch away makes the shadow smaller.* **Why:** *light rays spread out from the torch (like a cone), so*

by similar triangles the shadow is larger when the torch is near.

Far torch: *when the torch is very far, the rays become almost* ***parallel*** *and perpendicular to the wall, so the shadow has the same size and shape as the projection. The Sun is such a distant light.*

Parallelogram: *its shadow always remains a* ***parallelogram*** *– the projection of a pair of parallel lines stays parallel.*

Figure it Out (p.95) Q1: Draw the top, front and side views of the six stacks of identical cubes.

Ans. Method: *count the cubes in each column and in each row; the* ***top view*** *shows the base outline (one square per column), the* ***front view*** *shows the maximum height of each column as seen from the front, the* ***side view*** *the maximum height of each column as seen from the side. Using this on the pictures:*

Stack 1 (3 cubes, L-shape): *top view L-shape of 3 squares; front view 2 × 1 rectangle; side view 2 × 1 rectangle.*

Stack 3 (4 cubes): *a row of 3 cubes with 1 more cube in front of the left end: top view L-shape of 4 squares (3 in a row + 1); front view 3 × 1 rectangle; side view 2 × 1 rectangle.*

Stack 5 (4 cubes, T): *a column of 3 with 1 cube on the right of the middle one: front view '⊢' (T on its side) of 4 squares; top view 2 × 1 rectangle; side view 1 × 3 rectangle.*

Stacks 2, 4, 6 *are taller combinations; apply the same method – first read the height of every column, then draw the three views. (Check with real cubes.)*

Figure it Out (p.95) Q2 (Math Talk): Eight identical cubes glued to form a letter – views from the side and the top; build shapes that look like given letters from different directions; other letter combinations.

Ans. Idea: *a letter made of one layer of cubes is* ***one cube thick****. Seen from the front it shows the letter; seen from the* ***side*** *it is just a* ***vertical strip*** *(1 cube wide, as tall as the letter); seen from the* ***top*** *it is a* ***horizontal strip*** *(as wide as the letter, 1 cube deep).*

(ii)–(iv): *to get one letter from the front and a different letter from the top you add cubes (in the depth direction) wherever both views need a square, and remove the cubes that would show a square where a view needs a blank. Check each view by covering the others. Different combinations of letters are possible (e.g. a shape that looks like 'L' from the front and 'I' from the top).*

(The letters were printed as small pictures in the book; this is a model approach, not a fixed answer.)

Figure it Out (p.96) Q3: Which solid (i)–(vii) has the given front view, top view and side view?

Ans. ***Read the three views:*** *Front view: two columns – the left column 3 squares high, the right column 2 squares high. Top view: 3 rows × 2 columns with the front-right corner square missing (5 squares). Side view: heights 1, 1, 3.*

Build it: *the tall back row has heights 3 and 2; the next row is 2 cubes of height 1; the front row has only the left cube (height 1) ⇒ 5 + 2 + 1 =* **8 cubes***.*

Match: *the solid with a tall stepped wall at the back (heights 3 and 2) and a low front slab with the front-right cube missing is* **(ii)***.*

(picture-matching – read from the figure; please verify with real cubes.)

Figure it Out (p.96) Q4: Using identical cubes, make a solid with the given projections: (i)–(iii), (iv)–(vi), (vii)–(ix) (top, front, side).

Ans. *In each case decide the height of the cube in every position. Use the* ***side view*** *to find which row is tall, the* ***front view*** *for the column heights and the* ***top view*** *to see which positions have cubes. (Rows are written back row A, middle row B, front row C; columns left to right.)*

Solid 1 (i, ii, iii): *top view: A has cubes in columns 2, 3; B in 1, 2, 3; C in 1 and 3. Front view heights: 1, 2, 2; side view heights 1, 1, 2 ⇒ the tall row is A:* **A = (–, 2, 2), B = (1, 1, 1), C = (1, –, 1) ⇒ 9 cubes***.*

Solid 2 (iv, v, vi): *top view: A and B have 2 cubes each, C only the left; front view heights 2, 2; side heights 1, 1, 2 ⇒* **A = (2, 2), B = (1, 1), C = (1, –) ⇒ 7 cubes***.*

Solid 3 (vii, viii, ix): *top view as Solid 2; front view heights 2, 3; side heights 1, 1, 3 ⇒* **A = (2, 3), B = (1, 1), C = (1, –) ⇒ 8 cubes***.*

(Other arrangements giving the same views are not possible when the tall row has to be at the end, as shown.)

Figure it Out (p.97) Q5–Q6: (5) Find the number of cubes in the stack of identical cubes. (6) What shapes can the projection of a cube make?

Ans. Q5: *The stack is a staircase pyramid with 4 columns in the top row of the picture... read column by column: the picture shows 10 columns whose tops are visible (1, 2, 3, 4 in rows). Their heights are 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1 (the tallest at the apex, shorter towards the edge) ⇒ total = 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 =* **20 cubes***.*

Q6: *Square (looking straight at a face),* ***rectangle*** *(tilted about one edge),* ***parallelogram*** *or other* ***hexagon*** *(tilted in general), and the* ***regular hexagon*** *when the cube stands on a corner (isometric). It can never be a triangle or a circle.*

Math Talk (p.97): Balance a cube on a corner. Why do all the projected edges have equal length?

Ans. Step 1: *Stand the cube on one vertex so that its* ***space diagonal*** *through that vertex is vertical.*

Step 2: *The three edges meeting at the top vertex are* ***perfectly symmetric*** *about this vertical diagonal – each makes the* ***same angle*** θ *with it* ($\cos\theta = a/(a\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, $\theta \approx 54.7°$).

Step 3: *The projection of an edge on the floor =* $a \times \sin\theta = a\sqrt{(2/3)} \approx 0.816a$ *– the same for all three edges (and for all the other edges, which are parallel to these).*

So all projected edges are equal and the outline is a ***regular hexagon****.*

Figure it Out (p.100–102): (1) other ways of gluing four cubes besides the 5 Tetris shapes; (2) draw the figures on the isometric grid; (3) the strange ball path; (4) the impossible triangle.

Ans. Q1: Yes. *The 5 shapes in Fig. 4.8 lie flat. With cubes there are* **3 more** *that do not lie flat: (a) a* ***corner/tripod*** *– one cube with three more attached along three different directions (like the corner of a room); (b) and (c) two* ***twisted (screw-like)*** *shapes, one left-handed and one right-handed (mirror images). So there are* **8** *tetra-cube solids in all.*

Q2 (method): *draw edge by edge on the isometric grid:* ***vertical lines*** *for height, the two* ***slanted directions*** *for length and depth. For each edge count the units and decide whether it goes up/down or left/right, and draw it in the grid direction (or opposite). Use faint lines first and darken the visible ones.*

Q3: *The arrows show the ball always rolling* ***downhill****, yet the path goes* ***round a closed loop*** *and returns to the starting level – that is impossible in a real solid (like the Penrose staircase). To recreate it, draw the physically possible part (using the 3 axes) and join the ends in the drawing.*

Q4 (i): No *– the impossible triangle cannot be built from real cubes. Each arm looks fine, but the three arms cannot meet at the corners in space; its views would not match.* **(ii)** *Draw each of the three arms along one of the three axes on the isometric grid so that the corners join in the picture.* **(iii)** *The illusion works because on isometric paper three different directions (height, length, depth) are drawn as three line families; our eyes assume lines that meet in the drawing meet in space, but here the ends are at different depths.*

Board-Pattern Questions – 1 Mark

1. What is a fractal? (1)

Ans. *A self-similar shape that repeats the same pattern at smaller and smaller scales.*

2. How many squares remain at step n of the Sierpinski carpet? (1)

Ans. 8^n.

3. How many triangles remain at step 3 of the Sierpinski gasket? (1)

Ans. $3^3 = 27$.

4. How many sides does the Koch snowflake have at step 2? (1)

Ans. $3 \times 4^2 = 48$.

5. Faces, edges and vertices of a cube? (1)

Ans. 6, 12, 8.

6. How many nets does a cube have? (1)

Ans. 11.

7. How many nets does a regular tetrahedron have? (1)

Ans. 2.

8. Which solid has no net? (1)

Ans. A sphere.

9. What are the faces of a prism other than the two ends? (1)

Ans. Parallelograms (rectangles for a right prism).

10. What does 'isometric' mean? (1)

Ans. Equal measure.

11. What shape is the isometric projection of a cube? (1)

Ans. A regular hexagon.

12. Does the projection of parallel lines remain parallel? (1)

Ans. Yes.

Board-Pattern Questions – 3 Marks

1. A prism has two congruent 8-sided polygons as ends. Find its faces, edges and vertices and verify Euler's formula. (3)

Ans. Faces = 8 + 2 = 10; edges = 3 × 8 = 24; vertices = 2 × 8 = 16. V − E + F = 16 − 24 + 10 = 2 ✓.

2. Find the number of squares and holes at step 3 of the Sierpinski carpet. (3)

Ans. Squares $R_3 = 8^3 = 512$. Holes $H_3 = 1 + 8 + 64 = 73$ (or $(8^3 - 1)/7 = 511/7 = 73$).

3. The Koch snowflake starts with a triangle of side 1. Find the number of sides and the perimeter at step 2. (3)

Ans. Sides = $3 \times 4^2 = 48$. Each side = $(1/3)^2 = 1/9$. Perimeter = $48 \times 1/9 = 16/3 \approx 5.33$.

4. Draw (describe) the net of a cuboid 4 cm × 3 cm × 2 cm and find its surface area. (3)

Ans. Net: a row of four side faces 4 × 2, 3 × 2, 4 × 2, 3 × 2 with the 4 × 3 top and bottom attached to a 4-cm side face. Surface area = $2(4\times3 + 4\times2 + 3\times2) = 2(12 + 8 + 6) = 52$ cm².

