

Chapter Review

- **Heights and distances:** Trigonometry is used to find the height of a tower, the width of a river or the distance of a ship without measuring directly. The object is seen along a line of sight; the problem is converted into a right-angled triangle and solved using trigonometric ratios.
- **Line of sight and horizontal level:** The line of sight is the line drawn from the eye of the observer to the point on the object being viewed. The horizontal level is the horizontal line passing through the eye of the observer.
- **Angle of elevation:** When the object being viewed is above the horizontal level, the angle formed by the line of sight with the horizontal level is called the angle of elevation. The observer raises the head to see the object, for example looking at the top of a tower or a kite in the sky.
- **Angle of depression:** When the object is below the horizontal level, the angle formed by the line of sight with the horizontal level is called the angle of depression. The observer lowers the head to see the object, for example looking at a boat from the top of a cliff. The angle of depression of an object from a point equals the angle of elevation of that point from the object (alternate angles).
- **Steps to solve a problem:** Step 1: draw a neat figure with the right-angled triangle(s). Step 2: mark all known heights, distances and angles; denote unknown lengths by variables. Step 3: choose the right ratio: use $\tan$ when height and base are involved, $\sin$ when height and line of sight (hypotenuse) are involved, $\cos$ for base and hypotenuse. Step 4: solve and write the answer with units. Use $\sqrt{3} = 1.732$ and $\sqrt{2} = 1.414$ when needed.

- Useful values: $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$. If the angle of elevation is 45° , height = distance (isosceles right triangle). If the angle is 30° , the base = $\sqrt{3} \times$ height; if 60° , the height = $\sqrt{3} \times$ base.
- Two-triangle problems: Often the observer moves closer or farther and the angle changes (for example from 30° to 60°). Form two right triangles with a common height h , write two equations in h and the unknown distance x , and solve. Example: $\tan 60^\circ = h/x$ and $\tan 30^\circ = h/(x + d)$ gives $h = (\sqrt{3}/2) \times d$.
- Real-life uses: Trigonometry helps in architecture, navigation of ships and planes, surveying land and mapping hills. Large distances of stars and planets are measured by the parallax method, where the parallax angle is half the angle between two lines of sight from two different positions.

Key Terms

Line of Sight – Line from the observer's eye to the object viewed.

Horizontal Level – Horizontal line through the observer's eye.

Angle of Elevation – Angle of the line of sight above the horizontal when looking up.

Angle of Depression – Angle of the line of sight below the horizontal when looking down.

Observer – The person or instrument viewing the object.

Height – Vertical distance, the side opposite to the angle at the observer.

Base Distance – Horizontal distance between the observer and the foot of the object.

Theodolite – Instrument used to measure angles of elevation and depression.

Parallax – Apparent change in position of an object seen from two positions.

Alternate Angles – Equal angles formed by a transversal, used to relate depression and elevation.

$\tan \theta$ – Height / base, the most used ratio in these problems.

Isosceles Right Triangle – Formed when the angle of elevation is 45° ; height = base.

Diagrams / Flowcharts

Elevation vs Depression

Angle of Elevation

- Object above eye level
- Observer looks up
- Example: top of tower

Angle of Depression

- Object below eye level
- Observer looks down
- Example: boat from cliff

Solving Height and Distance

Draw figure with right triangle



Mark known and unknown values



Choose sin, cos or tan



Form and solve the equation



Write answer with units

Which Ratio to Use

Known and required sides	Ratio
Height and base	$\tan$
Height and line of sight	$\sin$
Base and line of sight	$\cos$

Common Angles

Angle	tan value	Relation
30°	$1/\sqrt{3}$	base = $\sqrt{3}$ × height
45°	1	height = base
60°	$\sqrt{3}$	height = $\sqrt{3}$ × base

Textbook Exercise Questions

Q.1 A tower stands vertically on the ground. From a point 15 m from its foot, the angle of elevation of the top is 60° . Find the height.

Ans. $\tan 60^\circ = h/15$, so $h = 15\sqrt{3} = 25.98$ m.

Q.2 The shadow of a tower is $\sqrt{3}$ times its height. Find the angle of elevation of the sun.

Ans. $\tan \theta = h/(\sqrt{3} h) = 1/\sqrt{3}$, so $\theta = 30^\circ$.

Q.3 From the top of a 7 m high building, the angle of elevation of the top of a cable tower is 60° and the angle of depression of its foot is 45° . Find the height of the tower.

