

ENGLISH SECTION (Hindi terms in brackets)

Number Play

Class 8 Maths (Ganita Prakash Part 1) • Chapter 5 • Detailed Notes + All Textbook Solutions + Board Questions (2026-27)

Chapter Review in Easy Language**1. Sum of consecutive numbers (क्रमगत संख्याओं का योग)**

- **Exploration (Anshu):** $7 = 3 + 4$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, $12 = 3 + 4 + 5$, $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$. **Findings (checked by me):** every odd number is a sum of two consecutive numbers ($2k + 1 = k + (k + 1)$); powers of 2 (2, 4, 8, 16, ...) can **not** be written as a sum of two or more consecutive natural numbers, but every other number can; some numbers (15, 9, 18) can be written in more than one way; if negative numbers are allowed every number can be ($7 = -6 + \dots + 7$) and $0 = -1 + 0 + 1$.
- **Signs between 4 consecutive numbers:** with '+' or '-' between 3, 4, 5, 6 there are 8 expressions: $3+4+5+6 = 18$, $3+4+5-6 = 6$, $3+4-5+6 = 8$, $3+4-5-6 = -4$, $3-4+5+6 = 10$, $3-4+5-6 = -2$, $3-4-5+6 = 0$, $3-4-5-6 = -12$. All are **even**; for any starting number n the values are $4n+6$, $2n$, $2n+2$, $-2n-4$, $2n+4$, **-2, 0**, $-2n-6$ – so -2 and 0 always appear.

2. Parity – why all sign choices give the same parity (समता)

- **Parity** = whether a number is even or odd (negative evens like -2, -4 are even too). For any four numbers a, b, c, d all eight values of $a \pm b \pm c \pm d$ have the **same parity** (checked on 4 consecutive numbers – the results are all even).
- **Explanation 1:** switching one sign changes the value by $2 \times (\text{that number})$, e.g. $(a + b - c - d) - (a - b - c - d) = 2b$ – an even number; two numbers whose difference is even have the same parity. Switching $a -$ to $a +$ also changes it by $2c$ or $2d$. From one expression you reach all 7 others by switching signs, so all 8 have the same parity.
- **Explanation 2:** $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$; $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$; $\text{odd} \pm \text{even} = \text{odd}$. So $a + b$ and $a - b$ have the same parity; adding/subtracting c keeps them equal; hence all $a \pm b \pm c \pm d$ agree.
- **Explanation 3:** token model – switching a sign swaps b positive tokens for b negative tokens, a change of $2b$. The idea is **not limited to 4 numbers** – it works for any count.

3. Breaking Even – parity of expressions (सम-विषम व्यंजक)

- **Rules:** $\text{even} + \text{even}$, $\text{even} - \text{even}$, $\text{odd} + \text{odd}$, $\text{odd} - \text{odd} = \text{even}$; $\text{even} + \text{odd}$, $\text{even} - \text{odd} = \text{odd}$; any product with an even factor is even; $\text{odd} \times \text{odd} = \text{odd}$; $(\text{odd})^n$ is odd.
- **Algebra:** an expression is always even if 2 is a factor, e.g. $4m + 2q = 2(2m + q)$; $2a + 2b$; $2u - 4v$; $13k - 5k = 8k$; $4k \times 3j$. Not always even: $3g + 5h$ (even only when g and h have the same

parity), $6m - 3n$ (odd when n is odd), $x^2 + 2$ ($x = 3$ gives 11), $b^2 + 1$ ($b = 2$ gives 5).

4. Pairs to make fours (चार के गुणज बनाना)

Even numbers are of two types: multiples of 4 ($4p$, remainder 0) and $4p + 2$ (remainder 2).
 $4p + 4q = 4(p + q)$ – a multiple of 4; $(4p + 2) + (4q + 2) = 4(p + q + 1)$ – a multiple of 4 (the two 2's make a 4); $4p + (4q + 2) = 4(p + q) + 2$ – leaves remainder 2, not a multiple of 4. So the sum of two even numbers is a multiple of 4 exactly when both are multiples of 4 or both are not.
 (Examples: $12 + 16 = 28$; $6 + 10 = 16$; $8 + 6 = 14$.)

5. Always, Sometimes or Never true? (सदा, कभी-कभी या कभी नहीं)

#	Statement	Verdict & reason
1	If 8 divides two numbers, it divides their sum	Always – $8a + 8b = 8(a + b)$; same for difference
2	If 8 divides a number, it divides any two numbers that add up to it	Sometimes – $72 = 48 + 24$ (yes) but $72 = 50 + 22$ (no)
3	If a number is divisible by 7, all its multiples are	Always – $(7j) \times m = 7(jm)$
4	If divisible by 12, divisible by all factors of 12	Always – $12m = 2 \times 6m = 3 \times 4m \dots$
5	If divisible by 7, divisible by any multiple of 7	Sometimes – 42 is divisible by 14 but not by 28; $7k \div 7m$ works only if m is a factor of k
6	Divisible by 9 and 4 $\Rightarrow$ by 36	Always – $\text{LCM}(9, 4) = 36$
7	Divisible by 6 and 4 $\Rightarrow$ by 24	Sometimes – $\text{LCM}(6, 4) = 12$, not 24; 12 works for both but not 24; 24 works
8	Odd + even is a multiple of 6	Never – multiples of 6 are even; odd + even is odd ($2n + 2m + 1 = 6j$ gives even = odd)

General rules: if a divides M and N , then a divides $M + N$ and $M - N$; if A is divisible by k , all multiples of A and all factors of k divide A ; if A is divisible by k and by m , then A is divisible by $\text{LCM}(k, m)$.

6. What remains? (क्या बचता है?)

Numbers leaving remainder 3 on division by 5: $3, 8, 13, 18, 23, \dots = 5k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), or equivalently $5k - 2$ ($k \geq 1$) – '3 more than a multiple of 5' or '2 less than a multiple of 5'. Of the options (i) $3k + 5$, (ii) $3k - 5$, (iii) $3k/5$, (iv) $5k + 3$, (v) $5k - 2$, (vi) $5k - 3$, only (iv) and (v) work ((vi) gives 2, 7, 12 ... remainder 2). Remainders add and subtract: $661 = 7q + 3$ and $4779 = 7p + 5$ give $4779 + 661 = 7(p + q + 1) + 1$ (remainder 1) and $4779 - 661 = 7(p - q) + 2$ (remainder 2).