5. Name the solid that has a rectangle as front view, a rectangle as top view and a triangle as side view. (3)

Ans. A triangular prism lying on one of its rectangular faces: front and top views are rectangles; the end (side) view is a triangle.

Board-Pattern Questions – 5 Marks

1. For the Sierpinski gasket find (i) triangles left, (ii) holes, (iii) area left at step n (starting area 1), and evaluate them for n = 3. (5)

Ans. (i) Each triangle gives 3 ⇒ $T_n = 3^n$; $T_3 = 27$.

(ii) Each remaining triangle adds 1 hole ⇒ $H_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$; $H_3 = (27 - 1)/2 = 13$.

(iii) 3 of the 4 equal small triangles are kept ⇒ area × 3/4 each step ⇒ $A_n = (3/4)^n$; $A_3 = 27/64$.

Answer: 27 triangles, 13 holes, area 27/64.

2. A box is 12 cm × 12 cm × 30 cm. An ant is on the front face, 1 cm from the top edge and in the middle; a laddu is on the back face, 1 cm from the bottom edge and in the middle. Find the length of the path over the top and compare it with the 40 cm spiral path. (5)

Ans. Step 1: Unfold front, top and back faces in a line.

Step 2: The ant is 1 cm below the top edge of the front face; across the top face = 30 cm; the laddu is 12 − 1 = 11 cm below the top edge of the back face.

Step 3: Both are in the middle (same horizontal position), so the straight line is vertical in the net: length = 1 + 30 + 11 = 42 cm.

Step 4: A spiral unfolding through 5 faces makes a right triangle with legs 24 cm and 32 cm: $d^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600 \Rightarrow d = 40$ cm.

Step 5: 40 cm < 42 cm, so the shortest path is 40 cm.

3. Draw the top, front and side views of a solid made of 4 identical cubes: a row of 3 cubes with 1 cube placed on top of the middle cube. Also state the number of faces of the solid that are visible from the front. (5)

Ans. Take the row along the width (left, middle, right), 1 cube deep, and the extra cube on the middle one.

Front view: a 3 × 1 base with 1 square above the middle (a 'T' shape of 4 squares).

Top view: 3 squares in a row (the top cube hides the middle one) – a 3 × 1 rectangle.

Side view: 2 squares one above the other – a 1 × 2 rectangle.

Faces visible from the front: the front faces of the 3 base cubes + the front face of the top cube = 4 square faces.

ABHISHEK SIR • MERIT SPRING • NOTES BY

हिन्दी भाग (Hindi Section)

कुछ ज्यामितीय विषयों की खोज

कक्षा 8 गणित (गणित प्रकाश भाग-II) • नोट्स + चरण-दर-चरण हल + बोर्ड प्रश्न (2026-27)

आसान भाषा में अध्याय की समीक्षा

1. फ्रैक्टल

- **फ्रैक्टल** एक **स्व-समरूप** आकृति है : वही (या मिलता-जुलता) पैटर्न छोटे-छोटे पैमानों पर बार-बार दोहराया जाता है। प्रकृति में : फर्न की पत्तियाँ, पेड़, बादल, तटरेखा, पहाड़, बिजली। कला में : कंदरिया महादेव मंदिर (खजुराहो, लगभग 1025 ई.), मदुरै, हम्पी, रामेश्वरम, वाराणसी के मंदिर ; नाइजीरिया के फुलानी विवाह-कंबल ; एम.सी. एशर का 'Smaller and Smaller'।
- **सिएरपिंस्की कालीन :** एक वर्ग को 9 बराबर वर्गों में बाँटो, **बीच वाला हटा दो** ; बचे 8 वर्गों में यही दोहराओ। शेष वर्ग $R_n = 8^n$; छेद $H_n = H_{(n-1)} + R_{(n-1)} = 1 + 8 + 8^2 + \ldots + 8^{n-1} = (8^n - 1)/7$। शेष क्षेत्रफल (शुरू में 1) = $(8/9)^n$।
- **सिएरपिंस्की त्रिभुज (गैस्केट) :** समबाहु त्रिभुज की भुजाओं के मध्य-बिंदु मिलाओ → 4 सर्वसम समबाहु त्रिभुज ; **बीच वाला हटाओ** ; शेष 3 पर दोहराओ। शेष त्रिभुज = 3^n; छेद = $1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$; शेष क्षेत्रफल = $(3/4)^n$।
- **कोच स्नोफ्लेक** (वॉन कोच, 1904) : समबाहु त्रिभुज से शुरू करो ; हर भुजा को 3 बराबर भागों में बाँटो, बीच वाले भाग पर समबाहु त्रिभुज उठाओ और बीच वाला भाग हटा दो ('उभार') ; हर नई भुजा पर यही दोहराओ। चरण n पर भुजाएँ = 3×4^n; हर भुजा = $(1/3)^n$ (प्रारंभिक भुजा 1); परिमाप = $3 \times 4^n \times (1/3)^n = 3 \times (4/3)^n$ – यह बढ़ता ही जाता है।

2. ठोसों की कल्पना

- किसी ठोस की **रूपरेखा** (प्रोफ़ाइल) अलग-अलग दृष्टिकोण से अलग दिखती है : घन, बेलन या शंकु वर्ग, वृत्त या त्रिभुज दिखा सकते हैं। एक ही ठोस की रूपरेखाएँ बहुत भिन्न हो सकती हैं और अलग-अलग ठोसों की रूपरेखा समान हो सकती है।
- **फलक** = समतल सतहें ; **किनारे** = वे रेखाखंड जहाँ फलक मिलते हैं ; **शीर्ष** = वे बिंदु जहाँ किनारे मिलते हैं। घन/घनाभ : 6 फलक, 12 किनारे, 8 शीर्ष। n-भुजा वाले बहुभुजों का **प्रिज़्म** : n + 2 फलक, 3n किनारे, 2n शीर्ष। n-भुजा आधार वाला **पिरामिड** : n + 1 फलक, 2n किनारे, n + 1 शीर्ष। (यूलर : V – E + F = 2।) त्रिभुजाकार पिरामिड = **चतुष्फलक (टेट्राहेड्रन)**।
- **जाल (नेट)** = समतल आकृति जो मुड़कर ठोस बने (चिपकाने की पट्टियाँ जाल का भाग नहीं)। घन के **11** अलग जाल होते हैं ; सम चतुष्फलक के **2** ; अष्टफलक के 11 ; द्वादशफलक के 43,380। बेलन का जाल : दो वृत्त + एक आयत (ऊँचाई × परिधि $2\pi r$)। शंकु का जाल : एक वृत्त + वृत्त का **त्रिज्यखंड** (केंद्र = शीर्ष O)। **गोले का जाल नहीं** होता (बिना सिलवट/खाली जगह के समतल नहीं हो सकता)।

- **घनाभ पर सबसे छोटा रास्ता :** घनाभ को खोलकर जाल बनाओ ; सबसे छोटा रास्ता जाल पर **सीधी रेखा** है (फिर बौधायन प्रमेय $d^2 = a^2 + b^2$)। खोलने का तरीका मायने रखता है – सभी संभव तरीके जाँचकर सबसे छोटा लो। उदाहरण ($12 \times 12 \times 30$ का डिब्बा, चींटी और लड्डू) : 42 सेमी, 40 सेमी … सबसे छोटा **40 सेमी**।

3. प्रक्षेपण और दृश्य

- समतल पर बिंदु P का **प्रक्षेपण** P से डाले लंब का पाद O है। किसी वस्तु का प्रक्षेपण उसके सभी बिंदुओं के प्रक्षेपणों का समूह है = बहुत दूर के प्रकाश (सूर्य) में उसकी छाया का आकार = समतल से सीधे गुज़रने पर बनने वाले छेद का आकार। **प्रक्षेपण से वस्तु की पहचान नहीं होती** (कई वस्तुओं का प्रक्षेपण समान हो सकता है)।
- **तीन दृश्य :** ऊर्ध्वाधर समतल पर प्रक्षेपण = **सामने का दृश्य** ; क्षैतिज समतल पर = **ऊपर का दृश्य** ; पार्श्व समतल पर = **बगल का दृश्य**। समांतर रेखाओं के प्रक्षेपण सदा **समांतर** होते हैं ; रेखा का प्रक्षेपण रेखा से लंबा नहीं होता ($p = l \cos\theta \le l$) और बराबर तभी जब रेखा समतल के समांतर हो।
- **समदूरिक (आइसोमेट्रिक) प्रक्षेपण** (iso = बराबर, metric = माप) : घन को एक कोने पर संतुलित करके नीचे प्रक्षेपित करें तो वह **सम षट्भुज** दिखता है ; सभी प्रक्षेपित किनारे बराबर होते हैं। तल को षट्भुजों से भरने पर **आइसोमेट्रिक ग्रिड** मिलती है : ऊर्ध्वाधर रेखाएँ = ऊँचाई, दो तिरछी दिशाएँ = लंबाई और गहराई। तीनों अक्षों पर बराबर इकाइयाँ बराबर लंबाई की खींची जाती हैं।
- **टेट्रिस आकृतियाँ :** 4 वर्गों को जोड़ने के पाँच तरीके (I, O, T, L, S)। घनों से 3 और गैर-समतल तरीके हैं (कुल 8 ठोस आकृतियाँ)। असंभव आकृतियाँ (असंभव त्रिभुज, अंतहीन सीढ़ी) स्थानीय रूप से सही दिखती हैं पर ठोस के रूप में बन नहीं सकतीं।