Ans. Distance to foot: $\tan 45^\circ = 7/d$, $d = 7$ m. Extra height above building: $\tan 60^\circ = x/7$, $x = 7\sqrt{3}$. Height = $7 + 7\sqrt{3} = 7(1 + \sqrt{3})$ m.

Q.4 A kite is flying at a height of 60 m with its string making an angle of 60° with the ground. Find the length of the string, assuming it is straight.

Ans. $\sin 60^\circ = 60/L$, so $L = 60/(\sqrt{3}/2) = 40\sqrt{3} = 69.28$ m.

Q.5 From a point on the ground the angles of elevation of the bottom and top of a tower fixed at the top of a 20 m high building are 45° and 60° . Find the height of the tower.

Ans. $\tan 45^\circ = 20/x$ gives $x = 20$. $\tan 60^\circ = (20 + h)/20$, so $20 + h = 20\sqrt{3}$,
 $h = 20(\sqrt{3} - 1) = 14.64$ m.

Q.6 The angle of elevation of the top of a tower from two points at distances a and b from its base in the same line are complementary. Prove that the height is $\sqrt{ab}$.

Ans. Let angles be θ and $90^\circ - \theta$. $\tan \theta = h/a$ and $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta = h/b$. Multiply: $1 = h^2/(ab)$, so $h = \sqrt{ab}$.

Important Board-Pattern Questions (with Solutions)

Q.1 [1 mark] If the angle of elevation of the top of a pole from a point is 45° and the point is 10 m from the foot, find the height.

Ans. $\tan 45^\circ = h/10$, $h = 10$ m.

Q.2 [1 mark] Define the angle of depression.

Ans. The angle between the horizontal line and the line of sight to an object below the horizontal level.

Q.3 [2 marks] A ladder 10 m long makes an angle of 60° with the ground. Find the height reached on the wall.

Ans. $\sin 60^\circ = h/10$, $h = 5\sqrt{3} = 8.66$ m.

Q.4 [2 marks] The angle of elevation of the sun is 30° . Find the length of the shadow of a 6 m pole.

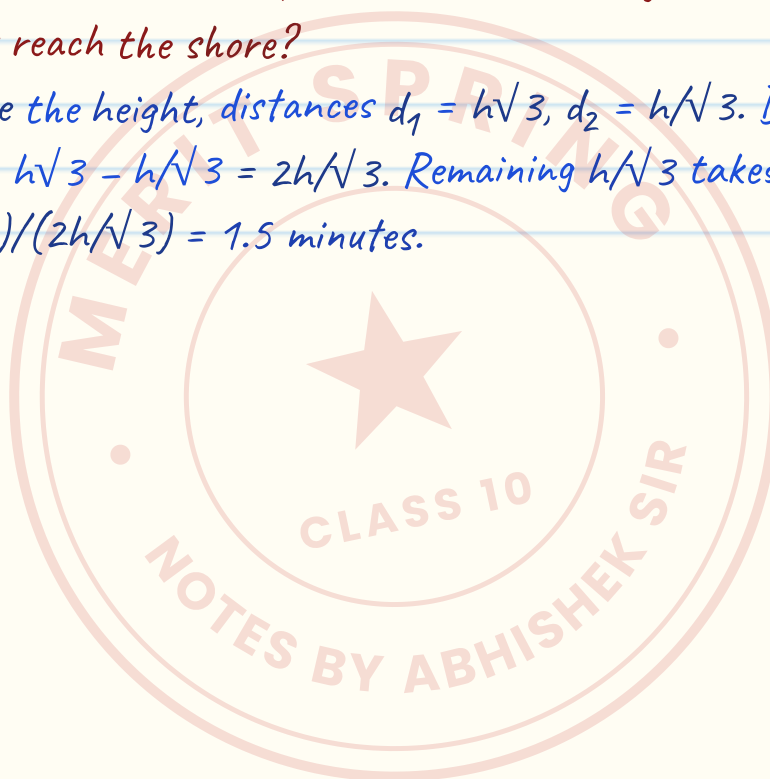
Ans. $\tan 30^\circ = 6/s$, $s = 6\sqrt{3}$ m = 10.39 m.

Q.5 [3 marks] From the top of a 75 m high lighthouse, the angles of depression of two ships are 30° and 45° in the same direction. Find the distance between the ships.

Ans. Distances: $75/\tan 45^\circ = 75$ and $75/\tan 30^\circ = 75\sqrt{3}$. Distance = $75(\sqrt{3} - 1) = 54.9$ m.

