

Chapter Review

- Mathematics is, in large part, the search for PATTERNS and for the reasons WHY those patterns happen. Patterns are all around us – in nature, in our homes, in the movement of the Sun, Moon and stars, in shopping, cooking and games. Mathematicians think of maths both as an art and a science, because finding patterns is creative and explaining them needs logic.
- The most basic patterns are number sequences: counting numbers, odd and even numbers, triangular numbers, squares, cubes, Virahāṅka numbers, powers of 2 and 3. We can draw many sequences with dots to SEE the pattern. Different sequences are related – for example, adding odd numbers one by one gives square numbers (1, 4, 9, 16, 25 ...), and a picture shows us why.
- Shapes also form sequences: regular polygons, complete graphs, stacked squares, stacked triangles and the Koch snowflake. The numbers hidden in these shapes (sides, lines, little squares, little triangles, segments) are again famous number sequences. So number patterns and shape patterns are friends!

Detailed Notes

1. What is Mathematics?

- Teacher says: maths is the search for patterns – and also for explanations of WHY the patterns exist. Finding a pattern is fun, creative work, so maths is both an art and a science.
- Explanations are useful far beyond where they were found. Patterns in the motion of stars, planets and moons led to the theory of gravitation – so we can launch satellites and send rockets to the Moon and Mars. Patterns in genomes help doctors find and cure diseases.

- Maths helps in daily life: paying for things, cooking, finding the area of a plot, speed of a vehicle, making calendars and clocks, building bridges, making phones, TVs and computers.

2. Patterns in Numbers – Number Sequences

- Patterns of whole numbers (0, 1, 2, 3 ...) are studied in NUMBER THEORY. A list of numbers following a rule is a NUMBER SEQUENCE.
- All 1's: 1, 1, 1, 1 ... Counting numbers: 1, 2, 3, 4, 5 ... (add 1) Odd numbers: 1, 3, 5, 7, 9 ... (add 2) Even numbers: 2, 4, 6, 8, 10 ... (add 2).
- Triangular numbers: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ... (add 2, 3, 4, 5 ... one more each time). Next three: 36, 45, 55.
- Square numbers: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ... ($n \times n$). Next three: 64, 81, 100. Cubes: 1, 8, 27, 64, 125, 216 ... ($n \times n \times n$). Next three: 343, 512, 729.
- Virahānka numbers: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... each number is the SUM of the two numbers before it ($2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$). Next three: 34, 55, 89. (These are also called Fibonacci numbers.)
- Powers of 2: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... (double each time). Next: 128, 256, 512. Powers of 3: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ... (multiply by 3 each time). Next: 2187, 6561, 19683.

3. Visualising Number Sequences (pictures with dots)

- Pictures help us understand a pattern. Triangular numbers: dots arranged in a triangle (1, 3, 6, 10, 15). Square numbers: dots in a square grid (1, 4, 9, 16, 25). Cubes: dots in a cube (1, 8, 27, 64, 125).
- That is why they have these names – the dots can be arranged in a triangle, a square or a cube.
- 36 is both a triangular number and a square number: 36 dots can make a perfect triangle (8 rows) and a perfect square (6×6). The same number

can play different roles.

- Hexagonal numbers: 1, 7, 19, 37 ... – dots arranged in hexagon rings around a centre dot. The next number is 61, then 91.
- Powers of 2: draw a picture where each step doubles the dots (1, 2, 4, 8, 16).

4. Relations among Number Sequences

- Odd numbers $\rightarrow$ squares: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$... The picture: a square grid of dots can be cut into corner-shaped layers having 1, 3, 5, 7 ... dots. This works for a square of ANY size, so it happens forever. The sum of the first 10 odd numbers is $10 \times 10 = 100$ and of the first 100 odd numbers is $100 \times 100 = 10,000$.
- Adding up and down: 1 , $1 + 2 + 1 = 4$, $1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9$, $1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16$... also gives squares. So $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1 = 100 \times 100 = 10,000$.
- Counting numbers added up: 1 , $1 + 2$, $1 + 2 + 3$... give triangular numbers. All 1's added up gives counting numbers (1, 2, 3 ...); all 1's added up and down gives odd numbers (1, 3, 5 ...).
- Two consecutive triangular numbers added give a square: $1 + 3 = 4$, $3 + 6 = 9$, $6 + 10 = 16$, $10 + 15 = 25$... (two triangles join to make a square).
- Powers of 2 added up: 1 , $1 + 2 = 3$, $1 + 2 + 4 = 7$, $1 + 2 + 4 + 8 = 15$... Add 1 to each: 2, 4, 8, 16, 32 ... – powers of 2 again! Reason: each power of 2 is 1 more than the sum of all the powers before it.
- Triangular numbers $\times 6 + 1$ give hexagonal numbers: $1 \times 6 + 1 = 7$, $3 \times 6 + 1 = 19$, $6 \times 6 + 1 = 37$, $10 \times 6 + 1 = 61$, $15 \times 6 + 1 = 91$ (picture: a centre dot plus 6 triangles).
- Hexagonal numbers added up give CUBES: 1 , $1 + 7 = 8$, $1 + 7 + 19 = 27$, $1 + 7 + 19 + 37 = 64$...

5. Patterns in Shapes – Shape Sequences

- Shapes in 1D, 2D or 3D form patterns. The branch of maths about shapes is GEOMETRY. A sequence of shapes follows a rule to make the next shape.
- Regular polygons: triangle, quadrilateral (square), pentagon, hexagon, heptagon, octagon, nonagon, decagon. 'Regular' means all sides equal and all angles (corners) equal. Number of sides: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 ...
- Complete graphs K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 : points joined to every other point by a line. Number of lines: 1, 3, 6, 10, 15 – triangular numbers (each new point joins to all earlier points: $1 + 2 + 3 + 4 \dots$).
- Stacked squares: little squares 1, 4, 9, 16, 25 – square numbers. Stacked triangles: little triangles 1, 4, 9, 16, 25 – squares again (rows have 1, 3, 5, 7 ... triangles, which is adding odd numbers).
- Koch snowflake: replace every line segment by a 'speed bump'. Number of segments: 3, 12, 48, 192, 768 ... = $3 \times$ powers of 4 (each time multiply by 4).
- Number of sides = number of corners in any closed figure, so regular polygons give the same sequence for both.

Important Formulas / Values

- Sum of first n odd numbers = $n \times n$ / $1 + 2 + \dots + n + \dots + 2 + 1 = n \times n$
- Two consecutive triangular numbers add up to a square number
- Powers of 2: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{(k-1)} = 2^k - 1$ / Hexagonal = $6 \times$ triangular + 1
- Koch snowflake segments: 3, 3×4 , $3 \times 4 \times 4 \dots$ / Virahānka: next = sum of previous two

Key Terms

Pattern – Something that repeats or follows a rule.

Number sequence – A list of numbers formed by a rule.

Number theory – Branch of maths that studies patterns of whole numbers.