7. Divisibility shortcuts and why they work (विभाज्यता के नियम)

- **General form:** a number ...dcba = ... + 1000d + 100c + 10b + a (a = units digit). **10:** every place value except units is a multiple of 10, so divisible by 10 $\Leftrightarrow$ a = 0. **5:** divisible $\Leftrightarrow$ a is 0 or 5. **2:** $\Leftrightarrow$ a is even. **4:** 100 is a multiple of 4, so $\Leftrightarrow$ the number formed by the last **two** digits (10b + a) is divisible by 4. **8:** 1000 is a multiple of 8, so $\Leftrightarrow$ the last **three** digits are divisible by 8.
- **9:** 10 = 9 + 1, 100 = 99 + 1, 1000 = 999 + 1 ... so each place value is a multiple of 9 plus 1. 7309 = 7(999 + 1) + 3(99 + 1) + 0(9 + 1) + 9 = (multiple of 9) + (7 + 3 + 0 + 9). **A number is divisible by 9 $\Leftrightarrow$ its digit sum is divisible by 9**, and the remainder on division by 9 equals the digit sum (repeat adding digits until one digit remains = **digital root**; 9 means remainder 0). Example: 427 $\rightarrow$ 4 + 2 + 7 = 13 $\rightarrow$ remainder 4. 7309 $\rightarrow$ 19 $\rightarrow$ 10 $\rightarrow$ 1.
- **3:** 10, 100, 1000 ... all leave remainder 1 when divided by 3 (as they are 1 more than 9, 99, 999 ...), so divisible by 3 $\Leftrightarrow$ digit sum divisible by 3 (every multiple of 9 is a multiple of 3, but 15, 33, 87 are multiples of 3 not of 9). For the four statements about 9 – (i), (ii), (iii), (iv) – **all are correct** because the rule is 'if and only if' (statements (iii), (iv) are the contrapositives of (ii), (i)).
- **11:** units 1 = 11 $\times$ 0 + 1 (1 more), tens 10 = 11 – 1 (1 less), hundreds 100 = 99 + 1 (1 more), thousands 1000 = 1001 – 1 (1 less) ... alternately 1 more / 1 less. **Rule:** (sum of digits at units, hundreds, ten-thousands ... places) – (sum of digits at tens, thousands, ... places) = difference; divisible by 11 $\Leftrightarrow$ difference is 0 or a multiple of 11; otherwise the difference (add 11 if negative) is the remainder. Example 328105: (5 + 1 + 2) – (0 + 8 + 3) = 8 – 11 = –3, remainder 8. Equivalent: start from the units digit with + and alternate signs: 5 – 0 + 1 – 8 + 2 – 3 = –3.
- **6 and 24:** divisibility by 6 = divisible by 2 **and** 3 (2 and 3 have no common factor). For 24 you must check **3 and 8** (not 4 and 6): 12 is divisible by both 4 and 6 but not by 24 – because 4 $\times$ 6 shares a factor 2 (24 = 2³ $\times$ 3, 4 = 2², 6 = 2 $\times$ 3, LCM(4, 6) = 12). Checking factor pairs works when the factors are **coprime** (share no prime factor).

8. Digital roots (डिजिटल रूट)

- **Digital root** = repeat adding the digits until one digit remains (489710 $\rightarrow$ 29 $\rightarrow$ 11 $\rightarrow$ 2). It equals the **remainder on division by 9** (9 if divisible by 9). Digital roots of consecutive numbers cycle 1, 2, ..., 9, 1, 2, ... Multiples of 3: 3, 6, 9 repeating; multiples of 4: 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9; multiples of 6: 6, 3, 9; numbers 1 more than a multiple of 6 (7, 13, 19, ...): 7, 4, 1 repeating. Adding 11 raises the root by 2 each time (mod 9). Aryabhata II (c. 950 CE, Mahasiddhanta) used it to check calculations.

9. Digits in disguise – cryptarithms (अंकों का भेस – क्रिप्टैरिथम)

Each letter = one digit, different letters = different digits, the first digit of a number is never 0. **Method:** look at the units column first (which digits can end the product?), then use size (a 2-digit $\times$ 1-digit answer must stay 2-digit, so $13 \times 8 = 104$ is too big), parity, carries, and divisibility. Always **check by substituting** and look for **all** solutions.

Important Terms (Glossary)

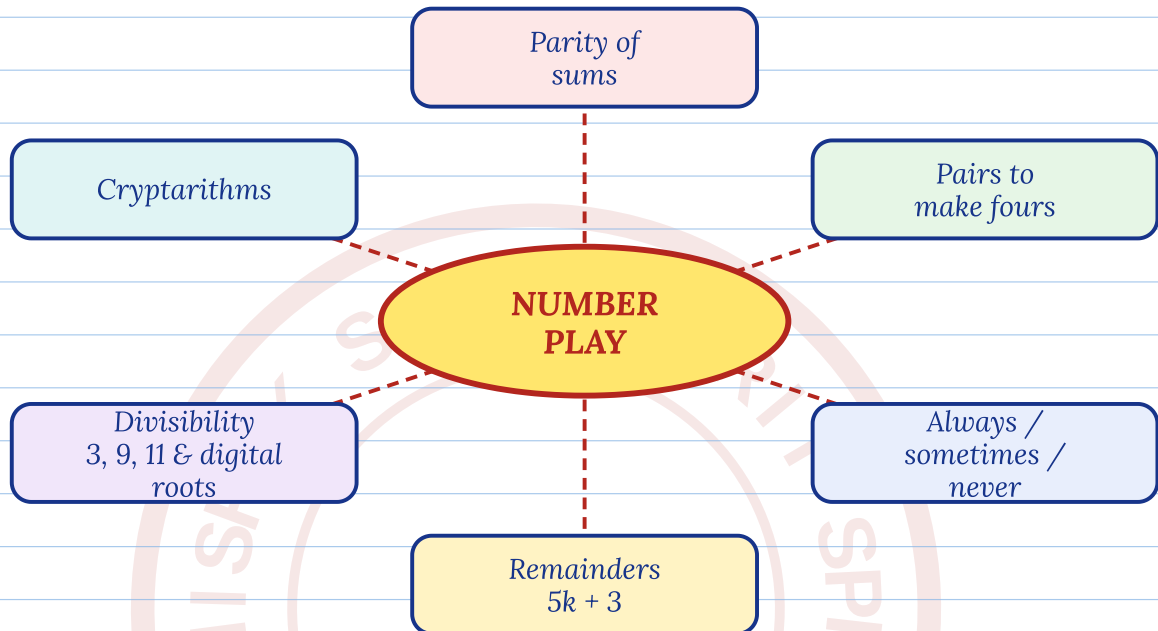
Term	Meaning
Parity	Whether a number is even or odd.
Consecutive numbers	Numbers following one another: $n, n + 1, n + 2 \dots$
Factor / Multiple	a is a factor of b if a divides b exactly; b is then a multiple of a .
Divisible	Leaves remainder 0.
Remainder	What is left after dividing as many whole times as possible.
LCM	Smallest number divisible by both numbers.
Coprime	Numbers with no common prime factor.
Digit sum	Sum of the digits of a number.
Digital root	Single digit got by adding digits repeatedly.
Conjecture	A statement believed true but not yet proved.
Counter-example	One example that shows a statement is false.
Cryptarithm	Puzzle where letters stand for digits.