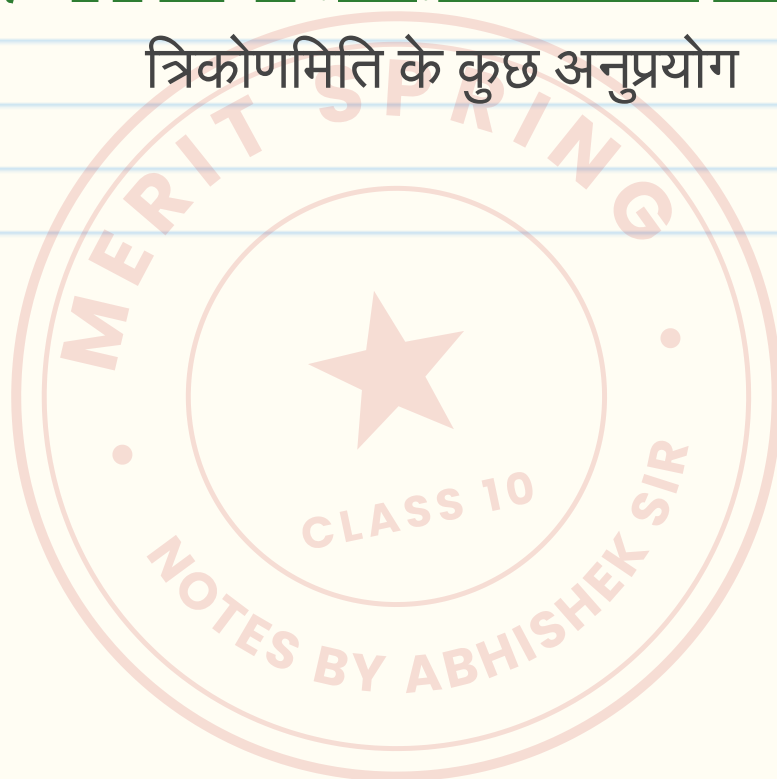
Q.6 [3 marks] A man on a cliff observes a boat at an angle of depression 30° approaching the shore. After 3 minutes the angle is 60° . How soon will the boat reach the shore?

Ans. Let h be the height, distances $d_1 = h/\sqrt{3}$, $d_2 = h/\sqrt{3}$. Distance covered in 3 min = $h/\sqrt{3} - h/\sqrt{3} = 2h/\sqrt{3}$. Remaining $h/\sqrt{3}$ takes $(3 \times (h/\sqrt{3})) / (2h/\sqrt{3}) = 1.5$ minutes.



HINDI VERSION

त्रिकोणमिति के कुछ अनुप्रयोग



अध्याय समीक्षा

- ऊँचाई और दूरी: त्रिकोणमिति की सहायता से मीनार की ऊँचाई, नदी की चौड़ाई या जहाज़ की दूरी बिना सीधे नापे ज्ञात की जाती है। वस्तु दृष्टि रेखा से देखी जाती है; प्रश्न को समकोण त्रिभुज में बदलकर त्रिकोणमितीय अनुपातों से हल करते हैं।
- दृष्टि रेखा और क्षैतिज स्तर: दृष्टि रेखा प्रेक्षक की आँख से देखी जा रही वस्तु के बिंदु तक खींची गई रेखा है। क्षैतिज स्तर प्रेक्षक की आँख से गुजरने वाली क्षैतिज रेखा है।
- उन्नयन कोण: जब देखी जा रही वस्तु क्षैतिज स्तर से ऊपर हो तो दृष्टि रेखा और क्षैतिज स्तर के बीच बने कोण को उन्नयन कोण कहते हैं। प्रेक्षक वस्तु देखने के लिए सिर ऊपर उठाता है, जैसे मीनार का शिखर या आकाश में पतंग देखना।
- अवनमन कोण: जब वस्तु क्षैतिज स्तर से नीचे हो तो दृष्टि रेखा और क्षैतिज स्तर के बीच बने कोण को अवनमन कोण कहते हैं। प्रेक्षक वस्तु देखने के लिए सिर नीचे झुकाता है, जैसे चट्टान के शिखर से नाव देखना। किसी बिंदु से वस्तु का अवनमन कोण, वस्तु से उस बिंदु के उन्नयन कोण के बराबर होता है (एकांतर कोण)।
- प्रश्न हल करने के चरण: चरण 1: समकोण त्रिभुज वाली स्वच्छ आकृति बनाएँ। चरण 2: ज्ञात ऊँचाई, दूरी और कोण अंकित करें; अज्ञात लंबाइयों को चर से दर्शाएँ। चरण 3: सही अनुपात चुनें: ऊँचाई और आधार हो तो $\tan$, ऊँचाई और दृष्टि रेखा (कर्ण) हो तो $\sin$, आधार और कर्ण हो तो $\cos$ । चरण 4: हल करें और मात्रक सहित उत्तर लिखें। आवश्यकता होने पर $\sqrt{3} = 1.732$ और $\sqrt{2} = 1.414$ लें।
- उपयोगी मान: $\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3}$, $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ । यदि उन्नयन कोण 45° है तो ऊँचाई = दूरी (समद्विबाहु समकोण त्रिभुज)। कोण 30° हो तो आधार = $\sqrt{3} \times$ ऊँचाई; 60° हो तो ऊँचाई = $\sqrt{3} \times$ आधार।
- दो त्रिभुजों वाले प्रश्न: प्रायः प्रेक्षक पास या दूर जाता है और कोण बदल जाता है (जैसे 30° से 60°)। उभयनिष्ठ ऊँचाई h वाले दो समकोण त्रिभुज बनाएँ, h और अज्ञात दूरी x में दो समीकरण लिखें और हल करें। उदाहरण: $\tan 60^\circ = h/x$ और $\tan 30^\circ = h/(x + d)$ से $h = (\sqrt{3}/2) \times d$ ।