महत्वपूर्ण शब्द (शब्दावली)

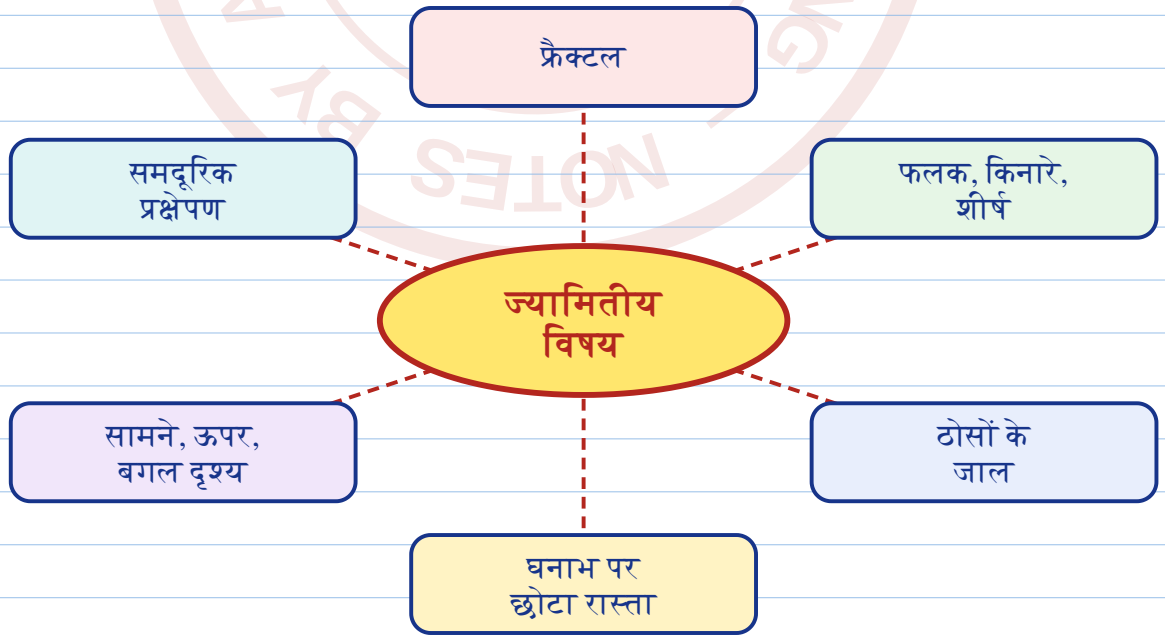
शब्द	अर्थ / परिभाषा
फ्रैक्टल	स्व-समरूप आकृति जो छोटे पैमानों पर दोहराई जाए।
स्व-समरूप	जिसमें अपनी ही छोटी प्रतियाँ हों।
जाल (नेट)	समतल आकृति जो मुड़कर ठोस बनाए।
फलक, किनारा, शीर्ष	समतल सतह ; जहाँ फलक मिलते हैं वह रेखा ; जहाँ किनारे मिलते हैं वह बिंदु।
प्रिज़्म / पिरामिड	दो सर्वांगसम बहुभुज सिरे + समांतर चतुर्भुज फलक / बहुभुज आधार + शीर्ष।
चतुष्फलक / अष्टफलक	4 / 8 त्रिभुजाकार फलकों वाला ठोस।
प्रक्षेपण	समतल पर हर बिंदु के लंब का पाद।
सामने / ऊपर / बगल का दृश्य	ऊर्ध्वाधर / क्षैतिज / पार्श्व समतल पर प्रक्षेपण।

समदूरिक प्रक्षेपण	वह प्रक्षेपण जिसमें घन के सब किनारे बराबर दिखें (सम षट्भुज)।
आइसोमेट्रिक ग्रिड	3-D ठोस बनाने की षट्भुज वाली कागज़-ग्रिड।

त्वरित पुनरावृत्ति व सूत्र

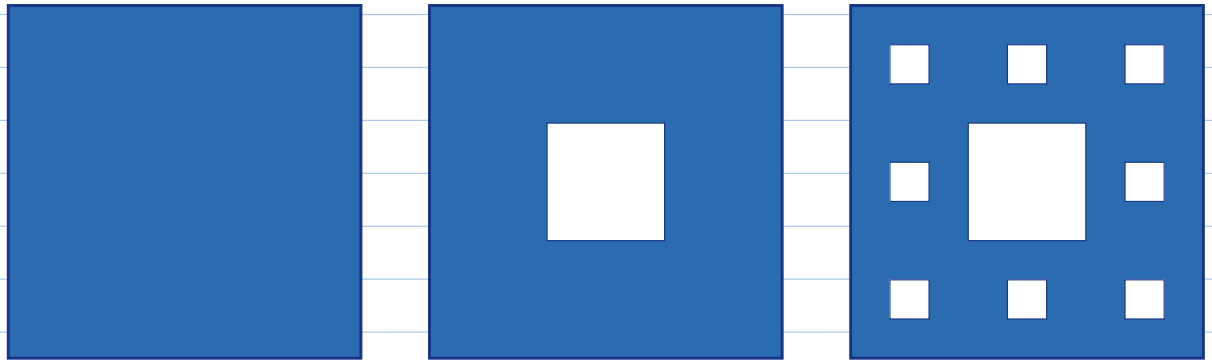
- कालीन: $R_n = 8^n$, $H_n = (8^n - 1)/7$, क्षेत्रफल $= (8/9)^n$। गैस्केट: $T_n = 3^n$, $H_n = (3^n - 1)/2$, क्षेत्रफल $= (3/4)^n$। कोच: भुजाएँ $= 3 \times 4^n$, परिमाप $= 3 \times (4/3)^n$।
- घन: 6 फ, 12 कि, 8 शी। n-प्रिज़्म: फ $= n + 2$, कि $= 3n$, शी $= 2n$। n-पिरामिड: फ $= n + 1$, कि $= 2n$, शी $= n + 1$। यूलर: $V - E + F = 2$।
- जाल: घन 11, सम चतुष्फलक 2, अष्टफलक 11, द्वादशफलक 43,380; गोला – नहीं।
- बेलन का जाल: आयत $h \times 2\pi r$ + 2 वृत्त। शंकु का जाल: वृत्त + त्रिज्यखंड (त्रिज्या = तिर्यक ऊँचाई l)।
- घनाभ पर सबसे छोटा रास्ता = जाल पर सीधी रेखा; $d^2 = a^2 + b^2$; सभी तरीके आज़माओ।
- रेखा के दृश्य f, t, s और वास्तविक लंबाई l: $f^2 + t^2 + s^2 = 2l^2$। समदूरिक: किनारे का प्रक्षेपण $a\sqrt{(2/3)} \approx 0.816a$।
- समांतर रेखाएँ समांतर रेखाओं में प्रक्षेपित होती हैं; समांतर चतुर्भुज का प्रक्षेपण समांतर चतुर्भुज।

चित्र, तालिकाएँ और फ्लोचार्ट



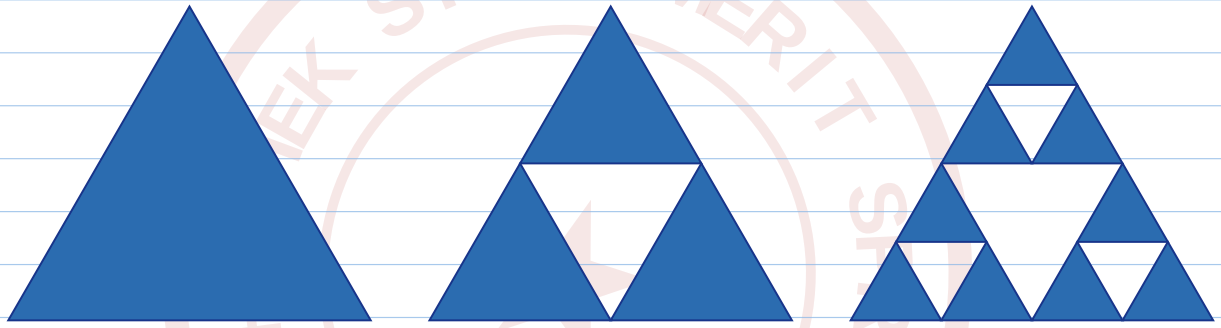
अवधारणा-मानचित्र

फ्रैक्टल



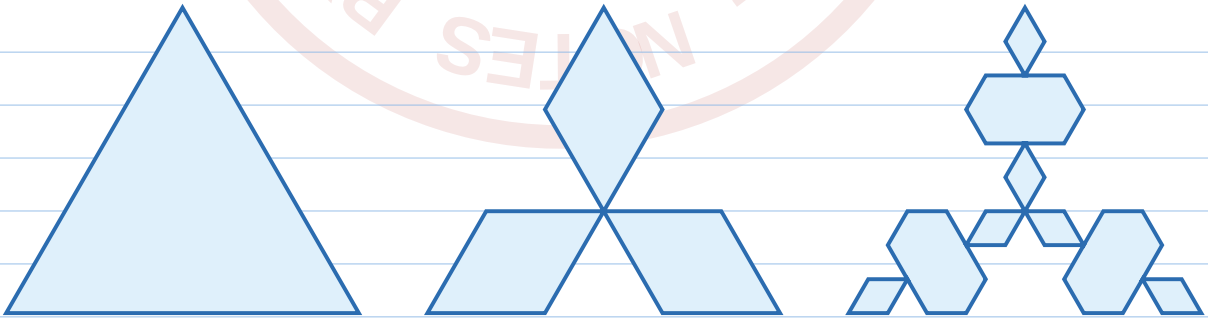
चरण 0 चरण 1 चरण 2

सिएरपिंस्की कालीन – चरण 0, 1, 2



चरण 0 चरण 1 चरण 2

सिएरपिंस्की गैस्केट – चरण 0, 1, 2



चरण 0 (3 भुजाएँ) चरण 1 (12 भुजाएँ) चरण 2 (48 भुजाएँ)