Quick Revision & Formulas

- ▶ $\text{even} \pm \text{even} = \text{even}$; $\text{odd} \pm \text{odd} = \text{even}$; $\text{odd} \pm \text{even} = \text{odd}$. Sign changes in $a \pm b \pm c \pm \dots$ never change parity (change = $2 \times \text{number}$).
- ▶ Remainder forms: 'remainder r on dividing by n ' = $\mathbf{nk + r}$ (also $nk - (n - r)$). Add/subtract remainders: $(nk + r_1) \pm (nm + r_2)$.
- ▶ If $a \mid M$ and $a \mid N$ then $a \mid (M \pm N)$; if A divisible by k then by all factors of k ; divisible by k and $m \Rightarrow$ divisible by $\text{LCM}(k, m)$.
- ▶ Tests: $2 \rightarrow$ last digit even; $5 \rightarrow 0$ or 5 ; $10 \rightarrow 0$; $4 \rightarrow$ last 2 digits; $8 \rightarrow$ last 3 digits; $3 \rightarrow$ digit sum; $9 \rightarrow$ digit sum; $11 \rightarrow$ alternating sum (units +).
- ▶ $6 = 2 \ \& \ 3$; $12 = 3 \ \& \ 4$; $24 = 3 \ \& \ 8$; $36 = 4 \ \& \ 9$; $44 = 4 \ \& \ 11$; $18 = 2 \ \& \ 9$ (coprime pairs only).

- Digital root = remainder mod 9 (9 if divisible). Root of $(n + 10) = \text{root}(n) + 1$; root of $(n + 11) = \text{root}(n) + 2 \pmod{9}$.
- Product of 2 consecutive integers is a multiple of 2; of 3 $\rightarrow 6$; of 4 $\rightarrow 24$; of 5 $\rightarrow 120$.

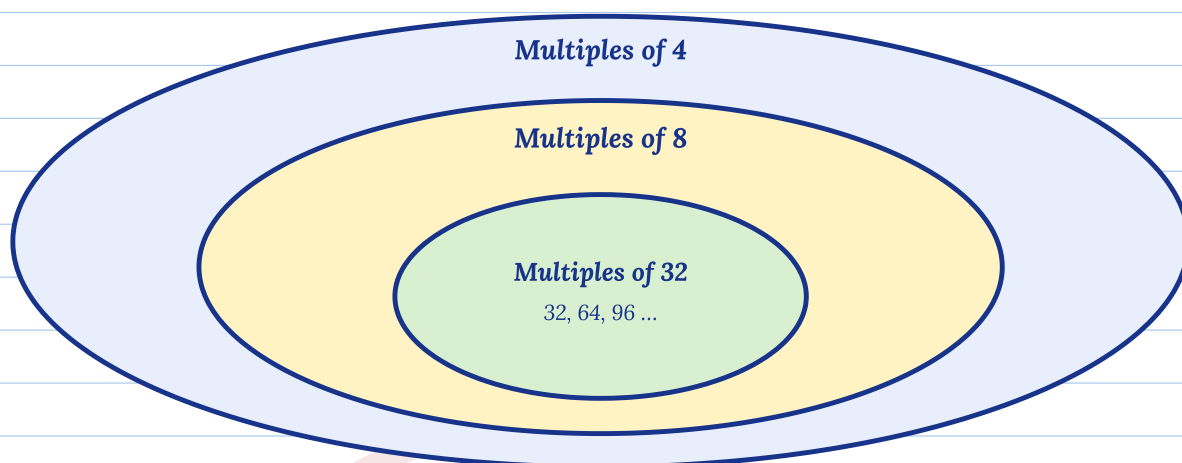
Diagrams, Tables & Flowcharts



Concept map of Chapter 5

Table: The eight $\pm$ expressions on 3, 4, 5, 6

Expression	Value	Parity
$3 + 4 + 5 + 6$	18	even
$3 + 4 + 5 - 6$	6	even
$3 + 4 - 5 + 6$	8	even
$3 + 4 - 5 - 6$	-4	even
$3 - 4 + 5 + 6$	10	even
$3 - 4 + 5 - 6$	-2	even
$3 - 4 - 5 + 6$	0	even
$3 - 4 - 5 - 6$	-12	even

Venn diagram: multiples of $32 \subset$ multiples of $8 \subset$ multiples of 4 

Nested sets – the correct picture for Figure it Out Q16 (diagram iv)

Table: Why the shortcuts work (place values)

Place	Value	Mod 9	Mod 11
Units	1	1	1 (one more)
Tens	10	1	-1 (one less)
Hundreds	100	1	1 (one more)
Thousands	1000	1	-1 (one less)
Ten-thousands	10000	1	1 (one more)

Flowchart: Is a number divisible by 24?**Textbook Solutions (All Questions)**

Math Talk (p.113–115) – Sums of consecutive numbers (Anshu's questions) and the eight $\pm$ expressions on four consecutive numbers.

Ans. Consecutive sums: every odd number $2k + 1 = k + (k + 1)$; powers of 2 can never be written as a sum of 2 or more consecutive natural numbers, other numbers can ($15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + \dots + 5$, so 15 has three ways); with negative numbers every number and 0 can be written ($0 = -1 + 0 + 1$). Four consecutive numbers 3, 4, 5, 6: values 18, 6, 8, -4, 10, -2, 0, -12; for 5, 6, 7, 8: 26, 10, 12, -4, 14, -2, 0, -16. Observation: all are even, and -2 and 0 occur for every start n ($n, n + 1, n + 2, n + 3$ give $4n + 6, 2n, 2n + 2, -2n - 4, 2n + 4, -2, 0, -$

$2n - 6$). Any four numbers a, b, c, d : all eight $a \pm b \pm c \pm d$ have the same parity (explanations 1–3), and the same holds for any number of terms.