Counting numbers – 1, 2, 3, 4 ... (add 1 each time).

Odd numbers – 1, 3, 5, 7 ... (not divisible by 2).

Even numbers – 2, 4, 6, 8 ... (divisible by 2).

Triangular numbers – 1, 3, 6, 10, 15 ... dots in a triangle.

Square numbers (squares) – 1, 4, 9, 16, 25 ... dots in a square ($n \times n$).

Cube numbers – 1, 8, 27, 64 ... ($n \times n \times n$).

Virahānka numbers – 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... each is the sum of the two before it.

Powers of 2 – 1, 2, 4, 8, 16 ... (multiply by 2).

Hexagonal numbers – 1, 7, 19, 37, 61 ... dots in hexagon rings.

Geometry – Branch of maths that studies patterns of shapes.

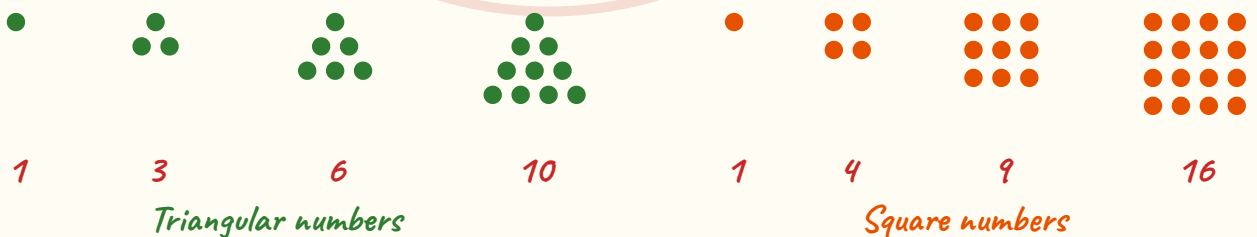
Regular polygon – A polygon with all sides equal and all angles equal.

Complete graph – Points joined to every other point by lines.

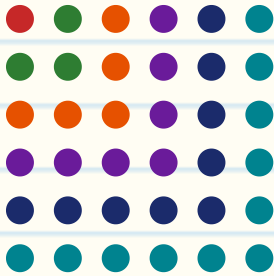
Koch snowflake – A shape made by replacing each line segment with a 'speed bump' again and again.

Diagrams / Flowcharts

Triangular and Square Numbers



Odd Numbers Make Squares



Each corner-shaped layer adds an odd number of dots:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6 \times 6$$

Sum of first n odd numbers = $n \times n$

First 10 odd numbers $\rightarrow$ 100; first 100 $\rightarrow$ 10,000

Powers of 2



Powers of 2: double each time (1, 2, 4, 8, 16 ...)

Some Number Sequences

Sequence	First numbers	Rule
Counting	1, 2, 3, 4, 5	add 1
Odd	1, 3, 5, 7, 9	add 2
Even	2, 4, 6, 8, 10	add 2
Triangular	1, 3, 6, 10, 15, 21	add 2, 3, 4 ...
Squares	1, 4, 9, 16, 25, 36	$n \times n$
Cubes	1, 8, 27, 64, 125	$n \times n \times n$
Virahāṅka	1, 2, 3, 5, 8, 13	sum of previous two
Powers of 2	1, 2, 4, 8, 16, 32	$\times 2$
Powers of 3	1, 3, 9, 27, 81	$\times 3$

Number Hidden in Shape Sequences

Shape sequence	Numbers you get
Regular polygons (sides)	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
Complete graphs (lines)	1, 3, 6, 10, 15
Stacked squares	1, 4, 9, 16, 25
Stacked triangles	1, 4, 9, 16, 25
Koch snowflake (segments)	3, 12, 48, 192, 768

How to Find Why a Pattern Happens

Spot the pattern in numbers



Draw it with dots or shapes



See the pictured reason



Check it will work for ANY size

Textbook Exercise Questions

Q.1 (Section 1.1, Q1) Can you think of other examples where mathematics helps us in our everyday lives?

Ans. Yes: paying for fruits, vegetables and groceries; calculating the speed of vehicles; designs and patterns in buildings; finding the area of a plot or our own home; telling time with a clock; cooking with measures. There are many more – discuss with your friends.

Q.2 How has mathematics helped propel humanity forward?

Ans. Maths is used in scientific experiments, in running the economy and democracy (counting votes, budgets), in building bridges, houses and big structures, and in making TVs, phones, computers, bicycles, trains, cars, planes, calendars and clocks. For example, understanding patterns in the motion of stars and planets led to satellites and space rockets, and patterns in genomes help cure diseases. (Discuss more with your teacher.)

Q.3 (Section 1.2, Q1) Recognise the pattern in each sequence of Table 1.

Ans. All 1's: always 1. Counting: add 1. Odd: add 2 starting at 1. Even: add 2 starting at 2. Triangular: add 2, then 3, then 4 ... Squares: $n \times n$.

Cubes: $n \times n \times n$.

Virahāṅka: each number is the sum of the two before it ($1, 2, 3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3, 8 = 3 + 5, 13 = 5 + 8 \dots$).

Powers of 2: $1, 2, 4 = 2 \times 2, 8 = 2 \times 2 \times 2, 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots$

Powers of 3: $1, 3, 9 = 3 \times 3, 27 = 3 \times 3 \times 3 \dots$

Q.4 Write each sequence with the next three numbers and the rule in your own words.

Ans. All 1's: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, then 1, 1, 1 (always 1).

Counting: ... 7, then 8, 9, 10 (add 1).

Odd: ... 13, then 15, 17, 19 (add 2).

Even: ... 14, then 16, 18, 20 (add 2).

Triangular: ... 28, then 36, 45, 55 (the gaps are 8, 9, 10 – each time add one more than the last gap).

Squares: ... 49, then 64, 81, 100. Cubes: ... 216, then 343, 512, 729.

Virahāṅka: ... 21, then 34, 55, 89 (sum of previous two).

Powers of 2: ... 64, then 128, 256, 512. Powers of 3: ... 729, then 2187, 6561, 19683.

Q.5 (Section 1.3, Q1) Draw the next picture for each sequence in Table 2.

Ans. Next numbers: counting 6, odd 11, even 12, triangular 21 (6 rows of dots), squares 36 (6×6 grid), cubes 216 ($6 \times 6 \times 6$). Draw one more row, layer or ring of dots in each picture and count.

Q.6 Why are 1, 3, 6, 10, 15 called triangular numbers? Why are 1, 4, 9, 16, 25 called squares? Why are 1, 8, 27, 64, 125 called cubes?

Ans. Triangular: that many dots can be arranged in a perfect triangle (rows of 1, 2, 3, 4, 5 dots).

Squares: that many dots can be arranged in a perfect square grid ($2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$...).

Cubes: that many small cubes make a big cube ($2 \times 2 \times 2 = 8$, $3 \times 3 \times 3 = 27$...).

Q.7 36 is both a triangular number and a square number. Show this with pictures.