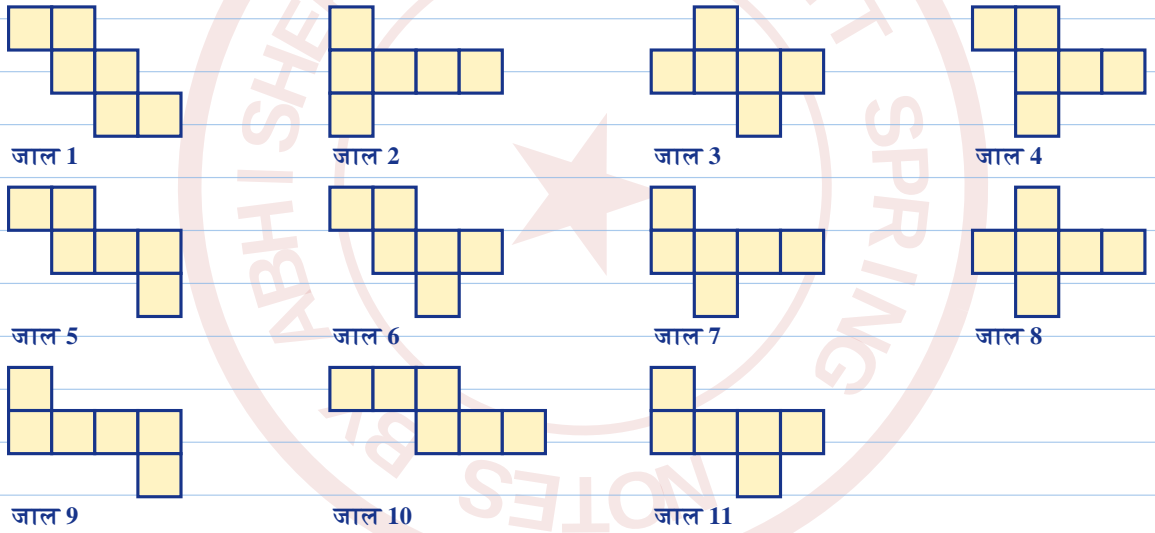
कोच स्नोफ्लेक – चरण 0, 1, 2

चरण n	कालीन : वर्ग R_n	कालीन : छेद H_n	गैस्केट : त्रिभुज	गैस्केट : छेद

0	1	0	1	0
1	8	1	3	1
2	64	1 + 8 = 9	9	1 + 3 = 4
3	512	1 + 8 + 64 = 73	27	1 + 3 + 9 = 13
n	8^n	$(8^n - 1)/7$	3^n	$(3^n - 1)/2$

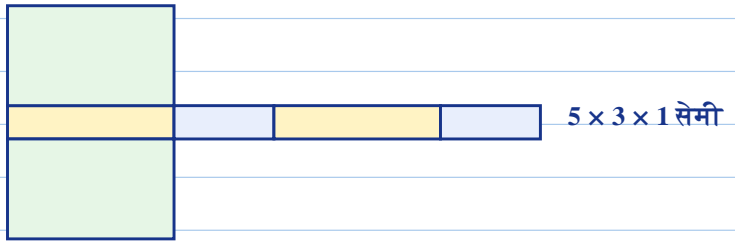
चरण n	कोच : भुजाएँ	भुजा की लंबाई	परिमाप
0	3	1	3
1	12	1/3	4
2	48	1/9	$16/3 \approx 5.33$
n	3×4^n	$(1/3)^n$	$3 \times (4/3)^n$

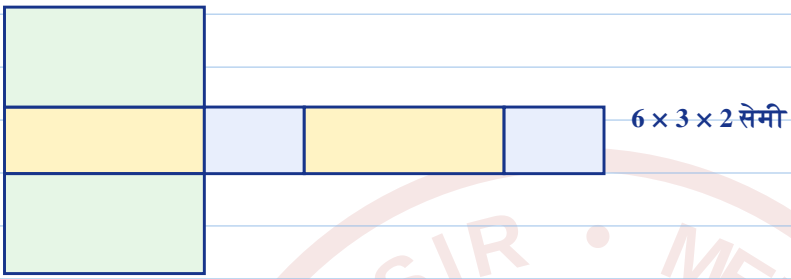
घन के सभी 11 जाल



घन के 11 जाल (घुमाने/पलटने से बने जाल एक ही गिने गए)

घनाभ के जाल (Figure it Out)



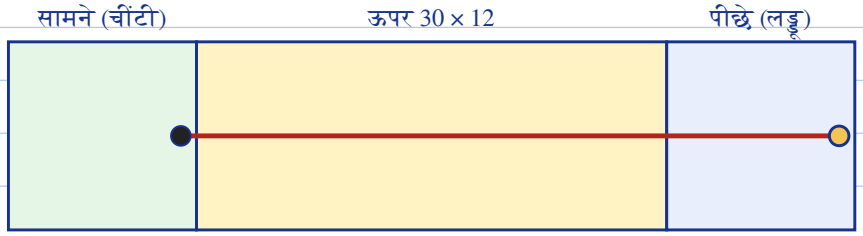


घनाभ के जाल : चार पार्श्व फलक एक पंक्ति में + ऊपर व नीचे का फलक

तालिका : फलक, किनारे, शीर्ष

ठोस	फलक F	किनारे E	शीर्ष V	V – E + F
घन / घनाभ	6	12	8	2
त्रिभुजाकार प्रिज़्म	5	9	6	2
प्रिज़्म, 10-भुजा सिरे	12	30	20	2
प्रिज़्म, n-भुजा सिरे	n + 2	3n	2n	2
वर्गाकार पिरामिड	5	8	5	2
चतुष्फलक	4	6	4	2
पिरामिड, 10-भुजा आधार	11	20	11	2
पिरामिड, n-भुजा आधार	n + 1	2n	n + 1	2
अष्टफलक	8	12	6	2

सबसे छोटा रास्ता : 12 × 12 × 30 के डिब्बे पर चींटी और लड्डू



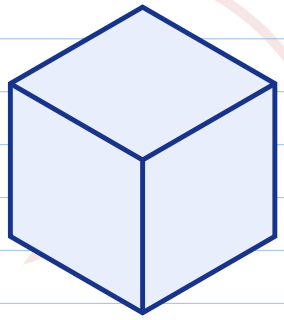
ऊपर से रास्ता : 1 + 30 + 11 = 42 सेमी

5 फलकों से सर्पिल रास्ता (24-32-40 त्रिभुज) = 40 सेमी ← सबसे छोटा

एक जाल से 42 सेमी ; 5-फलक वाले जाल से 40 सेमी

घन का आइसोमेट्रिक प्रक्षेपण

ऊँचाई ↑
लंबाई / गहराई ↗ ↖



सम षट्भुज :
केंद्र पर 3 किनारे मिलते हैं
प्रक्षेपित किनारा = a√(2/3)

कोने पर संतुलित घन का प्रक्षेपण सम षट्भुज

तालिका : सामान्य ठोसों के दृश्य (सीधे रखे हुए)

ठोस	सामने	ऊपर	बगल
घन	वर्ग	वर्ग	वर्ग
घनाभ	आयत	आयत	आयत
बेलन	आयत	वृत्त	आयत
शंकु	त्रिभुज	वृत्त (केंद्र सहित)	त्रिभुज
वर्गाकार पिरामिड	त्रिभुज	विकर्णों सहित वर्ग	त्रिभुज
त्रिभुजाकार प्रिज़्म (लेटा हुआ)	आयत	आयत	त्रिभुज
गोला	वृत्त	वृत्त	वृत्त

फ्लोचार्ट : घनाभ पर सबसे छोटा रास्ता

डिब्बे पर चींटी और लड्डू दिखाओ ➤ डिब्बे का जाल बनाओ ताकि दोनों जुड़े फलकों पर आएँ ➤ जाल पर दोनों को सीधी रेखा से जोड़ो ➤ $d^2 = a^2 + b^2$ से लंबाई निकालो ➤ सभी संभव जालों के लिए दोहराओ; सबसे छोटी लो

पाठ्यपुस्तक के चरण-दर-चरण हल

सिएरपिंस्की कालीन (पृ.71) : चरण 0–2 बनाओ; R_n और H_n ज्ञात करो।

उत्तर : बनाओ : चरण 0 : एक वर्ग। चरण 1 : 9 बराबर वर्ग करो, बीच का हटाओ (1 छेद, 8 वर्ग)। चरण 2 : 8 वर्गों में यही करो (8 और छेद, 64 वर्ग)।

R_n: हर शेष वर्ग अगले चरण में 8 वर्ग देता है ⇒ $R_{(n+1)} = 8R_n$, $R_0 = 1$ ⇒ $\mathbf{R_n = 8^n}$।

H_n: हर शेष वर्ग 1 नया छेद देता है, पुराने छेद रहते हैं ⇒ $H_{(n+1)} = H_n + R_n$, $H_0 = 0$ ⇒ $H_1 = 1$, $H_2 = 1 + 8 = 9$, $H_3 = 1 + 8 + 64 = 73$ ⇒ $\mathbf{H_n = 1 + 8 + \ldots + 8^{n-1} = (8^n - 1)/7}$।

गणित चर्चा (पृ.72) : दिखाओ कि समबाहु त्रिभुज के मध्य-बिंदु मिलाने से 4 सर्वसम समबाहु त्रिभुज बनते हैं।