Breaking Even (p.115) – Which arithmetic expressions are even? $43 + 37$, $672 - 348$, $4 \times 347 \times 3$, $708 - 477$, $809 + 214$, 119×303 , $543 - 479$, 513^3 . Which algebraic expressions are always even? $2a + 2b$, $3g + 5h$, $4m + 2n$, $2u - 4v$, $13k - 5k$, $6m - 3n$, $x^2 + 2$, $b^2 + 1$, $4k \times 3j$. Write a few of your own.

Ans. Arithmetic: $43 + 37$ (odd + odd) **even**; $672 - 348$ (even - even) **even**; $4 \times 347 \times 3$ (factor 4) **even**; $708 - 477$ (even - odd) odd; $809 + 214$ (odd + even) odd; 119×303 (odd $\times$ odd) odd; $543 - 479$ (odd - odd) **even**; 513^3 (odd $\times$ odd $\times$ odd) odd. Algebraic: $2a + 2b = 2(a + b)$ **always even**; $3g + 5h$ - not always ($g = 1, h = 2$ gives 13); $4m + 2n = 2(2m + n)$ **always even**; $2u - 4v = 2(u - 2v)$ **always even**; $13k - 5k = 8k$ **always even**; $6m - 3n$ - not always ($m = 1, n = 1$ gives 3); $x^2 + 2$ - not always ($x = 3$ gives 11, $x = 6$ gives 38); $b^2 + 1$ - not always ($b = 2$ gives 5, $b = 3$ gives 10); $4k \times 3j = 12kj$ **always even**. Own examples: $2n$, $6p + 10q$, $8a - 14b$, $(n)(n + 1)$.

Pairs to Make Fours (p.116–118) – When is the sum of two even numbers a multiple of 4? Write the explanation and examples for $4p$ and $(4q + 2)$. Always–Sometimes–Never statement 1: 'Determine if it is true with subtraction'.

Ans. Two even numbers: both multiples of 4 $\rightarrow 4p + 4q = 4(p + q)$, multiple of 4 ($12 + 16 = 28$). Both of the form $4p + 2 \rightarrow 4(p + q + 1)$, multiple of 4 ($6 + 10 = 16$, $22 + 6 = 28$). One of each $\rightarrow 4p + (4q + 2) = 4(p + q) + 2$, remainder 2, **not** a multiple of 4 ($8 + 6 = 14$; $4 + 10 = 14$); this is like even + odd = odd. Statement 1 with subtraction: $8a - 8b = 8(a - b)$ is again a multiple of 8 ($56 - 16 = 40 = 8 \times 5$) - true.

Always, Sometimes or Never (p.118–121) – Statements 6 and 7 (divisible by 9 & 4 $\Rightarrow$ 36; by 6 & 4 $\Rightarrow$ 24); statement 8 (odd + even = multiple of 6). What Remains: find numbers leaving remainder 3 when divided by 5 and the expressions that capture them.

Ans. 6: **Always true** - LCM(9, 4) = 36 and the number is divisible by the LCM. 7: **Sometimes true** - LCM(6, 4) = 12, so 12 is divisible by both 6 and 4 but not by 24, while 24 is. 8: **Never true** - $2n + (2m + 1) = 6j$ gives $2(n + m) = 6j - 1$, even = odd, impossible. Remainder 3 on division by 5: 3, 8, 13, 18, 23 ...; expressions: **(iv) $5k + 3$** ($k = 0, 1, 2 \dots$) and **(v) $5k - 2$** ($k \geq 1$) - both give 3, 8, 13, 18, 23. Others fail: (i) $3k + 5 \rightarrow 5, 8, 11 \dots$, (ii) $3k - 5 \rightarrow -2, 1, 4 \dots$, (iii) $3k/5$ is not a whole number in general, (vi) $5k - 3 \rightarrow 2, 7, 12 \dots$ (remainder 2).

Page 122, Figure it Out Q1–Q2 – (1) The sum of four consecutive numbers is 34; find them. (2) p is the greatest of five consecutive numbers; describe the other four.

Ans. Q1: let the numbers be $n, n + 1, n + 2, n + 3$: $4n + 6 = 34 \rightarrow 4n = 28 \rightarrow n = 7$, so **7, 8, 9, 10** (sum 34). Q2: the five consecutive numbers with greatest p are **$p - 4, p - 3, p - 2, p - 1, p$** .

Page 122 Q3 – Always / sometimes / never true (explain with examples, justify by algebra):

(i) sum of two even numbers is a multiple of 3; (ii) not divisible by 18 $\Rightarrow$ not divisible by 9; (iii) two numbers not divisible by 6 $\Rightarrow$ their sum is not divisible by 6; (iv) a multiple of 6 + a multiple of 9 is a multiple of 3; (v) a multiple of 6 + a multiple of 3 is a multiple of 9.

Ans. (i) **Sometimes** – $2 + 4 = 6$ and $4 + 8 = 12$ are multiples of 3, but $2 + 6 = 8$ and $6 + 8 = 14$ are not ($2a + 2b = 2(a + b)$, multiple of 3 only if 3 divides $a + b$). (ii) **Sometimes** – 30 is not divisible by 18 and not by 9, but 27 is not divisible by 18 yet is divisible by 9. (iii) **Sometimes** – $9 + 11 = 20$ (not divisible by 6) but $8 + 10 = 18$ is divisible by 6. (iv) **Always** – $6x + 9y = 3(2x + 3y)$. (v) **Sometimes** – $18 + 9 = 27$ is a multiple of 9, but $12 + 9 = 21$ is not ($6x + 3y = 3(2x + y)$, a multiple of 9 only if 3 divides $2x + y$).

Page 122 Q4–Q6 – (4) Numbers leaving remainder 2 when divided by 3 and by 4; algebraic expression. (5) The pebble riddle (remainder 1 on 3s, odd, remainder 1 on 5s, exactly divisible by 7, fewer than 100). (6) Tathagat: sum of any three numbers leaving remainder 2 on division by 6 is always a multiple of 6.

Ans. Q4: $x - 2$ must be a multiple of both 3 and 4, i.e. of LCM = 12, so $x = 12n + 2$: **2, 14, 26, 38, 50 ...** Q5: remainder 1 on 3 and on 5, and odd (remainder 1 on 2): remainder 1 on 3, 2, 5 $\rightarrow$ number = $30k + 1$ (LCM = 30): 31, 61, 91 (< 100); only $91 = 7 \times 13$ is divisible by 7 $\rightarrow$ **91**
pebbles. Q6: $(6a + 2) + (6b + 2) + (6c + 2) = 6a + 6b + 6c + 6 = 6(a + b + c + 1)$ – a multiple of 6.
Yes, Tathagat is right.