Ans. Triangle: arrange 36 dots in 8 rows ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$).

Square: arrange 36 dots in 6 rows of 6 dots ($6 \times 6 = 36$). The same number plays two roles.

Q.8 What are 1, 7, 19, 37 called? Draw them. What is the next number?

Ans. They are hexagonal numbers (dots in hexagon rings around a centre dot). The next number is 61.

Q.9 Can you picture the powers of 2 and powers of 3?

Ans. Powers of 2: each step doubles – 1 dot, 2 dots, 4 dots, 8 dots, 16 dots (draw each new group twice as big as the last).

Powers of 3: each step triples – 1 dot, 3 dots, 9 dots (3 groups of 3), 27 dots (3 groups of 9). Draw each new picture as three copies of the one before.

Q.10 (Section 1.4) What is the sum of the first 10 odd numbers? And the first 100 odd numbers?

Ans. First 10 odd numbers: $10 \times 10 = 100$.

First 100 odd numbers: $100 \times 100 = 10,000$.

Q.11 (Figure it Out Q1) Give a picture to explain why adding the counting numbers up and down ($1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1 \dots$) gives squares.

Ans. Make a square grid of dots. Colour the diagonal rows: the first diagonal has 1 dot, the next 2, then 3 ... up to n in the middle diagonal, and after that the diagonals get smaller again $n - 1, n - 2 \dots 1$. Adding the dots diagonal by diagonal gives $1 + 2 + \dots + n + \dots + 2 + 1$, and all of them together make the $n \times n$ square.

Q.12 What is the value of $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$?

Ans. It equals $100 \times 100 = 10,000$.

Q.13 Which sequence do you get when you add the All 1's sequence up? And up and down?

Ans. Adding All 1's up: $1, 1 + 1 = 2, 1 + 1 + 1 = 3, \dots$ – the counting numbers 1, 2, 3, 4 ...

Adding All 1's up and down: $1, 1 + 1 + 1 = 3, 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5, \dots$ – the odd numbers 1, 3, 5, 7 ...

Q.14 Which sequence do you get when you add the counting numbers up? Give a small picture.

Ans. $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots$ – the triangular numbers. Picture: rows of 1, 2, 3, 4 dots stacked make a triangle.

Q.15 Add up pairs of consecutive triangular numbers: $1 + 3$, $3 + 6$, $6 + 10$, $10 + 15$... Which sequence? Why?

Ans. We get 4, 9, 16, 25 ... – the square numbers.

Why: two triangles of dots (one of $1 + 2 + \dots + n$ dots and one of $1 + 2 + \dots + (n + 1)$ dots) fit together to make a square grid of dots.

Q.16 Add powers of 2: 1 , $1 + 2$, $1 + 2 + 4$, $1 + 2 + 4 + 8$... What do you get? Add 1 to each – what now? Why?

Ans. We get 1, 3, 7, 15, 31 ...

After adding 1 to each: 2, 4, 8, 16, 32 ... – the powers of 2 again.

Why: every power of 2 is exactly 1 more than the sum of all powers of 2 before it (for example $8 = 1 + 2 + 4 + 1$).

Q.17 Multiply triangular numbers by 6 and add 1. Which sequence? Explain with a picture.

Ans. $(1 \times 6) + 1 = 7$, $(3 \times 6) + 1 = 19$, $(6 \times 6) + 1 = 37$, $(10 \times 6) + 1 = 61$, $(15 \times 6) + 1 = 91$... – the hexagonal numbers.

Picture: a centre dot with 6 equal triangles of dots around it makes a hexagon.

Q.18 Add hexagonal numbers: 1 , $1 + 7$, $1 + 7 + 19$, $1 + 7 + 19 + 37$... Which sequence?

Ans. We get 1, 8, 27, 64 ... – the cube numbers (hexagon layers of dots wrap around a cube corner by corner).

Q.19 Find your own patterns or relations among the sequences in Table 1.

Ans. Examples: adding the even numbers 2, 4, 6 ... gives 2, 6, 12, 20 ... (each is $n \times (n + 1)$). The difference between consecutive squares is 3, 5, 7, 9 ... – the odd numbers. Every Virahānka number is the sum of the two before it. Try to explain your pattern with a picture.

Q.20 (Section 1.5, Q1) Recognise the pattern in each sequence of Table 3.

Ans. Regular polygons: number of sides 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Complete graphs: lines 1, 3, 6, 10, 15.

Stacked squares: 1, 4, 9, 16, 25. Stacked triangles: 1, 4, 9, 16, 25.

Koch snowflake: segments 3, 3×4 , $3 \times 4 \times 4$, $3 \times 4 \times 4 \times 4 \dots$

Q.21 Redraw each sequence and draw the next shape. Why or why not?

Ans. Yes, we can draw the next shape in each sequence once we know the rule: regular polygons – add one more side; complete graphs – add one more point and join it to all earlier points; stacked squares/triangles – add one more row; Koch snowflake – replace each segment by a speed bump. The Koch snowflake gets very hard to draw after a few steps because the segments get tiny.

Q.22 (Section 1.6, Q1) Count the sides and the corners of the regular polygons. Which sequence? Same? Why?

Ans. Sides: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 – counting numbers starting from 3.

Corners: also 3, 4, 5, 6 ... – the same sequence.

Why: in any closed figure the number of sides is equal to the number of corners.

Q.23 Count the lines in each complete graph. Which sequence? Why?

Ans. 1, 3, 6, 10, 15 – the triangular numbers. Why: each new point is joined to all the earlier points, so the new lines added are 1, 2, 3, 4 ... and adding these gives triangular numbers.

Q.24 How many little squares are in each shape of the stacked squares? Which sequence? Why?

Ans. 1, 4, 9, 16, 25 – the square numbers, because each shape is a perfect square grid (1×1 , 2×2 , $3 \times 3 \dots$).

Q.25 How many little triangles are in each shape of the stacked triangles?

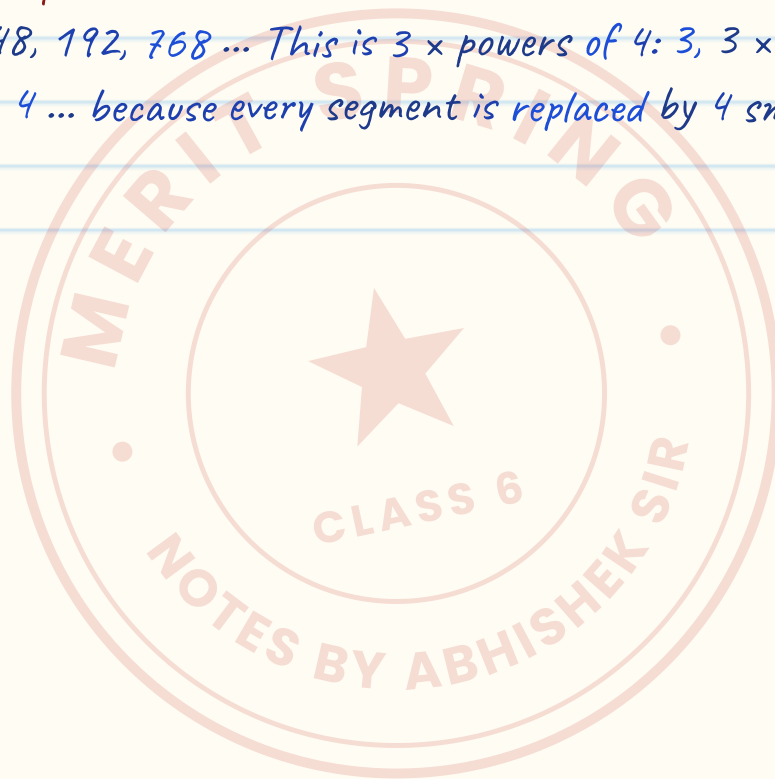
Which sequence? Why?