उत्तर : चरण 1 : ABC समबाहु त्रिभुज, भुजा a; D, E, F क्रमशः AB, BC, CA के मध्य-बिंदु हैं।

चरण 2 : कोने वाला त्रिभुज ADF: AD = AF = a/2, अतः यह समद्विबाहु है जिसका शीर्ष कोण A = 60°।

चरण 3 : आधार कोण = (180° − 60°) ÷ 2 = 60° प्रत्येक ⇒ ADF **समबाहु** है, भुजा a/2, अतः DF = a/2। इसी प्रकार BDE और CEF भी समबाहु हैं (DE = EF = a/2)।

चरण 4 : बीच के त्रिभुज DEF में DE = EF = FD = a/2 ⇒ समबाहु।

चरण 5 : चारों त्रिभुजों की तीनों भुजाएँ a/2 ⇒ SSS से सर्वांगसम ⇒ 4 सर्वसम समबाहु त्रिभुज ✓।

Figure it Out (पृ.72) प्र.1–प्र.3 : सिएरपिंस्की त्रिभुज – (1) चरण 0–2 बनाओ; (2) हर चरण पर छेद व त्रिभुजों की संख्या; (3) दोनों सिएरपिंस्की फ्रैक्टलों में चरण n पर शेष क्षेत्रफल (प्रारंभिक क्षेत्रफल 1)।

उत्तर : प्र.1 (बनाओ) : चरण 0 : एक त्रिभुज। चरण 1 : मध्य-बिंदु मिलाओ, बीच का त्रिभुज हटाओ (3 त्रिभुज शेष)। चरण 2 : 3 में से हर एक में यही करो (9 त्रिभुज शेष)।

प्र.2 : शेष त्रिभुज : 1, 3, 9, 27 … = $\mathbf{3^n}$ (हर एक 3 देता है)। छेद : हर शेष त्रिभुज 1 नया छेद देता है ⇒ $H_{n+1} = H_n + 3^n$ ⇒ 0, 1, 1 + 3 = 4, 1 + 3 + 9 = 13 … ⇒ $\mathbf{H_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2}$।

प्र.3 – गैस्केट : 4 छोटे त्रिभुजों का क्षेत्रफल बराबर है, 3 बचते हैं ⇒ हर चरण पर क्षेत्रफल × 3/4 ⇒ $\mathbf{(3/4)^n}$ (1, 3/4, 9/16, 27/64 …)।

कालीन : 9 बराबर वर्गों में से 8 बचते हैं ⇒ हर चरण पर क्षेत्रफल × 8/9 ⇒ $(8/9)^n$ (1, 8/9, 64/81 …)।

Figure it Out (पृ.73) प्र.1–प्र.3 : कोच स्नोफ्लेक – (1) चरण 0–2 बनाओ ; (2) चरण n पर भुजाओं की संख्या ; (3) यदि प्रारंभिक त्रिभुज की भुजा 1 हो तो चरण n पर परिमाप।

उत्तर : प्र.1 (बनाओ) : चरण 0 : समबाहु त्रिभुज। चरण 1 : हर भुजा को 3 भागों में बाँटो, बीच वाले तिहाई पर छोटा समबाहु त्रिभुज उठाओ और उसका आधार हटाओ ⇒ 6 नोकों वाला तारा। चरण 2 : हर नई भुजा पर दोहराओ।

प्र.2 : हर भुजा 4 भुजाओं से बदलती है (दो बाहरी तिहाई + उभार की दो भुजाएँ) ⇒ भुजाएँ : 3, 12, 48 … ⇒ $\mathbf{3 \times 4^n}$।

प्र.3 : हर नई भुजा पुरानी का 1/3 है ⇒ चरण n पर भुजा = $(1/3)^n$।

परिमाप = भुजाएँ × भुजा = $3 \times 4^n \times (1/3)^n = \mathbf{3 \times (4/3)^n}$: 3, 4, 16/3 ≈ 5.33, 64/9 ≈ 7.1 … (यह बिना सीमा के बढ़ता है)।

कल्पना करो (पृ.75–77) प्र.1–प्र.12।

उत्तर : प्र.1 : अपना नाम कल्पना में देखकर उल्टा पढ़ो (व्यक्तिगत गतिविधि ; कोई निश्चित उत्तर नहीं)।

प्र.2 : वर्ग के चारों कोने आसन्न किनारों के मध्य-बिंदुओं के बीच काटने पर **तिरछा वर्ग** बचता है जिसका क्षेत्रफल **आधा** है। चारों कोनों के समकोण त्रिभुजों को समकोण वाले कोने एक बिंदु पर मिलाकर वर्ग बनता है, उसका क्षेत्रफल भी आधा।

प्र.3 : समबाहु त्रिभुज के कोने तिहाई पर काटने से **सम षट्भुज** बनता है (6 बराबर भुजाएँ = 1/3, सब कोण 120°)।

प्र.4 : वर्ग के कोने तिहाई पर काटने से **अष्टभुज** बनता है (8 भुजाएँ : 4 की लंबाई 1/3 और 4 तिरछी $\sqrt{2}/3$; सम नहीं)।

प्र.5 : वर्गाकार रूपरेखा : **घन** (किसी भी फलक से) या घनाभ / बेलन जिसकी ऊँचाई = व्यास, बगल से।

प्र.6 : वृत्ताकार रूपरेखा : **गोला** (हर दिशा से), ऊपर से बेलन, नीचे से शंकु।

प्र.7 : त्रिभुजाकार रूपरेखा : बगल से **शंकु** या **पिरामिड**, सिरे से त्रिभुजाकार प्रिज़्म।

प्र.8 : आयत + वृत्त : **बेलन** (बगल से आयत, ऊपर से वृत्त)।

प्र.9 : वृत्त + त्रिभुज : **शंकु** (ऊपर से वृत्त, बगल से त्रिभुज)।

प्र.10 : आयत + त्रिभुज : **त्रिभुजाकार प्रिज़्म** (बगल से आयत, सिरे से त्रिभुज)।

प्र.11 : समलंब + वृत्त : **शंकु का छिन्नक** (बगल से समलंब, ऊपर से वृत्त)।

प्र.12 : पंचभुज + आयत : **पंचभुजाकार प्रिज़्म** (सिरे से पंचभुज, बगल से आयत)।

अद्वितीय ? नहीं – कई ठोस संभव हैं, जैसे प्र.10 में कोई भी तंबू/वेज जैसा आकार।

पाठ के प्रश्न (पृ.79) : प्रिज़्म के सिरे 10 भुजाओं वाले दो सर्वांगसम बहुभुज हों तो फलक, किनारे,

शीर्ष कितने ? n भुजाओं का ? 10-भुजा आधार वाले पिरामिड का ? n-भुजा आधार का ?

उत्तर : प्रिज़्म, 10-भुजा सिरे : फलक = 10 पार्श्व + 2 सिरे = **12**। किनारे = 10 + 10 (दोनों सिरे) + 10 (जोड़ने वाले) = **30**। शीर्ष = 10 + 10 = **20**।

n-भुजा प्रिज़्म : फलक = **n + 2**; किनारे = n + n + n = **3n**; शीर्ष = **2n**।

पिरामिड, 10-भुजा आधार : फलक = 10 त्रिभुज + 1 आधार = **11**। किनारे = 10 (आधार) + 10 (शीर्ष तक) = **20**। शीर्ष = 10 + 1 = **11**।

n-भुजा पिरामिड : फलक = **n + 1**; किनारे = **2n**; शीर्ष = **n + 1**।

जाँच (यूलर) : V − E + F: 20 − 30 + 12 = 2 ✓; 11 − 20 + 11 = 2 ✓।

Figure it Out (पृ.80–81) प्र.1 : छह आकृतियों में से कौन-सी घन के जाल हैं ? प्र.2 : घन के सभी 11 जाल ज्ञात करो। प्र.3 : घनाभ का जाल बनाओ, भुजाएँ (i) 5, 3, 1 सेमी (ii) 6, 3, 2 सेमी।

उत्तर : प्र.1 – परीक्षण : घन के जाल में 6 वर्ग हों और मोड़ने पर कोई दो वर्ग एक ही फलक पर न आएँ। सही जालों के पंक्ति-रूप : 1-4-1, 2-3-1, 2-2-2, 3-3।

(i) पंक्तियाँ 2 + 4 (मोड़ने पर वर्ग टकराते हैं) ⇒ **जाल नहीं ✗**।

(ii) पंक्तियाँ 3 + 3 (दो खाने खिसकी हुई) ⇒ **जाल ✓**।

(iii) सीढ़ी 2-2-2 ⇒ **जाल ✓**।

(iv) 1-4-1 (4 की पंक्ति के ऊपर एक, नीचे एक) ⇒ **जाल ✓**।

(v) 4 की पंक्ति और दोनों अतिरिक्त वर्ग **एक ही ओर** लटके ⇒ टकराते हैं ⇒ **जाल नहीं ✗**।

(vi) 1-4-1 (ऊपर एक, नीचे एक) ⇒ **जाल ✓**।

जाल : (ii), (iii), (iv), (vi)।

प्र.2 : 11 जालों का चित्र देखो (1-4-1 के 6, 2-3-1 के 3, 2-2-2 का 1, 3-3 का 1)।

प्र.3 : घनाभ जाल के चित्र देखो : चार पार्श्व फलकों (a, b, a, b) की पंक्ति और एक लंबे फलक से जुड़े ऊपर-नीचे के फलक। (i) पार्श्व फलक 5 × 1, 3 × 1, 5 × 1, 3 × 1 ; ऊपर-नीचे 5 × 3। क्षेत्रफल जाँच : 2(15 + 5 + 3) = 46 सेमी^{2}। (ii) पार्श्व फलक 6 × 2, 3 × 2, 6 × 2, 3 × 2 ; ऊपर-नीचे 6 × 3। क्षेत्रफल जाँच : 2(18 + 12 + 6) = 72 सेमी^{2}।