- वास्तविक जीवन में उपयोग: त्रिकोणमिति वास्तुकला, जहाजों और विमानों के नौवहन, भूमि सर्वेक्षण और पहाड़ों के मानचित्रण में काम आती है। तारों और ग्रहों की बड़ी दूरियाँ लंबन विधि से नापी जाती हैं, जिसमें लंबन कोण दो भिन्न स्थितियों से दृष्टि रेखाओं के बीच के कोण का आधा होता है।

मुख्य शब्दावली

दृष्टि रेखा - प्रेक्षक की आँख से देखी गई वस्तु तक की रेखा।

क्षैतिज स्तर - प्रेक्षक की आँख से गुजरने वाली क्षैतिज रेखा।

उन्नयन कोण - ऊपर देखने पर दृष्टि रेखा का क्षैतिज से ऊपर बना कोण।

अवनमन कोण - नीचे देखने पर दृष्टि रेखा का क्षैतिज से नीचे बना कोण।

प्रेक्षक - वस्तु को देखने वाला व्यक्ति या यंत्र।

ऊँचाई - ऊर्ध्वाधर दूरी, प्रेक्षक पर बने कोण की सम्मुख भुजा।

आधार दूरी - प्रेक्षक और वस्तु के पाद के बीच की क्षैतिज दूरी।

थियोडोलाइट - उन्नयन और अवनमन कोण नापने का यंत्र।

लंबन - दो स्थितियों से देखने पर वस्तु की स्थिति में आभासी परिवर्तन।

एकांतर कोण - तिर्यक रेखा से बने बराबर कोण, अवनमन और उन्नयन को जोड़ने में उपयोगी।

$\tan \theta$ - ऊँचाई / आधार, इन प्रश्नों में सर्वाधिक प्रयुक्त अनुपात।

समद्विबाहु समकोण त्रिभुज - उन्नयन कोण 45° होने पर बनता है; ऊँचाई = आधार।

आरेख / फ्लोचार्ट

उन्नयन बनाम अवनमन

उन्नयन कोण

- वस्तु आँख के स्तर से ऊपर
- प्रेक्षक ऊपर देखता है
- उदाहरण: मीनार का शिखर

अवनमन कोण

- वस्तु आँख के स्तर से नीचे
- प्रेक्षक नीचे देखता है
- उदाहरण: चट्टान से नाव

ऊँचाई और दूरी का प्रश्न हल करना

समकोण त्रिभुज की आकृति बनाएँ



ज्ञात-अज्ञात मान अंकित करें



$\sin$, $\cos$ या $\tan$ चुनें



समीकरण बनाकर हल करें



मात्रक सहित उत्तर लिखें

कौन-सा अनुपात लें

ज्ञात और अभीष्ट भुजाएँ	अनुपात
ऊँचाई और आधार	$\tan$
ऊँचाई और दृष्टि रेखा	$\sin$
आधार और दृष्टि रेखा	$\cos$

सामान्य कोण

कोण	$\tan$ मान	संबंध
30°	$1/\sqrt{3}$	आधार = $\sqrt{3} \times$ ऊँचाई
45°	1	ऊँचाई = आधार
60°	$\sqrt{3}$	ऊँचाई = $\sqrt{3} \times$ आधार

पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 एक मीनार भूमि पर ऊर्ध्वधर खड़ी है। उसके पाद से 15 m दूर एक बिंदु से शिखर का उन्नयन कोण 60° है। ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\tan 60^\circ = h/15$, अतः $h = 15\sqrt{3} = 25.98 \text{ m}$