Ans. 1, 4, 9, 16, 25 – squares again. Each row has 1, 3, 5, 7 ... triangles (odd numbers), and adding odd numbers gives squares. (Also $1 = 1$, $4 = 1 + 2 + 1$, $9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$... adding up and down.)

Q.26 How many total line segments are in each shape of the Koch snowflake?

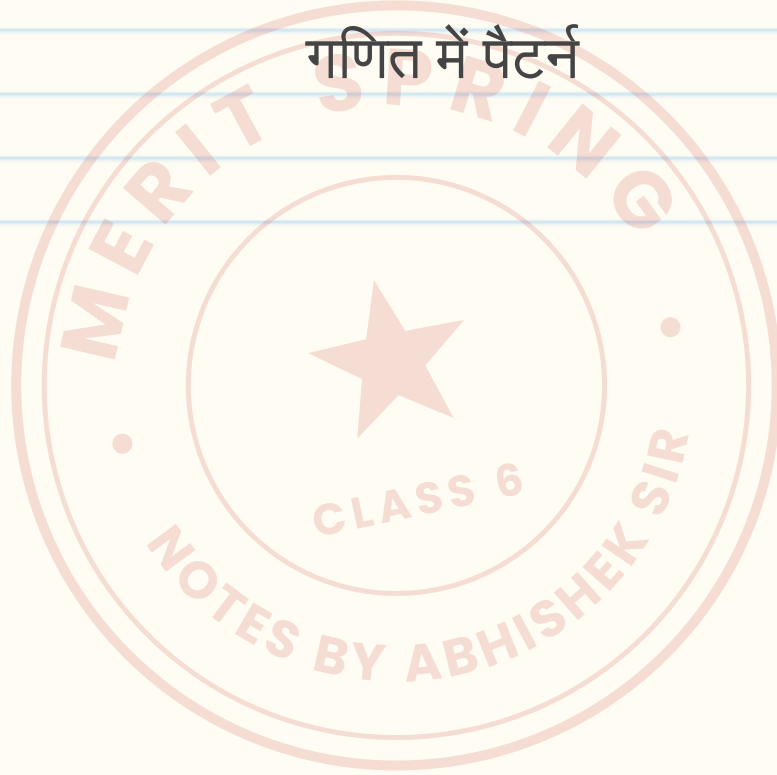
Which sequence?

Ans. 3, 12, 48, 192, 768 ... This is $3 \times$ powers of 4: 3 , 3×4 , $3 \times 4 \times 4$, $3 \times 4 \times 4 \times 4$... because every segment is replaced by 4 smaller ones.



HINDI VERSION

गणित में पैटर्न



अध्याय समीक्षा

- गणित बहुत हद तक पैटर्न (नमूनों) की खोज है और यह समझने की भी कि वे पैटर्न क्यों बनते हैं। पैटर्न हर जगह हैं - प्रकृति में, हमारे घरों में, सूर्य-चंद्रमा-तारों की चाल में, खरीदारी, खाना बनाने और खेलों में। गणितज्ञ गणित को कला और विज्ञान दोनों मानते हैं, क्योंकि पैटर्न ढूँढना रचनात्मक है और उन्हें समझने में तर्क लगता है।
- सबसे बुनियादी पैटर्न संख्या अनुक्रम (number sequences) हैं: गिनती की संख्याएँ, विषम और सम संख्याएँ, त्रिकोणीय संख्याएँ, वर्ग, घन, विरहांक संख्याएँ, 2 और 3 की घातें। बहुत से अनुक्रमों को बिंदुओं से बनाकर पैटर्न देख सकते हैं। अलग-अलग अनुक्रम एक-दूसरे से जुड़े होते हैं - जैसे विषम संख्याओं को एक-एक करके जोड़ने से वर्ग संख्याएँ (1, 4, 9, 16, 25 ...) मिलती हैं, और चित्र इसका कारण दिखाता है।
- आकृतियाँ भी अनुक्रम बनाती हैं: सम बहुभुज, पूर्ण ग्राफ़ (complete graphs), जमे हुए वर्ग, जमे हुए त्रिभुज और कॉक स्नोफ्लेक। इन आकृतियों में छिपी संख्याएँ (भुजाएँ, रेखाएँ, छोटे वर्ग, छोटे त्रिभुज, खंड) फिर वही प्रसिद्ध संख्या अनुक्रम होती हैं। यानी संख्या के पैटर्न और आकृति के पैटर्न दोस्त हैं।

विस्तृत नोट्स

1. गणित क्या है?

- टीचर कहते हैं: गणित पैटर्न की खोज है - और यह भी कि पैटर्न क्यों बनते हैं। पैटर्न ढूँढना मज़ेदार और रचनात्मक काम है, इसलिए गणित कला भी है और विज्ञान भी।
- जो कारण समझ आते हैं वे जहाँ खोजे गए वहाँ से कहीं आगे भी काम आते हैं। तारों, ग्रहों और चंद्रमाओं की चाल के पैटर्न से गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत बना - इसलिए हम उपग्रह छोड़ सकते हैं और चाँद-मंगल तक रॉकेट भेज सकते हैं। जीनोम के पैटर्न से डॉक्टर बीमारियाँ पहचानते और ठीक करते हैं।
- रोज़मर्रा में गणित: सामान के पैसे देना, खाना बनाना, ज़मीन का क्षेत्रफल निकालना, गाड़ी की चाल, कैलेंडर और घड़ी बनाना, पुल बनाना, फ़ोन, टीवी और कंप्यूटर बनाना।

2. संख्याओं में पैटर्न - संख्या अनुक्रम

- पूर्ण संख्याओं (0, 1, 2, 3 ...) के पैटर्न का अध्ययन संख्या सिद्धांत (number theory) में होता है। किसी नियम से बनी संख्याओं की सूची संख्या अनुक्रम (number sequence) है।