पाठ के प्रश्न (पृ.81–84) : सम चतुष्फलक के जाल ; वर्गाकार पिरामिड का जाल ; बेलन, शंकु, त्रिभुजाकार प्रिज़्म, अष्टफलक, गोला।

उत्तर : चतुष्फलक की आकृतियाँ : (1) 4 में बँटा बड़ा त्रिभुज ⇒ **जाल ✓**; (2) एक पंक्ति में 3 त्रिभुज + सिरे वाले के नीचे 1 – चारों त्रिभुज एक शीर्ष पर मिलते हैं, मोड़ने पर टकराते हैं ⇒ **जाल नहीं ✗**; (3) 4 त्रिभुजों की पट्टी ⇒ **जाल ✓**; (4) में **5** त्रिभुज हैं ⇒ **जाल नहीं ✗**। (सम चतुष्फलक के केवल 2 जाल हैं : 'बड़ा त्रिभुज' और '4 की पट्टी'।)

सम चतुष्फलक का जाल : 5 सेमी भुजा के 4 समबाहु त्रिभुज बड़े त्रिभुज की तरह बनाओ (बीच वाले के चारों ओर 3)। **वर्गाकार पिरामिड का जाल :** 4 सेमी का वर्ग और उसकी हर भुजा पर समद्विबाहु त्रिभुज (आधार 4 सेमी, ऊँचाई जैसे 5 सेमी)।

बेलन : आयत जिसकी भुजाएँ ऊँचाई h और परिधि 2πr, साथ में त्रिज्या r के दो वृत्त।

शंकु : वृत्त का त्रिज्यखंड (केंद्र O = शीर्ष, त्रिज्या = तिर्यक ऊँचाई l); सीमा के सब बिंदु O से l दूरी पर। यदि O सीमा-वक्र का केंद्र **नहीं** है तो **तिरछे (तिर्यक) शंकु जैसी** सतह बनेगी, सीधा शंकु नहीं।

त्रिभुजाकार प्रिज़्म : जैसे त्रिभुज 3-4-5 सेमी और लंबाई 6 सेमी ⇒ आयत 3 × 6, 4 × 6, 5 × 6 साथ-साथ और एक आयत के दोनों सिरों पर एक-एक त्रिभुज।

अष्टफलक : दिए जाल में 8 समबाहु त्रिभुज; कुल 11 जाल।

गोला : जाल नहीं – कागज़ गेंद पर बिना सिलवट, खाली जगह या ओवरलैप के नहीं लपेटा जा सकता।

सबसे छोटे रास्ते (पृ.84–87) : (a) चींटी बगल के फलक के केंद्र पर, लड्डू ऊपरी फलक के केंद्र पर; लड्डू किनारे के केंद्र पर; (b) 4 × 8 × 4 सेमी घनाभ; (c) करके देखो – 12 × 12 × 30 सेमी का डिब्बा, चींटी और लड्डू।

उत्तर : (a) जाल ऐसे बनाओ कि बगल का फलक और ऊपरी फलक साझा किनारे पर जुड़ें। सबसे छोटा रास्ता जाल पर दोनों केंद्रों को जोड़ने वाली **सीधी रेखा** है – यह बगल के फलक पर साझा किनारे तक जाकर ऊपर के फलक पर सीधी जाती है। जब लड्डू किनारे के केंद्र पर हो तो जाल ऐसे बनाओ कि चींटी का फलक और लड्डू का फलक जुड़ें; उनके बीच की सीधी रेखा सबसे छोटी है; जाल पर मुड़ा रास्ता अधिक लंबा होता है।

(b) (4 × 8 × 4 सेमी डिब्बा; चींटी सिरे वाले फलक के केंद्र पर, लड्डू लंबे फलक पर सिरे से 2 सेमी दूर)। सिरे वाला फलक लड्डू वाले फलक के **बगल** में खोलो (दूसरा जाल)। क्षैतिज दूरी = 2 + 2 = 4 सेमी, ऊर्ध्वाधर दूरी = 2 सेमी ⇒ $d^2 = 4^2 + 2^2 = 20$ ⇒ **$d = \sqrt{20} \approx 4.5$ सेमी** (चित्र से पढ़ा)।

(c) जाल 1 (ऊपर से): 1 + 30 + 11 = **42 सेमी**। जाल 2 (5 फलकों से): सीधा रेखाखंड 24 और 32 भुजाओं वाला समकोण त्रिभुज बनाता है ⇒ $d^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600$ ⇒ d = **40 सेमी**। सबसे छोटा = **40 सेमी** (42 सेमी से कम)।

गणित चर्चा (पृ.89) : प्रक्षेपित रेखा की लंबाई; वर्ग, समांतर चतुर्भुज, n-भुजा सम बहुभुज के प्रक्षेपण; घन और शंकु के प्रक्षेपण; शंकु जैसा ही प्रक्षेपण देने वाली दूसरी वस्तु।

उत्तर : रेखा : चित्र 4.3 में AE ⊥ BC और AECD आयत है, अतः AE = DC = p। समकोण त्रिभुज AEB में कर्ण AB = l और AE = p एक भुजा है ⇒ **$p \le l$**। बराबर तभी जब रेखा समतल के **समांतर** हो (तब कोण = 0)।

वर्ग : झुकाव के अनुसार प्रक्षेपण **वर्ग**, **आयत**, **समांतर चतुर्भुज** या केवल **रेखाखंड** (किनारे की ओर से) हो सकता है।

समांतर चतुर्भुज : समांतर रेखाओं का प्रक्षेपण समांतर रहता है, इसलिए समांतर चतुर्भुज का प्रक्षेपण सदा **समांतर चतुर्भुज** (या रेखाखंड) होगा – समांतर चतुर्भुज से भिन्न चतुर्भुज **कभी नहीं**।

सम n-बहुभुज : प्रक्षेपण उसकी भुजाओं के प्रक्षेपणों से बनता है, अतः **n-भुजा बहुभुज** (खिंचा/

सिकुड़ा, या किनारे से देखने पर रेखाखंड); सम n के लिए सम्मुख भुजाएँ समांतर रहती हैं।

घन : वर्ग, आयत या (कोने की ओर से) **षट्भुज**; **शंकु :** त्रिभुज (बगल से) या वृत्त (आधार की ओर से)।

शंकु जैसा प्रक्षेपण (सामने का दृश्य) : त्रिभुजाकार प्रिज़्म, त्रिभुजाकार पिरामिड या समतल त्रिभुजाकार पट्टी भी त्रिभुज देती है।

Figure it Out (पृ.92) प्र.1–प्र.2 : (1) रेखा के तीनों दृश्यों की लंबाइयों में संबंध; (2) घन, घनाभ, समांतर षट्फलक, बेलन, शंकु, प्रिज़्म, पिरामिड के सामने, ऊपर और बगल के दृश्य।

उत्तर : प्र.1 : रेखा को (dx, dy, dz) के अनुदिश लो, वास्तविक लंबाई l, $l^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$। सामने का दृश्य $f = \sqrt{(dx^2 + dz^2)}$; ऊपर $t = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$; बगल $s = \sqrt{(dy^2 + dz^2)}$। जोड़ने पर: $f^2 + t^2 + s^2 = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2) = \mathbf{2l^2}$। साथ ही हर दृश्य l से **अधिक नहीं** होता और जिस समतल के समांतर रेखा हो वहाँ बराबर।

प्र.2 : (दृश्यों की तालिका देखो) सीधे रखे ठोस : घन – वर्ग, वर्ग, वर्ग; घनाभ – आयत, आयत, आयत; समांतर षट्फलक – समांतर चतुर्भुज/आयत (झुकाव के अनुसार); बेलन – आयत, वृत्त, आयत; शंकु – त्रिभुज, केंद्र सहित वृत्त, त्रिभुज; त्रिभुजाकार प्रिज़्म (आयताकार फलक पर लेटा) – आयत, आयत, त्रिभुज; वर्गाकार पिरामिड – त्रिभुज, विकर्णों सहित वर्ग, त्रिभुज।

Figure it Out (पृ.93) प्र.3 : हर वस्तु का उसके प्रक्षेपणों (सामने, ऊपर, बगल) से मिलान करो।

उत्तर : तीनों चित्रों (सामने, ऊपर, बगल) की तुलना हर वस्तु के उसी दिशा के आकार से करो। पृष्ठ पर ऊपर से क्रम में वस्तुएँ, प्रक्षेपणों की **पंक्ति संख्या** (ऊपर से गिनी) के साथ:
जग → पंक्ति 8; कीप (फ़नल) → पंक्ति 6; हथौड़ा → पंक्ति 7; कार → पंक्ति 1; डिब्बे सहित ढलान → पंक्ति 3; कुर्सी → पंक्ति 4; छत का पंखा → पंक्ति 5; ढक्कन वाला पतीला → पंक्ति 2।

(संकेत : कार का ऊपरी दृश्य लंबा आयत है; कीप सामने व बगल से त्रिभुज और ऊपर से वृत्त दिखती है; पंखे के ऊपरी दृश्य में तीन पंखुड़ियाँ हैं; जग के ऊपरी दृश्य में टोंटी और हत्था दिखता है।)

करके देखो (पृ.94) : छाया – टॉर्च हटाने पर छाया का आकार कैसे बदलता है; दूर की टॉर्च (सूर्य) प्रक्षेपण क्यों देती है; समांतर चतुर्भुज का प्रक्षेपण।