Page 122–123 Q7–Q8 – (7) 661 leaves remainder 3 and 4779 leaves remainder 5 on division by 7; find the remainders of $4779 + 661$ and $4779 - 661$ (algebra and visual). (8) Number leaving remainder 2 on $\div 3$, 3 on $\div 4$, 4 on $\div 5$; the smallest; why.

Ans. Q7: $4779 = 7p + 5$, $661 = 7q + 3$. (i) Sum = $7p + 7q + 8 = 7(p + q + 1) + 1 \rightarrow$ remainder 1 (visually: $5 + 3 = 8$ leftover counters make one more group of 7 and 1 remains). (ii) Difference = $7(p - q) + 2 \rightarrow$ remainder 2 ($5 - 3 = 2$ counters left). (Check: $4779 + 661 = 5440 = 7 \times 777 + 1$; $4779 - 661 = 4118 = 7 \times 588 + 2$.) Q8: each remainder is 1 less than its divisor, so the number + 1 is divisible by 3, 4 and 5, i.e. by LCM = 60. Numbers are $60k - 1$: 59, 119, 179 ... The smallest is **59**, because 60 is the smallest positive common multiple of 3, 4, 5.

Pages 123–126 – Divisibility for 2, 4, 5, 8; 9 (which of 999, 909, 900, 90, 990; 99 vs 109; remainder of 427); four statements about digit sums. Figure it Out p.126: (1) divisible by 9? 123, 405, 8888, 93547, 358095; (2) smallest multiple of 9 with no odd digits; (3) multiple of 9 closest to 6000; (4) how many multiples of 9 between 4300 and 4400?

Ans. Why the shortcuts work: 5 – every place value except units is a multiple of 10, hence of 5, so only the units digit (0 or 5) matters; 2 – units digit even; 4 – 100 is a multiple of 4,

so the last two digits decide; $8 - 1000$ is a multiple of 8, so the last three digits decide. 999, 909, 900, 90, 990 are all divisible by 9 (digits 0 and 9 only, each term is a multiple of 9); 99 is divisible by 9 but 109 is not (units digit 9 cannot decide). $427 \rightarrow 4 + 2 + 7 = 13 \rightarrow$ remainder 4. The four statements (i)–(iv) are **all correct** (rule is if and only if). Figure it Out: (1) digit sums 6, 9, 32, 28, 30 $\rightarrow$ only **405** is divisible by 9. (2) Digits must be even; digit sum a multiple of 9 and even $\rightarrow$ at least 18; two digits give at most 16, so three digits with sum 18, smallest = **288**. (3) $6000 \div 9 = 666 \text{ r } 6$; $9 \times 667 = 6003$ (3 away) and $9 \times 666 = 5994$ (6 away) $\rightarrow$ **6003**. (4) Multiples of 9 from 4302 to 4392: $(4392 - 4302) \div 9 + 1 = 11$.

Pages 126–129 – Divisibility by 3 and 11. Math Talk: is 462 divisible by 11? If the difference is 11 or a multiple of 11, what remainder? Divisibility by 11 for (i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076.

Ans. By 3: 10, 100, 1000 ... leave remainder 1 on division by 3, so a number leaves the same remainder as its digit sum – divisible by 3 $\Leftrightarrow$ digit sum divisible by 3. By 11: 462 – units 2, tens 6, hundreds 4: $(2 + 4) - 6 = 0 \rightarrow$ **divisible by 11** ($462 = 11 \times 42$). If the difference is 0, 11 or a multiple of 11, the remainder is **0** (divisible). Using (units digit with +, then alternate signs): (i) $8 - 5 + 1 = 4 \rightarrow$ remainder **4**; (ii) $1 - 4 + 8 = 5 \rightarrow$ remainder **5**; (iii) $1 - 8 + 4 = -3 \rightarrow$ remainder $11 - 3 = 8$; (iv) $9 - 2 + 5 - 5 = 7 \rightarrow$ remainder **7**; (v) $4 - 0 + 9 - 0 + 9 = 22 \rightarrow$ **divisible by 11**; (vi) $6 - 7 + 0 - 7 + 5 - 8 = -11 \rightarrow$ **divisible by 11**.

Page 129 – Fill the table (Yes/No) for divisibility by 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11: 128, 990, 1586, 275, 6686, 639210, 429714, 2856, 3060, 406839. Also 6 and 24 (p.129–130).

Ans. Number: 2 / 3 / 4 / 5 / 6 / 8 / 9 / 10 / 11 – 128: Y N Y N N Y N N N (the book's sample row prints 'No' for 4, but $128 = 4 \times 32$); 990: Y Y N Y Y N Y Y Y; 1586: Y N N N N N N N; 275: N N N Y N N N N Y; 6686: Y N N N N N N N N; 639210: Y Y N Y Y N N Y Y; 429714: Y Y N N Y N Y N N; 2856: Y Y Y N Y Y N N N; 3060: Y Y Y Y Y N Y Y N; 406839: N Y N N N N N N N. Quick method: use the last digit(s) for 2, 4, 5, 8, 10; digit sum for 3 and 9; $6 = (2 \text{ and } 3)$; alternating sum for 11. By 6: 38 ($\div 2$ only) no, 225 ($\div 3$ only) no, 186 ($\div 2$ and $\div 3$) yes, 64 ($\div 2$ only) no – matches actual division. By 24: check 3 and 8, not 4 and 6, because 12 is divisible by 4 and 6 but not by 24 ($4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ share a factor 2, LCM = 12; $24 = 2^3 \times 3$ needs 3 and $2^3 = 8$).

Pages 130–131 – Digital roots: between 600 and 700 which numbers have digital root (i) 5 (ii) 7 (iii) 3? Digital roots of 12 consecutive numbers; of consecutive multiples of 3, 4, 6; of numbers 1 more than a multiple of 6; the riddle 'made of digits each tiniest and odd'.

Ans. Digital root = remainder on division by 9 (9 if divisible). (i) Root 5 (digit sum 5 or 14): **608, 617, 626, 635, 644, 653, 662, 671, 680, 689, 698**. (ii) Root 7 (sum 7 or 16): **601, 610, 619,**

628, 637, 646, 655, 664, 673, 682, 691. (iii) Root 3 (sum 3 or 12): 606, 615, 624, 633, 642, 651, 660, 669, 678, 687, 696. 12 consecutive numbers (e.g. 20–31): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4 – roots cycle 1 to 9 and repeat. Multiples of 3: 3, 6, 9, 3, 6, 9 ...; of 4: 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3 ...; of 6: 6, 3, 9, 6, 3, 9 ...; 1 more than a multiple of 6 (7, 13, 19, 25 ...): 7, 4, 1, 7, 4, 1 ... (each step of $+k$ adds k to the root, mod 9). Riddle: digits all the tiniest odd digit 1; digit count, digit sum and root are all 9 (largest odd single digit) $\rightarrow$ **111,111,111** (nine 1's) = 11,11,11,111 = eleven crore eleven lakh eleven thousand one hundred eleven.