- सब 1: 1, 1, 1, 1 ... गिनती की संख्याएँ: 1, 2, 3, 4, 5 ... (1 जोड़ो) विषम: 1, 3, 5, 7, 9 ... (2 जोड़ो) सम: 2, 4, 6, 8, 10 ... (2 जोड़ो)।
- त्रिकोणीय संख्याएँ: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28 ... (2, 3, 4, 5 ... हर बार एक ज़्यादा जोड़ो)। अगली तीन: 36, 45, 55।
- वर्ग संख्याएँ: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 ... ($n \times n$)। अगली तीन: 64, 81, 100। घन: 1, 8, 27, 64, 125, 216 ... ($n \times n \times n$)। अगली तीन: 343, 512, 729।
- विरहांक संख्याएँ: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 ... हर संख्या पिछली दो संख्याओं का योग है ($2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$)। अगली तीन: 34, 55, 89। (इन्हें फ़िबोनाची संख्याएँ भी कहते हैं)।
- 2 की घातें: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 ... (हर बार दुगुना)। अगली: 128, 256, 512। 3 की घातें: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729 ... (हर बार 3 से गुणा)। अगली: 2187, 6561, 19683।

3. संख्या अनुक्रमों को चित्र से देखना (बिंदुओं से)

- चित्र से पैटर्न समझना आसान होता है। त्रिकोणीय संख्याएँ: बिंदु त्रिभुज में सजे (1, 3, 6, 10, 15)। वर्ग संख्याएँ: बिंदु वर्गाकार ग़िड में (1, 4, 9, 16, 25)। घन: बिंदु घन में (1, 8, 27, 64, 125)।
- इसीलिए इनके ये नाम हैं - बिंदुओं को त्रिभुज, वर्ग या घन में सजाया जा सकता है।
- 36 त्रिकोणीय संख्या भी है और वर्ग संख्या भी: 36 बिंदुओं से पूरा त्रिभुज (8 पंक्तियाँ) और पूरा वर्ग (6×6) बन सकता है। एक ही संख्या अलग-अलग भूमिकाएँ निभा सकती है।
- षट्कोणीय संख्याएँ: 1, 7, 19, 37 ... - बीच के बिंदु के चारों ओर षट्भुज के छल्लों में बिंदु। अगली संख्या 61 है, फिर 91।
- 2 की घातें: ऐसा चित्र बनाओ जिसमें हर चरण में बिंदु दुगुने हों (1, 2, 4, 8, 16)।

4. संख्या अनुक्रमों के आपसी संबंध

- विषम संख्याएँ $\rightarrow$ वर्ग: $1 = 1$, $1 + 3 = 4$, $1 + 3 + 5 = 9$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16$... चित्र: बिंदुओं के वर्गाकार ग़िड को कोने जैसी परतों में बाँटा जा सकता है जिनमें 1, 3, 5, 7 ... बिंदु होते हैं। यह किसी भी आकार के वर्ग के लिए सच है, इसलिए यह हमेशा होगा। पहली 10 विषम संख्याओं का योग $10 \times 10 = 100$ और पहली 100 विषम संख्याओं का योग $100 \times 100 = 10,000$ है।

- ऊपर-नीचे जोड़ना: $1, 1 + 2 + 1 = 4, 1 + 2 + 3 + 2 + 1 = 9, 1 + 2 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 = 16 \dots$ भी वर्ग देता है। इसलिए $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1 = 100 \times 100 = 10,000$ ।
- गिनती की संख्याएँ जोड़ते जाओ: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 3 \dots$ त्रिकोणीय संख्याएँ मिलती हैं। सब 1 को जोड़ते जाओ तो गिनती की संख्याएँ $(1, 2, 3 \dots)$; सब 1 को ऊपर-नीचे जोड़ो तो विषम संख्याएँ $(1, 3, 5 \dots)$ ।
- दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं का योग वर्ग होता है: $1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, 10 + 15 = 25 \dots$ (दो त्रिभुज मिलकर वर्ग बनाते हैं)।
- 2 की घातें जोड़ो: $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 4 = 7, 1 + 2 + 4 + 8 = 15 \dots$ हर में 1 जोड़ो: $2, 4, 8, 16, 32 \dots$ - फिर 2 की घातें! कारण: 2 की हर घात, उससे पहले की सब घातों के योग से ठीक 1 ज्यादा होती है।
- त्रिकोणीय संख्या $\times 6 + 1$ से षट्कोणीय संख्याएँ मिलती हैं: $1 \times 6 + 1 = 7, 3 \times 6 + 1 = 19, 6 \times 6 + 1 = 37, 10 \times 6 + 1 = 61, 15 \times 6 + 1 = 91$ (चित्र: बीच का बिंदु और उसके चारों ओर 6 त्रिभुज)।
- षट्कोणीय संख्याओं को जोड़ने से घन मिलते हैं: $1, 1 + 7 = 8, 1 + 7 + 19 = 27, 1 + 7 + 19 + 37 = 64 \dots$

5. आकृतियों में पैटर्न - आकृति अनुक्रम

- 1D, 2D या 3D आकृतियाँ भी पैटर्न बनाती हैं। आकृतियों वाली गणित की शाखा ज्यामिति (geometry) है। आकृति अनुक्रम में एक नियम से अगली आकृति बनती है।
- सम बहुभुज: त्रिभुज, चतुर्भुज (वर्ग), पंचभुज, षट्भुज, सप्तभुज, अष्टभुज, नवभुज, दशभुज। 'सम' का मतलब सब भुजाएँ और सब कोण बराबर। भुजाओं की संख्या: $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \dots$
- पूर्ण ग्राफ K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 : हर बिंदु बाकी सब बिंदुओं से रेखा द्वारा जुड़ा। रेखाओं की संख्या: $1, 3, 6, 10, 15$ - त्रिकोणीय संख्याएँ (हर नया बिंदु पहले के सब बिंदुओं से जुड़ता है: $1 + 2 + 3 + 4 \dots$)।
- जमे हुए वर्ग: छोटे वर्ग $1, 4, 9, 16, 25$ - वर्ग संख्याएँ। जमे हुए त्रिभुज: छोटे त्रिभुज $1, 4, 9, 16, 25$ - फिर वर्ग (पंक्तियों में $1, 3, 5, 7 \dots$ त्रिभुज, यानी विषम संख्याओं का योग)।

- कॉक स्नोफ़्लेक: हर रेखाखंड को 'स्पीड ब्रेकर' से बदलो। खंडों की संख्या: 3, 12, 48, 192, 768 ... = 3×4 की घातें (हर बार 4 से गुणा)।
- किसी भी बंद आकृति में भुजाओं की संख्या = कोनों की संख्या, इसलिए सम बहुभुजों में दोनों का अनुक्रम एक जैसा है।

महत्वपूर्ण सूत्र / मान

- पहली n विषम संख्याओं का योग = $n \times n$ | $1 + 2 + \dots + n + \dots + 2 + 1 = n \times n$
- दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं का योग वर्ग संख्या होता है
- 2 की घातें: $1 + 2 + 4 + \dots + 2^{(k-1)} = 2^k - 1$ | षट्कोणीय = $6 \times$ त्रिकोणीय + 1
- कॉक स्नोफ़्लेक खंड: 3, 3×4 , $3 \times 4 \times 4$... | विरहांक: अगली = पिछली दो का योग