उत्तर : आकार : टॉर्च वस्तु के **पास** हो तो छाया **बड़ी** होती है; टॉर्च दूर ले जाने पर छाया छोटी होती है। **क्यों :** टॉर्च से प्रकाश किरणें फैलती हैं (शंकु की तरह), इसलिए समरूप त्रिभुजों से टॉर्च पास हो तो छाया बड़ी होती है।

दूर की टॉर्च : टॉर्च बहुत दूर हो तो किरणें लगभग **समांतर** और दीवार पर लंब हो जाती हैं, अत: छाया का आकार प्रक्षेपण जैसा ही होता है। सूर्य ऐसा ही दूर का प्रकाश है।

समांतर चतुर्भुज : उसकी छाया सदा **समांतर चतुर्भुज** रहती है – समांतर रेखाओं का प्रक्षेपण समांतर रहता है।

Figure it Out (पृ.95) प्र.1 : समान घनों के छह ढेरों के ऊपर, सामने और बगल के दृश्य बनाओ।

उत्तर : विधि : हर स्तंभ और हर पंक्ति के घन गिनो ; **ऊपर का दृश्य** आधार की रूपरेखा दिखाता है (हर स्तंभ पर एक वर्ग), **सामने का दृश्य** सामने से हर स्तंभ की अधिकतम ऊँचाई, **बगल का दृश्य** बगल से हर स्तंभ की अधिकतम ऊँचाई। चित्रों पर यह लगाने पर :

ढेर 1 (3 घन, L-आकार) : ऊपर से 3 वर्गों का L-आकार ; सामने 2 × 1 आयत ; बगल 2 × 1 आयत।

ढेर 3 (4 घन) : 3 घनों की पंक्ति और बाएँ सिरे के आगे 1 घन : ऊपर से 4 वर्गों का L-आकार (3 की पंक्ति + 1) ; सामने 3 × 1 आयत ; बगल 2 × 1 आयत।

ढेर 5 (4 घन, T) : 3 घनों का स्तंभ और बीच वाले के दाएँ 1 घन : सामने '⊢' (लेटा T) जिसमें 4 वर्ग ; ऊपर 2 × 1 आयत ; बगल 1 × 3 आयत।

ढेर 2, 4, 6 ऊँचे संयोजन हैं ; यही विधि लगाओ – पहले हर स्तंभ की ऊँचाई पढ़ो, फिर तीन दृश्य बनाओ। (असली घनों से जाँचो।)

Figure it Out (पृ.95) प्र.2 (गणित चर्चा) : आठ समान घन चिपकाकर अक्षर बनाओ – बगल और ऊपर से दृश्य ; अलग-अलग दिशा से दिए अक्षरों जैसे आकार बनाओ ; अन्य अक्षर-संयोजन।

उत्तर : विचार : घनों की एक परत से बना अक्षर **एक घन मोटा** होता है। सामने से वह अक्षर दिखता है ; **बगल** से केवल **ऊर्ध्वाधर पट्टी** (1 घन चौड़ी, अक्षर जितनी ऊँची) ; **ऊपर** से **क्षैतिज पट्टी** (अक्षर जितनी चौड़ी, 1 घन गहरी)।

(ii)–(iv) : सामने से एक अक्षर और ऊपर से दूसरा अक्षर पाने के लिए जहाँ दोनों दृश्यों को वर्ग चाहिए वहाँ (गहराई की दिशा में) घन जोड़ो, और जहाँ किसी दृश्य में खाली जगह चाहिए वहाँ के घन हटाओ। हर दृश्य दूसरों को ढककर जाँचो। अक्षरों के अलग-अलग संयोजन संभव हैं (जैसे सामने से 'L' और ऊपर से 'I')।

(अक्षर पुस्तक में छोटे चित्र रूप में छपे हैं ; यह नमूना विधि है, निश्चित उत्तर नहीं।)

Figure it Out (पृ.96) प्र.3 : (i)–(vii) में कौन-सा ठोस दिए सामने, ऊपर और बगल के दृश्यों के अनुरूप है ?

उत्तर : तीनों दृश्य पढ़ो : सामने का दृश्य : दो स्तंभ – बायाँ 3 वर्ग ऊँचा, दायाँ 2 वर्ग ऊँचा। ऊपर का दृश्य : 3 पंक्तियाँ × 2 स्तंभ जिसमें आगे-दाएँ का कोने वाला वर्ग गायब (5 वर्ग)। बगल का दृश्य : ऊँचाइयाँ 1, 1, 3।

बनाओ : पीछे की ऊँची पंक्ति में ऊँचाइयाँ 3 और 2 ; अगली पंक्ति में ऊँचाई 1 के 2 घन ; सबसे आगे की पंक्ति में केवल बायाँ घन (ऊँचाई 1) ⇒ 5 + 2 + 1 = **8 घन**।

मिलान : पीछे ऊँची सीढ़ीनुमा दीवार (ऊँचाइयाँ 3 और 2) और नीचे आगे की पट्टी जिसमें आगे-दायाँ घन नहीं हो – ऐसा ठोस **(ii)** है।

(चित्र-मिलान – चित्र से पढ़ा ; असली घनों से जाँच कर लो।)

Figure it Out (पृ.96) प्र.4 : समान घनों से ऐसा ठोस बनाओ जिसके दिए प्रक्षेपण हों : (i)–(iii),

(iv)–(vi), (vii)–(ix) (ऊपर, सामने, बगल)।

उत्तर: हर स्थिति में घनों की ऊँचाई तय करो। **बगल के दृश्य** से देखो कौन-सी पंक्ति ऊँची है, **सामने के दृश्य** से स्तंभों की ऊँचाई, और **ऊपर के दृश्य** से कि किन स्थानों पर घन हैं। (पंक्तियाँ: पीछे A, बीच में B, आगे C; स्तंभ बाएँ से दाएँ।)

ठोस 1 (i, ii, iii): ऊपर का दृश्य: A में स्तंभ 2, 3 पर घन; B में 1, 2, 3 पर; C में 1 और 3 पर। सामने की ऊँचाइयाँ 1, 2, 2; बगल की ऊँचाइयाँ 1, 1, 2 ⇒ ऊँची पंक्ति A: **A = (–, 2, 2), B = (1, 1, 1), C = (1, –, 1) ⇒ 9 घन**।

ठोस 2 (iv, v, vi): ऊपर: A और B में 2-2 घन, C में केवल बायाँ; सामने की ऊँचाइयाँ 2, 2; बगल 1, 1, 2 ⇒ **A = (2, 2), B = (1, 1), C = (1, –) ⇒ 7 घन**।

ठोस 3 (vii, viii, ix): ऊपर का दृश्य ठोस 2 जैसा; सामने की ऊँचाइयाँ 2, 3; बगल 1, 1, 3 ⇒ **A = (2, 3), B = (1, 1), C = (1, –) ⇒ 8 घन**।

(ऊँची पंक्ति का सिरे पर होना आवश्यक है, इसलिए समान दृश्यों वाली अन्य व्यवस्था संभव नहीं।)

Figure it Out (पृ.97) प्र.5–प्र.6: (5) समान घनों के ढेर में घनों की संख्या ज्ञात करो। (6) घन का प्रक्षेपण कौन-कौन-से आकार बना सकता है?

उत्तर: प्र.5: ढेर सीढ़ीनुमा पिरामिड है; चित्र में 10 स्तंभों के शीर्ष दिखते हैं (पंक्तियों में 1, 2, 3, 4)। उनकी ऊँचाइयाँ 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1, 1 हैं (शीर्ष पर सबसे ऊँचा, किनारों की ओर छोटे) ⇒ कुल = 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 = **20 घन**।

प्र.6: वर्ग (फलक के सामने से), **आयत** (एक किनारे के गिर्द झुकाने पर), **समांतर चतुर्भुज** या अन्य **षट्भुज** (सामान्य झुकाव पर), और घन कोने पर खड़ा हो तो **सम षट्भुज** (समदूरिक)। यह त्रिभुज या वृत्त कभी नहीं हो सकता।

गणित चर्चा (पृ.97): घन को एक कोने पर संतुलित करो। सभी प्रक्षेपित किनारे बराबर क्यों हैं?