Page 131 Figure it Out Q1–Q4 on digital roots – (1) root of an 8-digit number is 5; root of the number + 10? (2) Add 11 repeatedly; what are the roots? (3) root of $9a + 36b + 13$. (4)

Conjectures: parity of a number and its root; root and remainder on $\div 3$ or 9.

Ans. Q1: adding 10 raises the remainder mod 9 by 1 ($10 = 9 + 1$), so the root is 6 (e.g. 40000001 $\rightarrow$ 5; 40000011 $\rightarrow$ 6). Q2: start with 10: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109, 120 ... roots **1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 1, 3 ...** – each $+11$ adds 2 to the root ($11 \equiv 2 \pmod{9}$); all nine roots appear and the pattern repeats every 9 steps. Q3: $9a + 36b + 13 = 9(a + 4b + 1) + 4 \rightarrow$ multiple of 9 plus 4 $\rightarrow$ root **4**. Q4: (i) no fixed relation – 12 (root 3) and 13 (root 4), 14 (root 5): parity of number and root can agree or differ. (ii) Root 1, 4, 7 $\rightarrow$ remainder 1 on $\div 3$; root 2, 5, 8 $\rightarrow$ remainder 2; root 3, 6, 9 $\rightarrow$ remainder 0. Root 9 $\rightarrow$ remainder 0 on $\div 9$; root less than 9 $\rightarrow$ the remainder on $\div 9$ equals the root.

Pages 131–132 (5.3 Digits in Disguise) – Solve: (i) $A1 + 1B = B0$ (ii) $AB + 37 = 6A$ (iii) $ON + ON + ON = PO$ (iv) $QR + QR + QR = PRR$ (v) $PQ \times 8 = RS$ (vi) $GH \times H = 9K$ (vii) $BYE \times 6 = RAY$ (Anshu's reasoning).

Ans. (i) $10A + 1 + 10 + B = 10B \rightarrow 10A + 11 = 9B$: $A = 7, B = 9 \rightarrow 71 + 19 = 90$. (ii) $10A + B + 37 = 60 + A \rightarrow 9A + B = 23$: $A = 2, B = 5 \rightarrow 25 + 37 = 62$. (iii) $3 \times ON = PO$ (all three ON's equal): solutions **$17 \times 3 = 51$ ($O = 1, N = 7, P = 5$); $24 \times 3 = 72$ ($O = 2, N = 4, P = 7$); $31 \times 3 = 93$ ($O = 3, N = 1, P = 9$)** – the answer key lists only the last. (iv) $3 \times QR = PRR$: **$85 \times 3 = 255$** ($Q = 8, R = 5, P = 2$) – the only solution (units: $3R$ ends in $R \rightarrow R = 0$ or 5 ; $R = 0$ gives $PRR = P00$ with $3Q = 10P$, impossible, so $R = 5$). (v) $PQ \times 8 = RS$: $PQ \leq 12$ ($13 \times 8 = 104$ is 3-digit) and $PQ \geq 12$ (10, 11 repeat digits) $\rightarrow$ **$12 \times 8 = 96$** ($P = 1, Q = 2, R = 9, S = 6$). (vi) $GH \times H = 9K$: only **$24 \times 4 = 96$** fits ($G = 2, H = 4, K = 6$): 12×8 and $46 \times 2, 47 \times 2, 31 \times 3$ do not have H as the multiplier; 11×9 repeats a digit; $16 \times 6 = 96$ gives $K = H = 6$ (two letters, one digit). (vii) $BYE \times 6 = RAY$: $B = 1$ ($B \geq 2$ gives a 4-digit product); $Y \leq 6$ and even ($Y = 0, 2, 4, 6$); trying: **$105 \times 6 = 630$** ($B = 1, Y = 0, E = 5, R = 6, A = 3$) – the only solution.

Page 132 – Solve: (i) $UT \times 3 = PUT$ (ii) $AB \times 5 = BC$ (iii) $L2N \times 2 = 2NP$ (iv) $XY \times 4 = ZX$ (v) $PP \times$

QQ = PRP (vi) $JK \times 6 = KKK$.

Ans. (i) $50 \times 3 = 150$ ($U = 5, T = 0, P = 1$). (ii) $19 \times 5 = 95$ ($A = 1, B = 9, C = 5$). (iii) $125 \times 2 = 250$ ($L = 1, N = 5, P = 0$) – also $124 \times 2 = 248$ ($L = 1, N = 4, P = 8$) fits all the rules. (iv) $23 \times 4 = 92$ ($X = 2, Y = 3, Z = 9$). (v) $22 \times 11 = 242$ ($P = 2, Q = 1, R = 4$) – also $33 \times 11 = 363$ ($P = 3, R = 6$) and $44 \times 11 = 484$ ($P = 4, R = 8$) fit. (vi) $74 \times 6 = 444$ ($J = 7, K = 4$). (All checked by computer search; the answer key gives only one solution for (iii) and (v).)

Page 132 Figure it Out Q1–Q4 – (1) $31z5$ is a multiple of 9; find z and explain two answers. (2)

Snehal: a number with remainder 8 on $\div 12$ plus a number 4 short of a multiple of 12 is

always a multiple of 8. (3) When is the sum of two multiples of 3 a multiple of 6? (4)

Sreelatha: reversing digits of a multiple of 9 keeps it a multiple of 9.

Ans. Q1: $3 + 1 + z + 5 = 9 + z$ must be a multiple of 9, so $z = 0$ or 9 (3105 and 3195); two answers because the digit sum can be 9 or 18, both multiples of 9. Q2: $a = 12n + 8, b = 12m - 4 \rightarrow a + b = 12(n + m) + 4 = 4(3k + 1)$ with $k = n + m$. This is a multiple of 8 only when $3k + 1$ is even, i.e. k odd ($k = 1$: 16 yes; $k = 2$: 28 no). So the claim is **not always true** (it is sometimes true). Q3: $3m + 3n = 3(m + n)$ is a multiple of 6 $\Leftrightarrow m + n$ is even $\Leftrightarrow m$ and n have the same parity, i.e. both multiples of 6 (even m, n) or both odd multiples of 3 ($3 + 9 = 12$); it is not when one is an odd multiple of 3 and the other an even multiple ($3 + 6 = 9$). Q4: (i) **True** – reversing keeps the same digits so the digit sum is unchanged and still a multiple of 9 ($4572 \rightarrow 2754$: 18). (ii) **Yes** – any rearrangement of digits keeps the digit sum, so every shuffle stays a multiple of 9.