मुख्य शब्दावली

पैटर्न (Pattern) - कुछ ऐसा जो दोहराए या किसी नियम पर चले।

संख्या अनुक्रम - किसी नियम से बनी संख्याओं की सूची।

संख्या सिद्धांत - गणित की वह शाखा जो पूर्ण संख्याओं के पैटर्न पढ़ती है।

गिनती की संख्याएँ - 1, 2, 3, 4 ... (हर बार 1 जोड़ो)।

विषम संख्याएँ - 1, 3, 5, 7 ... (2 से विभाज्य नहीं)।

सम संख्याएँ - 2, 4, 6, 8 ... (2 से विभाज्य)।

त्रिकोणीय संख्याएँ - 1, 3, 6, 10, 15 ... बिंदु त्रिभुज में।

वर्ग संख्याएँ - 1, 4, 9, 16, 25 ... बिंदु वर्ग में ($n \times n$)।

घन संख्याएँ - 1, 8, 27, 64 ... ($n \times n \times n$)।

विरहांक संख्याएँ - 1, 2, 3, 5, 8, 13 ... हर संख्या पिछली दो का योग।

2 की घातें - 1, 2, 4, 8, 16 ... (2 से गुणा)।

षट्कोणीय संख्याएँ - 1, 7, 19, 37, 61 ... षट्भुज के छल्लों में बिंदु।

व्यामिति (Geometry) - गणित की वह शाखा जो आकृतियों के पैटर्न पढ़ती है।

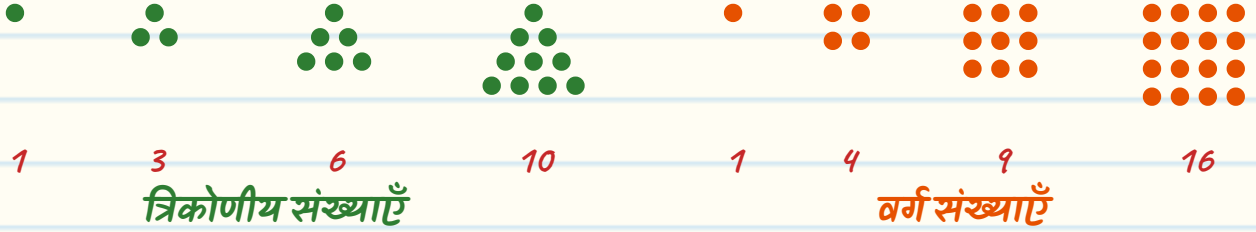
सम बहुभुज - सब भुजाएँ और सब कोण बराबर वाला बहुभुज।

पूर्ण ग्राफ़ - हर बिंदु बाकी सब बिंदुओं से रेखा द्वारा जुड़ा हुआ।

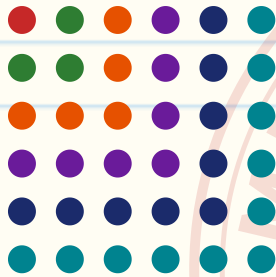
कॉक स्नोफ़्लेक - हर रेखाखंड को बार-बार 'स्पीड ब्रेकर' से बदलकर बनी आकृति।

आरेख / फ्लोचार्ट

त्रिकोणीय और वर्ग संख्याएँ



विषम संख्याओं से वर्ग



हर कोने जैसी परत में विषम संख्या के बिंदु जुड़ते हैं:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36 = 6 \times 6$$

पहली n विषम संख्याओं का योग $= n \times n$

पहली 10 विषम संख्याएँ $\rightarrow 100$; पहली 100 $\rightarrow 10,000$

2 की घातें



2 की घातें: हर बार दुगुना (1, 2, 4, 8, 16 ...)

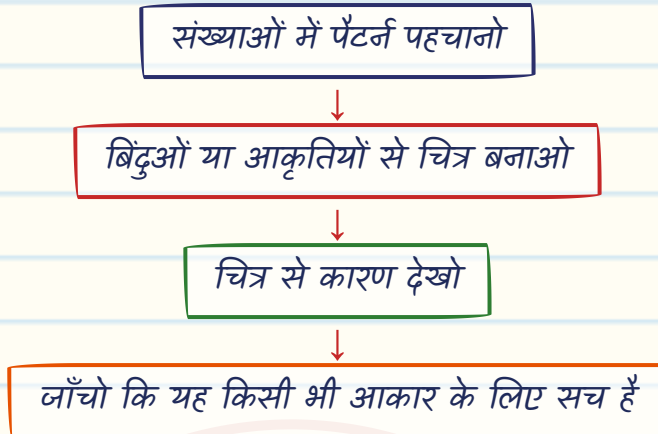
कुछ संख्या अनुक्रम

अनुक्रम	शुरु की संख्याएँ	नियम
गिनती	1, 2, 3, 4, 5	1 जोड़ो
विषम	1, 3, 5, 7, 9	2 जोड़ो
सम	2, 4, 6, 8, 10	2 जोड़ो
त्रिकोणीय	1, 3, 6, 10, 15, 21	2, 3, 4 ... जोड़ो
वर्ग	1, 4, 9, 16, 25, 36	$n \times n$
घन	1, 8, 27, 64, 125	$n \times n \times n$
विरहांक	1, 2, 3, 5, 8, 13	पिछली दो का योग
2 की घाते	1, 2, 4, 8, 16, 32	$\times 2$
3 की घाते	1, 3, 9, 27, 81	$\times 3$

आकृति अनुक्रमों में छिपी संख्याएँ

आकृति अनुक्रम	मिलने वाली संख्याएँ
सम बहुभुज (भुजाएँ)	3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
पूर्ण ग्राफ़ (रेखाएँ)	1, 3, 6, 10, 15
जमे हुए वर्ग	1, 4, 9, 16, 25
जमे हुए त्रिभुज	1, 4, 9, 16, 25
कॉक स्नोफ़्लेक (खंड)	3, 12, 48, 192, 768

पैटर्न क्यों बनता है - कैसे खोजें



पाठ्यपुस्तक अभ्यास प्रश्न

प्र.1 (खंड 1.1, प्र.1) क्या तुम रोजमर्रा की जिंदगी में गणित के और उदाहरण सोच सकते हो?

उत्तर- हाँ: फल, सब्जी और राशन के पैसे देना; गाड़ियों की चाल निकालना; इमारतों के डिज़ाइन और पैटर्न; ज़मीन या अपने घर का क्षेत्रफल निकालना; घड़ी से समय देखना; नाप से खाना बनाना। और भी बहुत हैं - दोस्तों से चर्चा करो।

प्र.2 गणित ने मानवता को आगे बढ़ाने में कैसे मदद की है?