उत्तर: चरण 1: घन को एक शीर्ष पर खड़ा करो ताकि उस शीर्ष से जाने वाला **विकर्ण** ऊर्ध्वाधर हो।

चरण 2: ऊपरी शीर्ष पर मिलने वाले तीनों किनारे इस ऊर्ध्वाधर विकर्ण के गिर्द **पूर्णतः सममित** हैं – हर एक इससे **समान कोण** θ बनाता है ($\cos\theta = a/(a\sqrt{3}) = 1/\sqrt{3}$, $\theta \approx 54.7°$)।

चरण 3: किनारे का फ़र्श पर प्रक्षेपण = $a \times \sin\theta = a\sqrt{(2/3)} \approx 0.816a$ – तीनों किनारों के लिए समान (और बाकी किनारे इन्हीं के समांतर हैं)।

अतः सभी प्रक्षेपित किनारे बराबर हैं और रूपरेखा **सम षट्भुज** है।

Figure it Out (पृ.100–102): (1) 4 घनों को जोड़ने के अन्य तरीके (5 टेट्रिस आकृतियों के अतिरिक्त); (2) आइसोमेट्रिक ग्रिड पर आकृतियाँ बनाओ; (3) गेंद का अजीब रास्ता; (4) असंभव त्रिभुज।

उत्तर: प्र.1: हाँ। चित्र 4.8 की 5 आकृतियाँ समतल हैं। घनों से **3 और** आकृतियाँ हैं जो समतल नहीं हैं: (a) **कोना/तिपाई** – एक घन जिससे तीन और घन तीन अलग दिशाओं में जुड़े हों (कमरे

के कोने जैसा); (b) और (c) दो **ऐंठी हुई (पेंच जैसी)** आकृतियाँ, एक बाएँ-हाथ की और एक दाएँ-हाथ की (दर्पण-प्रतिबिंब)। अत: कुल **8** टेट्रा-घन ठोस हैं।

प्र.2 (विधि): आइसोमेट्रिक ग्रिड पर किनारा-दर-किनारा बनाओ: ऊँचाई के लिए **ऊर्ध्वाधर रेखाएँ**, लंबाई और गहराई के लिए दो **तिरछी दिशाएँ**। हर किनारे की इकाइयाँ गिनो, तय करो कि वह ऊपर/नीचे या बाएँ/दाएँ जाता है, और ग्रिड की दिशा (या उसकी विपरीत) में खींचो। पहले हल्की रेखाएँ खींचो, फिर दिखने वाली को गहरा करो।

प्र.3: तीर दिखाते हैं कि गेंद हमेशा **ढलान पर नीचे** लुढ़कती है, फिर भी रास्ता **बंद चक्र** में घूमकर शुरुआती ऊँचाई पर लौट आता है – यह असली ठोस में असंभव है (पेनरोज़ सीढ़ी की तरह)। इसे बनाने के लिए भौतिक रूप से संभव भाग को 3 अक्षों से बनाओ और चित्र में सिरे जोड़ दो।

प्र.4 (i): नहीं – असंभव त्रिभुज असली घनों से नहीं बन सकता। हर भुजा ठीक दिखती है पर तीनों भुजाएँ कोनों पर अंतरिक्ष में मिल नहीं सकतीं; उसके दृश्य मेल नहीं खाएँगे। **(ii)** तीनों भुजाओं को तीन अक्षों में से एक-एक के अनुदिश ग्रिड पर ऐसे बनाओ कि चित्र में कोने जुड़ जाएँ। **(iii)** भ्रम इसलिए काम करता है कि आइसोमेट्रिक कागज़ पर तीन दिशाएँ (ऊँचाई, लंबाई, गहराई) तीन रेखा-वर्गों के रूप में खींची जाती हैं; हमारी आँख मान लेती है कि चित्र में मिलने वाली रेखाएँ अंतरिक्ष में भी मिलती हैं, जबकि यहाँ सिरे अलग-अलग गहराई पर हैं।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 1 अंक

1. फ्रैक्टल क्या है? (1)

उत्तर: स्व-समरूप आकृति जो छोटे पैमानों पर वही पैटर्न दोहराती है।

2. सिएरपिंस्की कालीन के चरण n पर कितने वर्ग बचते हैं? (1)

उत्तर: 8^n।

3. सिएरपिंस्की गैस्केट के चरण 3 पर कितने त्रिभुज बचते हैं? (1)

उत्तर: $3^3 = 27$।

4. कोच स्नोफ्लेक के चरण 2 पर कितनी भुजाएँ होती हैं? (1)

उत्तर: $3 \times 4^2 = 48$।

5. घन के फलक, किनारे और शीर्ष? (1)

उत्तर: 6, 12, 8।

6. घन के कितने जाल होते हैं? (1)

उत्तर: 11।

7. सम चतुष्फलक के कितने जाल होते हैं? (1)

उत्तर: 2।

8. किस ठोस का जाल नहीं होता? (1)

उत्तर: गोला।

9. प्रिज़्म के दो सिरों के अलावा फलक कैसे होते हैं? (1)

उत्तर: समांतर चतुर्भुज (सीधे प्रिज़्म में आयत)।

10. 'आइसोमेट्रिक' का क्या अर्थ है? (1)

उत्तर: बराबर माप।

11. घन का समदूरिक प्रक्षेपण किस आकार का होता है? (1)

उत्तर: सम षट्भुज।

12. क्या समांतर रेखाओं के प्रक्षेपण समांतर रहते हैं? (1)

उत्तर: हाँ।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 3 अंक

1. एक प्रिज़्म के सिरे दो सर्वांगसम 8-भुजा बहुभुज हैं। उसके फलक, किनारे, शीर्ष ज्ञात करो और यूलर सूत्र जाँचो। (3)

उत्तर: फलक = 8 + 2 = 10; किनारे = 3 × 8 = 24; शीर्ष = 2 × 8 = 16। V − E + F = 16 − 24 + 10 = 2 ✓।

2. सिएरपिंस्की कालीन के चरण 3 पर वर्गों और छेदों की संख्या ज्ञात करो। (3)

उत्तर: वर्ग $R_3 = 8^3 = 512$। छेद $H_3 = 1 + 8 + 64 = 73$ (या $(8^3 - 1)/7 = 511/7 = 73$)।

3. कोच स्नोफ्लेक भुजा 1 वाले त्रिभुज से शुरू होता है। चरण 2 पर भुजाओं की संख्या और परिमाप ज्ञात करो। (3)

उत्तर: भुजाएँ = $3 \times 4^2 = 48$। हर भुजा = $(1/3)^2 = 1/9$। परिमाप = $48 \times 1/9 = 16/3 \approx 5.33$।

4. 4 सेमी × 3 सेमी × 2 सेमी के घनाभ का जाल (वर्णन) बनाओ और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करो। (3)

उत्तर: जाल: चार पार्श्व फलकों 4 × 2, 3 × 2, 4 × 2, 3 × 2 की पंक्ति और 4 सेमी वाले फलक से जुड़े 4 × 3 के ऊपर-नीचे के फलक। पृष्ठीय क्षेत्रफल = 2(4×3 + 4×2 + 3×2) = 2(12 + 8 + 6) = 52 सेमी^{2}।

5. वह ठोस बताओ जिसका सामने का दृश्य आयत, ऊपर का दृश्य आयत और बगल का दृश्य त्रिभुज हो। (3)

उत्तर: आयताकार फलक पर लेटा त्रिभुजाकार प्रिज़्म: सामने और ऊपर के दृश्य आयत हैं; सिरे (बगल) का दृश्य त्रिभुज है।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 5 अंक

1. सिएरपिंस्की गैस्केट के लिए चरण n पर (i) शेष त्रिभुज, (ii) छेद, (iii) शेष क्षेत्रफल (प्रारंभिक क्षेत्रफल 1) ज्ञात करो और n = 3 के लिए मान निकालो। (5)

उत्तर: (i) हर त्रिभुज 3 देता है ⇒ $T_n = 3^n$; $T_3 = 27$।

(ii) हर शेष त्रिभुज 1 छेद जोड़ता है ⇒ $H_n = 1 + 3 + \ldots + 3^{n-1} = (3^n - 1)/2$; $H_3 = (27 - 1)/2$

= 13।

(iii) 4 बराबर छोटे त्रिभुजों में से 3 बचते हैं ⇒ हर चरण पर क्षेत्रफल × 3/4 ⇒ $A_n = (3/4)^n$; $A_3 = 27/64$।

उत्तर: 27 त्रिभुज, 13 छेद, क्षेत्रफल 27/64।

2. एक डिब्बा 12 सेमी × 12 सेमी × 30 सेमी का है। सामने के फलक पर बीच में ऊपरी किनारे से 1 सेमी नीचे चींटी है; पीछे के फलक पर बीच में निचले किनारे से 1 सेमी ऊपर लड्डू है। ऊपर से जाने वाले रास्ते की लंबाई ज्ञात करो और 40 सेमी के सर्पिल रास्ते से तुलना करो। (5)

उत्तर: चरण 1: सामने, ऊपर और पीछे के फलक एक पंक्ति में खोलो।

चरण 2: चींटी सामने के फलक के ऊपरी किनारे से 1 सेमी नीचे है; ऊपरी फलक पार करने में 30 सेमी; लड्डू पीछे के फलक के ऊपरी किनारे से 12 − 1 = 11 सेमी नीचे है।

चरण 3: दोनों बीच में हैं (क्षैतिज स्थिति समान), अतः जाल में सीधी रेखा ऊर्ध्वाधर है: लंबाई = 1 + 30 + 11 = 42 सेमी।

चरण 4: 5 फलकों से सर्पिल जाल में 24 सेमी और 32 सेमी भुजाओं वाला समकोण त्रिभुज बनता है: $d^2 = 24^2 + 32^2 = 576 + 1024 = 1600 \Rightarrow d = 40$ सेमी।

चरण 5: 40 सेमी < 42 सेमी, अतः सबसे छोटा रास्ता 40 सेमी है।

3. 4 समान घनों से बने ठोस के ऊपर, सामने और बगल के दृश्य बनाओ: 3 घनों की एक पंक्ति और बीच वाले घन के ऊपर 1 घन। सामने से दिखने वाले फलकों की संख्या भी लिखो। (5)

उत्तर: पंक्ति को चौड़ाई के अनुदिश (बाएँ, बीच, दाएँ) लो, 1 घन गहरी, और अतिरिक्त घन बीच वाले पर।

सामने का दृश्य: 3 × 1 आधार और बीच के ऊपर 1 वर्ग ('T' आकार, 4 वर्ग)।

ऊपर का दृश्य: एक पंक्ति में 3 वर्ग (ऊपर का घन बीच वाले को ढक लेता है) – 3 × 1 आयत।

बगल का दृश्य: एक के ऊपर एक 2 वर्ग – 1 × 2 आयत।

सामने से दिखने वाले फलक: 3 आधार घनों के सामने के फलक + ऊपरी घन का सामने का फलक = 4 वर्गाकार फलक।