Page 132–133 Figure it Out Q5–Q8 – (5) $48a23b$ is a multiple of 18: pairs (a, b) . (6) $3p7q8$

divisible by 44: pairs (p, q) . (7) Three consecutive numbers: multiple of 2, 3, 4 in order; how often? (8) Five multiples of 36 between 45,000 and 47,000.

Ans. Q5: multiple of 18 = divisible by 2 and 9; b even; digit sum $17 + a + b$ a multiple of 9 (18 or 27). $b = 0 \rightarrow a = 1$; $b = 2 \rightarrow a = 8$; $b = 4 \rightarrow a + 21$: $27 \rightarrow a = 6$; $b = 6 \rightarrow a + 23$: $27 \rightarrow a = 4$; $b = 8 \rightarrow a + 25$: $27 \rightarrow a = 2$. Pairs (a, b) : **(1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)** (e.g. $481230 \div 18 = 26735$). Q6: $44 = 4 \times 11$. $q8$ must be divisible by 4: $q = 0, 2, 4, 6, 8$; for 11: $(8 + 7 + 3) - (p + q) = 18 - (p + q)$ must be 0 or $\pm 11 \rightarrow p + q = 7$ (18 gives $p + q = 18$, impossible with q even and digits ≤ 9 except $p = q = 9 - q$ must be even, so no). Pairs: **$(p, q) = (7, 0), (5, 2), (3, 4), (1, 6)$** (e.g. $37048 = 44 \times 842$). Q7: $n, n + 1, n + 2$ with $2 \mid n, 3 \mid (n + 1), 4 \mid (n + 2)$: **2, 3, 4**; next **14, 15, 16**, then 26, 27, 28 – the pattern repeats **every 12** (LCM of 2, 3, 4). Q8: multiples of 36 are divisible by 4 and 9: **45036, 45072, 45108, 45144, 45180** (add 36 each time; the first is 36×1251).

Page 133 Figure it Out Q9–Q13 – (9) middle of 5 consecutive even numbers is $5p$; the others.

(10) A 6-digit number divisible by 15 whose reverse is divisible by 6. (11) Deepak: some

multiples of 11 stay multiples of 11 when doubled, others do not. (12) Always / sometimes / never: (i) product of multiple of 6 and multiple of 3 is a multiple of 9; (ii) sum of three consecutive even numbers divisible by 6; (iii) abcdef multiple of 6 $\Rightarrow$ badcef multiple of 6; (iv) $8(7b - 3) - 4(11b + 1)$ is a multiple of 12. (13) When is the sum of 3 numbers divisible by 3?

Ans. Q9: consecutive even numbers differ by 2: $5p - 4, 5p - 2, 5p, 5p + 2, 5p + 4$. Q10: divisible by 15 $\rightarrow$ by 3 and 5 $\rightarrow$ last digit 0 or 5; if it ended in 0 the reverse would start with 0 (not 6-digit), so last digit 5; the reverse must be even, so the first digit $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ (reverse ends in a); digit sum a multiple of 3: e.g. **200025** (digit sum 9; reverse 520002 is even with digit sum 9 $\rightarrow$ divisible by 6). Q11: Deepak is **wrong** – if $n = 11k$, $2n = 22k = 11(2k)$ is **always** a multiple of 11. Q12: (i) **Always** – $6x \times 3y = 18xy = 9(2xy)$. (ii) **Always** – $(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 6n$. (iii) **Always** – swapping within pairs ($ab \rightarrow ba, cd \rightarrow dc$) keeps the digit sum (so divisibility by 3) and the units digit f (so evenness). (iv) **Never** – $8(7b - 3) - 4(11b + 1) = 56b - 24 - 44b - 4 = 12b - 28 = 12(b - 3) + 8$: remainder 8 on division by 12. Q13: sum of three numbers is divisible by 3 when their remainders on $\div 3$ are **all the same (0, 0, 0 or 1, 1, 1 or 2, 2, 2) or all different (0, 1, 2 in any order)** – exactly when the remainders add up to 0, 3 or 6. Other cases (like 0, 0, 1 or 1, 1, 2) are not divisible.

Page 133–134 Figure it Out Q14–Q16 – (14) Is the product of 2, 3, 4, 5 consecutive integers always a multiple of 2, 6, ...? (15) Cryptarithms (i) $EF \times E = GGG$ (ii) $WOW \times 5 = MEOW$. (16) Which Venn diagram shows multiples of 4, 8, 32? Also the Navakankari game (p.135).

Ans. Q14: **2 consecutive:** one of them is even $\rightarrow$ product multiple of 2. **3 consecutive:** one is a multiple of 3 and at least one is even $\rightarrow$ multiple of 6 (always). **4 consecutive:** two are even (one of them a multiple of 4) and one is a multiple of 3 $\rightarrow$ multiple of $4 \times 2 \times 3 = 24$. **5 consecutive:** the 4-consecutive argument gives 24 and a multiple of 5 appears too $\rightarrow$ multiple of $24 \times 5 = 120$. (Examples: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 6 \times 10$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.) Q15: (i) $37 \times 3 = 111$ ($E = 3, F = 7, G = 1$; $GGG = 111 \times 1$, so $E \times EF = 111 \times G$ and $111 = 3 \times 37$). (ii) $575 \times 5 = 2875$ ($W = 5, O = 7, M = 2, E = 8$). Q16: every multiple of 32 is a multiple of 8 and every multiple of 8 is a multiple of 4 – **nested circles with 32 inside 8 inside 4 $\rightarrow$ diagram (iv)** (the labelling in (iii) puts the names the wrong way round). Navakankari (Nine Men's Morris) is a two-player game – no questions to solve.

Board-Pattern Questions – 1 Mark

1. What is the digital root of 489710? (1)

Ans. $4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29 \rightarrow 2 + 9 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$.

2. State the divisibility rule for 9. (1)

Ans. A number is divisible by 9 if and only if the sum of its digits is divisible by 9.

3. What is the remainder when 427 is divided by 9? (1)

Ans. $4 + 2 + 7 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$. Remainder 4.

4. Is 462 divisible by 11? (1)

Ans. Yes: $(2 + 4) - 6 = 0$.