उत्तर- गणित वैज्ञानिक प्रयोगों में, अर्थव्यवस्था और लोकतंत्र चलाने में (वोट गिनना, बजट), पुल, घर और बड़ी इमारतें बनाने में, और टीवी, फ़ोन, कंप्यूटर, साइकिल, ट्रेन, कार, हवाई जहाज़, कैलेंडर और घड़ी बनाने में काम आता है। जैसे तारों और ग्रहों की चाल के पैटर्न से उपग्रह और अंतरिक्ष रॉकेट बने, और जीनोम के पैटर्न से बीमारियों का इलाज होता है। (टीचर से और चर्चा करो।)

प्र.3 (खंड 1.2, प्र.1) तालिका 1 के हर अनुक्रम का पैटर्न पहचानो।

उत्तर- सब 1: हमेशा 1। गिनती: 1 जोड़ो। विषम: 1 से शुरू करके 2 जोड़ो। सम: 2 से शुरू करके 2 जोड़ो। त्रिकोणीय: 2, फिर 3, फिर 4 ... जोड़ो। वर्ग: $n \times n$ । घन: $n \times n \times n$ । विरहांक: हर संख्या पिछली दो का योग ($1, 2, 3 = 1 + 2, 5 = 2 + 3, 8 = 3 + 5, 13 = 5 + 8 \dots$)। 2 की घातें: $1, 2, 4 = 2 \times 2, 8 = 2 \times 2 \times 2, 16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \dots$ 3 की घातें: $1, 3, 9 = 3 \times 3, 27 = 3 \times 3 \times 3 \dots$

प्र.4 हर अनुक्रम को अगली तीन संख्याओं और अपने शब्दों में नियम के साथ लिखो।

उत्तर- सब 1: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, फिर 1, 1, 1 (हमेशा 1)।

गिनती: ... 7, फिर 8, 9, 10 (1 जोड़ो)।

विषम: ... 13, फिर 15, 17, 19 (2 जोड़ो)।

सम: ... 14, फिर 16, 18, 20 (2 जोड़ो)।

त्रिकोणीय: ... 28, फिर 36, 45, 55 (अंतर 8, 9, 10 हैं: हर बार पिछले अंतर से 1 ज्यादा जोड़ो)।

वर्ग: ... 49, फिर 64, 81, 100। घन: ... 216, फिर 343, 512, 729।

विरहांक: ... 21, फिर 34, 55, 89 (पिछली दो का योग)।

2 की घातें: ... 64, फिर 128, 256, 512। 3 की घातें: ... 729, फिर 2187, 6561, 19683।

प्र.5 (खंड 1.3, प्र.1) तालिका 2 के हर अनुक्रम का अगला चित्र बनाओ।

उत्तर- अगली संख्याएँ: गिनती 6, विषम 11, सम 12, त्रिकोणीय 21 (बिंदुओं की 6 पंक्तियाँ), वर्ग 36 (6×6 गिड), घन 216 ($6 \times 6 \times 6$)। हर चित्र में एक और पंक्ति, परत या छल्ला बनाकर गिनो।

प्र.6 1, 3, 6, 10, 15 को त्रिकोणीय संख्याएँ, 1, 4, 9, 16, 25 को वर्ग संख्याएँ और 1, 8, 27, 64, 125 को घन क्यों कहते हैं?

उत्तर- त्रिकोणीय: उतने बिंदु पूरे त्रिभुज में सज सकते हैं (1, 2, 3, 4, 5 बिंदुओं की पंक्तियाँ)।

वर्ग: उतने बिंदु पूरे वर्गाकार गिड में सज सकते हैं ($2 \times 2 = 4$, $3 \times 3 = 9$...)।

घन: उतने छोटे घन मिलकर बड़ा घन बनाते हैं ($2 \times 2 \times 2 = 8$, $3 \times 3 \times 3 = 27$...)।

प्र.7 36 त्रिकोणीय संख्या भी है और वर्ग संख्या भी। चित्र से दिखाओ।

उत्तर- त्रिभुज: 36 बिंदु 8 पंक्तियों में सजाओ ($1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$)।

वर्ग: 36 बिंदु 6 पंक्तियों में, हर पंक्ति में 6 बिंदु ($6 \times 6 = 36$)। एक ही संख्या दो भूमिकाएँ निभाती है।

प्र.8 1, 7, 19, 37 को क्या कहते हैं? बनाओ। अगली संख्या क्या है?

उत्तर- इन्हें षट्कोणीय संख्याएँ कहते हैं (बीच के बिंदु के चारों ओर षट्भुज के छल्लों में बिंदु)।
अगली संख्या 61 है।

प्र.9 2 की घातों और 3 की घातों का चित्र कैसे बनाओगे?

उत्तर- 2 की घातें: हर चरण में दुगुना - 1 बिंदु, 2 बिंदु, 4 बिंदु, 8 बिंदु, 16 बिंदु (हर नया समूह पिछले से दुगुना बनाओ)।

3 की घातें: हर चरण में तिगुना - 1 बिंदु, 3 बिंदु, 9 बिंदु (3 के 3 समूह), 27 बिंदु (9 के 3 समूह)। हर नया चित्र पिछले चित्र की तीन प्रतियों से बनाओ।

प्र.10 (खंड 1.4) पहली 10 विषम संख्याओं का योग क्या है? और पहली 100 विषम संख्याओं का?

उत्तर- पहली 10 विषम संख्याएँ: $10 \times 10 = 100$

पहली 100 विषम संख्याएँ: $100 \times 100 = 10,000$

प्र.11 (Figure it Out प्र.1) चित्र से समझाओ कि गिनती की संख्याओं को ऊपर-नीचे जोड़ने (1, 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 3 + 2 + 1 ...) से वर्ग क्यों मिलते हैं।

उत्तर- बिंदुओं का वर्गाकार ग्रिड बनाओ। तिरछी पंक्तियों को रंगो: पहली तिरछी पंक्ति में 1 बिंदु, अगली में 2, फिर 3 ... बीच की में n , और उसके बाद फिर घटते हुए $n - 1, n - 2 \dots 1$ । तिरछी पंक्ति-दर-पंक्ति जोड़ने पर $1 + 2 + \dots + n + \dots + 2 + 1$ मिलता है, और सब मिलकर $n \times n$ का वर्ग बनाते हैं।

प्र.12 $1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 + 99 + \dots + 3 + 2 + 1$ का मान क्या है?

उत्तर- यह $100 \times 100 = 10,000$ के बराबर है।

प्र.13 सब 1 के अनुक्रम को ऊपर की तरफ जोड़ने पर कौन-सा अनुक्रम मिलता है? ऊपर-नीचे जोड़ने पर?

उत्तर- सब 1 को ऊपर जोड़ने पर: 1, $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3 \dots$ - गिनती की संख्याएँ 1, 2, 3, 4 ...

सब 1 को ऊपर-नीचे जोड़ने पर: 1, $1 + 1 + 1 = 3$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5 \dots$ - विषम संख्याएँ 1, 3, 5, 7 ...