प्र.2 मीनार की छाया उसकी ऊँचाई की $\sqrt{3}$ गुनी है। सूर्य का उन्नयन कोण ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\tan \theta = h/(\sqrt{3} h) = 1/\sqrt{3}$, अतः $\theta = 30^\circ$

प्र.3 7 m ऊँची इमारत के शिखर से केबल टावर के शिखर का उन्नयन कोण 60° और उसके पाद का अवनमन कोण 45° है। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- पाद तक दूरी: $\tan 45^\circ = 7/d$, $d = 7 \text{ m}$ । इमारत से ऊपर की ऊँचाई: $\tan 60^\circ = x/7$,
 $x = 7\sqrt{3}$ । ऊँचाई $= 7 + 7\sqrt{3} = 7(1 + \sqrt{3}) \text{ m}$

प्र.4 पतंग 60 m ऊँचाई पर उड़ रही है और डोरी भूमि से 60° का कोण बनाती है। डोरी सीधी मानकर उसकी लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\sin 60^\circ = 60/L$, अतः $L = 60/(\sqrt{3}/2) = 40\sqrt{3} = 69.28 \text{ m}$

प्र.5 भूमि के एक बिंदु से 20 m ऊँची इमारत के शिखर पर लगे टावर के पाद और शिखर के उन्नयन कोण 45° और 60° हैं। टावर की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\tan 45^\circ = 20/x$ से $x = 20$ । $\tan 60^\circ = (20 + h)/20$, अतः $20 + h = 20\sqrt{3}$, $h = 20(\sqrt{3} - 1) = 14.64 \text{ m}$

प्र.6 मीनार के आधार से एक ही रेखा में a और b दूरी पर स्थित दो बिंदुओं से शिखर के उन्नयन कोण पूरक हैं। सिद्ध कीजिए कि ऊँचाई $\sqrt{ab}$ है।

उत्तर- कोण θ और $90^\circ - \theta$ लें। $\tan \theta = h/a$ और $\tan(90^\circ - \theta) = \cot \theta = h/b$ । गुणा करने पर $1 = h^2/(ab)$, अतः $h = \sqrt{ab}$ ।

बोर्ड पैटर्न के महत्वपूर्ण प्रश्न (हल सहित)

प्र.1 [1 अंक] यदि किसी बिंदु से खंभे के शिखर का उन्नयन कोण 45° है और बिंदु पाद से 10 m दूर है तो ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\tan 45^\circ = h/10, h = 10 \text{ m}$

प्र.2 [1 अंक] अवनमन कोण की परिभाषा लिखिए।

उत्तर- क्षैतिज स्तर से नीचे स्थित वस्तु की दृष्टि रेखा और क्षैतिज रेखा के बीच का कोण।

प्र.3 [2 अंक] 10 m लंबी सीढ़ी भूमि से 60° का कोण बनाती है। दीवार पर पहुँची ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\sin 60^\circ = h/10, h = 5\sqrt{3} = 8.66 \text{ m}$

प्र.4 [2 अंक] सूर्य का उन्नयन कोण 30° है। 6 m ऊँचे खंभे की छाया की लंबाई ज्ञात कीजिए।

उत्तर- $\tan 30^\circ = 6/s, s = 6\sqrt{3} \text{ m} = 10.39 \text{ m}$

प्र.5 [3 अंक] 75 m ऊँचे प्रकाश-स्तंभ के शिखर से एक ही दिशा में दो जहाज़ों के अवनमन कोण 30° और 45° हैं। जहाज़ों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

उत्तर- दूरियाँ: $75/\tan 45^\circ = 75$ और $75/\tan 30^\circ = 75\sqrt{3}$ अंतर $= 75(\sqrt{3} - 1) = 54.9 \text{ m}$

प्र.6 [3 अंक] चट्टान पर खड़ा व्यक्ति किनारे की ओर आती नाव को 30° अवनमन कोण पर देखता है। 3 मिनट बाद कोण 60° हो जाता है। नाव कितनी देर में किनारे पहुँचेगी?

उत्तर- ऊँचाई h , दूरियाँ $d_1 = h\sqrt{3}, d_2 = h/\sqrt{3}$ । 3 मिनट में तय दूरी $= h\sqrt{3} - h/\sqrt{3} = 2h/\sqrt{3}$ । शेष $h/\sqrt{3}$ में समय $= 3 \times (h/\sqrt{3})/(2h/\sqrt{3}) = 1.5$ मिनट।