प्र.14 गिनती की संख्याओं को जोड़ते जाने पर कौन-सा अनुक्रम मिलता है? छोटा चित्र दो।

उत्तर- $1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \dots$ - त्रिकोणीय संख्याएँ। चित्र: 1, 2, 3, 4 बिंदुओं की पंक्तियाँ ऊपर-नीचे रखने पर त्रिभुज बनता है।

प्र.15 क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं के जोड़े जोड़ो: $1 + 3, 3 + 6, 6 + 10, 10 + 15 \dots$ कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्यों?

उत्तर- हमें 4, 9, 16, 25 ... मिलता है - वर्ग संख्याएँ।

क्यों: बिंदुओं के दो त्रिभुज (एक $1 + 2 + \dots + n$ बिंदुओं का और दूसरा $1 + 2 + \dots + (n + 1)$ बिंदुओं का) मिलकर बिंदुओं का वर्गाकार ग्रिड बनाते हैं।

प्र.16 2 की घातें जोड़ो: $1, 1 + 2, 1 + 2 + 4, 1 + 2 + 4 + 8 \dots$ क्या मिलता है? हर में 1 जोड़ो - अब क्या? क्यों?

उत्तर- हमें 1, 3, 7, 15, 31 ... मिलता है।

हर में 1 जोड़ने पर: 2, 4, 8, 16, 32 ... - फिर 2 की घातें।

क्यों: 2 की हर घात, उससे पहले की सब घातों के योग से ठीक 1 ज्यादा होती है (जैसे $8 = 1 + 2 + 4 + 1$)।

प्र.17 त्रिकोणीय संख्याओं को 6 से गुणा करके 1 जोड़ो। कौन-सा अनुक्रम मिलता है? चित्र से समझाओ।

उत्तर- $(1 \times 6) + 1 = 7, (3 \times 6) + 1 = 19, (6 \times 6) + 1 = 37, (10 \times 6) + 1 = 61, (15 \times 6) + 1 = 91 \dots$ - षट्कोणीय संख्याएँ।

चित्र: बीच का एक बिंदु और उसके चारों ओर बिंदुओं के 6 बराबर त्रिभुज मिलकर षट्भुज बनाते हैं।

प्र.18 षट्कोणीय संख्याओं को जोड़ते जाओ: $1, 1 + 7, 1 + 7 + 19, 1 + 7 + 19 + 37 \dots$ कौन-सा अनुक्रम?

उत्तर- हमें 1, 8, 27, 64 ... मिलता है - घन संख्याएँ (बिंदुओं की षट्भुज परतें घन के कोने के चारों ओर लिपटती हैं)।

प्र.19 तालिका 1 के अनुक्रमों में अपने खुद के पैटर्न या संबंध ढूँढो।

उत्तर- उदाहरण: सम संख्याओं 2, 4, 6 ... को जोड़ते जाने पर 2, 6, 12, 20 ... मिलता है (हर एक $n \times (n + 1)$ है)। क्रमागत वर्गों का अंतर 3, 5, 7, 9 ... - विषम संख्याएँ। हर विरहांक संख्या पिछली दो का योग है। अपने पैटर्न को चित्र से समझाने की कोशिश करो।

प्र.20 (खंड 1.5, प्र.1) तालिका 3 के हर अनुक्रम का पैटर्न पहचानो।

उत्तर- सम बहुभुज: भुजाएँ 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10।

पूर्ण ग्राफ़: रेखाएँ 1, 3, 6, 10, 15।

जमे हुए वर्ग: 1, 4, 9, 16, 25। जमे हुए त्रिभुज: 1, 4, 9, 16, 25।

कॉक स्नोफ़्लेक: खंड 3, 3×4 , $3 \times 4 \times 4$, $3 \times 4 \times 4 \times 4$...

प्र.21 हर अनुक्रम फिर से बनाओ और अगली आकृति बनाओ। क्यों या क्यों नहीं?

उत्तर- हाँ, नियम पता हो तो हर अनुक्रम की अगली आकृति बना सकते हैं: सम बहुभुज - एक भुजा और जोड़ो; पूर्ण ग्राफ़ - एक और बिंदु जोड़ो और पहले के सब बिंदुओं से जोड़ो; जमे वर्ग/त्रिभुज - एक और पंक्ति जोड़ो; कॉक स्नोफ़्लेक - हर खंड को स्पीड ब्रेकर से बदलो। कॉक स्नोफ़्लेक कुछ चरणों के बाद बनाना बहुत कठिन हो जाता है क्योंकि खंड बहुत छोटे हो जाते हैं।

प्र.22 (खंड 1.6, प्र.1) सम बहुभुजों की भुजाएँ और कोने गिनो। कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्या दोनों एक जैसे हैं? क्यों?

उत्तर- भुजाएँ: 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 - 3 से शुरू होने वाली गिनती की संख्याएँ। कोने: भी 3, 4, 5, 6 ... - वही अनुक्रम।

क्यों: किसी भी बंद आकृति में भुजाओं की संख्या कोनों की संख्या के बराबर होती है।

प्र.23 हर पूर्ण ग्राफ़ में रेखाएँ गिनो। कौन-सा अनुक्रम मिलता है? क्यों?

उत्तर- 1, 3, 6, 10, 15 - त्रिकोणीय संख्याएँ। क्यों: हर नया बिंदु पहले के सब बिंदुओं से जुड़ता है, इसलिए नई रेखाएँ 1, 2, 3, 4 ... जुड़ती हैं और इनका योग त्रिकोणीय संख्याएँ देता है।

प्र.24 जमे हुए वर्गों की हर आकृति में कितने छोटे वर्ग हैं? कौन-सा अनुक्रम? क्यों?

उत्तर- 1, 4, 9, 16, 25 - वर्ग संख्याएँ, क्योंकि हर आकृति पूरा वर्गाकार गिड है (1×1 , 2×2 , 3×3 ...)।

प्र.25 जमे हुए त्रिभुजों की हर आकृति में कितने छोटे त्रिभुज हैं? कौन-सा अनुक्रम? क्यों?

उत्तर- 1, 4, 9, 16, 25 - फिर वर्ग संख्याएँ। हर पंक्ति में 1, 3, 5, 7 ... त्रिभुज हैं (विषम संख्याएँ) और विषम संख्याओं का योग वर्ग देता है। (यह भी: $1 = 1$, $4 = 1 + 2 + 1$, $9 = 1 + 2 + 3 + 2 + 1$... ऊपर-नीचे जोड़ना।)

प्र.26 कॉक स्नोफ़्लेक की हर आकृति में कुल कितने रेखाखंड हैं? कौन-सा अनुक्रम?

उत्तर- 3, 12, 48, 192, 768 ... यह 3×4 की घातें हैं: 3, 3×4 , $3 \times 4 \times 4$, $3 \times 4 \times 4 \times 4$... क्योंकि हर खंड 4 छोटे खंडों से बदल जाता है।