5. Write the general form of numbers leaving remainder 3 when divided by 5. (1)

Ans. $5k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).

6. Is the sum of two even numbers always even? (1)

Ans. Yes – even + even = even ($2a + 2b = 2(a + b)$).

7. What is the digital root of any multiple of 9? (1)

Ans. 9.

8. Find the value of z if $31z5$ is divisible by 9 (give one value). (1)

Ans. $3 + 1 + z + 5 = 9 + z$, so $z = 0$ (or 9).

9. Smallest number leaving remainders 2, 3, 4 when divided by 3, 4, 5. (1)

Ans. 59 (one less than LCM 60).

10. Is 12 divisible by 24? Is it divisible by both 4 and 6? (1)

Ans. 12 is not divisible by 24 but is divisible by both 4 and 6.

11. Product of three consecutive integers is always a multiple of what number? (1)

Ans. 6.

12. Do all expressions $a \pm b \pm c \pm d$ have the same parity? (1)

Ans. Yes – switching a sign changes the value by an even number (twice that number).

Board-Pattern Questions – 3 Marks**1. Show that $4m + 2q$ is always even but $x^2 + 2$ is not. (3)**

Ans. $4m + 2q = 2(2m + q)$ has the factor 2, so it is even for all integers m, q (e.g. $m = 4, q = -9$ gives -2). $x^2 + 2$: x^2 is even if x is even and odd if x is odd, so $x = 6$ gives 38 (even) but $x = 3$ gives 11 (odd) – not always even.

2. Find the remainder when 7309 is divided by 9 and explain why the digit-sum method works. (3)

Ans. $7 + 3 + 0 + 9 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$, remainder 1. Reason: $7309 = 7(999 + 1) + 3(99 + 1) + 0(9 + 1) + 9 = (\text{multiple of } 9) + (7 + 3 + 0 + 9)$ because 10, 100, 1000 are each one more than a multiple of 9, so only the digit sum is left to test.

3. Check divisibility of 857076 by 11 using the alternating sum. (3)

Ans. Starting from the units digit with '+': $6 - 7 + 0 - 7 + 5 - 8 = -11$, which is a multiple of 11, so 857076 is divisible by 11 ($857076 = 11 \times 77916$).

4. If $31z5$ is a multiple of 9, find z and explain why there are two answers. (3)

Ans. Digit sum $= 3 + 1 + z + 5 = 9 + z$ must be a multiple of 9, so $9 + z = 9$ or $18 \rightarrow z = 0$ or 9 (3105 and 3195, both divisible by 9). Two answers because digit sums 9 and 18 are both multiples of 9 and z can range from 0 to 9.

5. Solve the cryptarithm $AB \times 5 = BC$ and justify. (3)

Ans. $5 \times B$ ends in C and the product BC has the same tens digit as the units digit B of AB . $AB \times 5$ is a 2-digit number so $AB \leq 19$; AB must be 10 to 19: $A = 1$. $5 \times (10 + B) = 50 + 5B = 10B + C \rightarrow 50 = 5B + C$. $B = 9$ gives $C = 5$ ($B = 8$ gives $C = 10$, impossible). So $19 \times 5 = 95$: $A = 1$, $B = 9$, $C = 5$.

Board-Pattern Questions – 5 Marks**1. Prove with algebra: (a) if 8 divides two numbers, it divides their sum and difference; (b) 'if 8 divides a number, it divides any two numbers adding up to it' is only sometimes true. (5)**

Ans. (a) Let the numbers be $8a$ and $8b$: $8a + 8b = 8(a + b)$ and $8a - 8b = 8(a - b)$ – both multiples of 8 ($8 + 16 = 24$, $56 - 16 = 40$). In general if $a \mid M$ and $a \mid N$ then $a \mid (M \pm N)$. (b) $72 = 8 \times 9 = 48 + 24$, and 48 and 24 are multiples of 8 – works; but $72 = 50 + 22$ and neither 50 nor 22 is a multiple of 8 – fails. The statement holds for some splittings only, so it is sometimes true.

2. Derive the divisibility rule for 11 using place values and test 90904 and 481 (give remainders). (5)

Ans. Units $1 = 11 \times 0 + 1$ (1 more than a multiple of 11), tens $10 = 11 - 1$ (1 less), hundreds $100 = 99 + 1$ (1 more), thousands $1000 = 1001 - 1$ (1 less) ... alternately. So a number leaves the remainder (sum of digits in units, hundreds, ... places) – (sum of digits in tens, thousands, ... places) on division by 11 (add 11 if negative). 90904: $(4 + 9 + 9) - (0 + 0) = 22 \rightarrow$ divisible by 11 ($90904 = 11 \times 8264$). 481: $(1 + 4) - 8 = -3 \rightarrow$ remainder $11 - 3 = 8$ ($481 = 11 \times 43 + 8$).

3. If $48a23b$ is a multiple of 18, find all possible pairs (a, b) with reasoning. (5)

Ans. $18 = 2 \times 9$ (coprime), so the number must be even and have digit sum a multiple of 9. Even: $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Digit sum $= 4 + 8 + a + 2 + 3 + b = 17 + a + b$ must be 18 or 27 (36 is too big). $b = 0$: $17 + a = 18 \rightarrow a = 1$. $b = 2$: $19 + a = 27 \rightarrow a = 8$. $b = 4$: $21 + a = 27 \rightarrow a = 6$. $b = 6$: $23 + a = 27 \rightarrow a = 4$. $b = 8$: $25 + a = 27 \rightarrow a = 2$. Pairs (a, b) : $(1, 0)$, $(8, 2)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$, $(2, 8)$.

हिन्दी भाग (Hindi Section)

संख्या का खेल

कक्षा 8 गणित (गणित प्रकाश भाग 1) • अध्याय 5 • विस्तृत नोट्स + सभी पाठ्यपुस्तक हल + बोर्ड प्रश्न (2026-27)

आसान भाषा में अध्याय की समीक्षा

1. क्रमागत संख्याओं का योग

- ▶ खोज (अंशु): $7 = 3 + 4$, $10 = 1 + 2 + 3 + 4$, $12 = 3 + 4 + 5$, $15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ । निष्कर्ष (मेरे द्वारा जाँचे हुए): हर विषम संख्या दो क्रमागत संख्याओं का योग है ($2k + 1 = k + (k + 1)$); 2 की घातें (2, 4, 8, 16, ...) दो या अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग के रूप में नहीं लिखी जा सकतीं, बाकी सब लिखी जा सकती हैं; कुछ संख्याएँ (15, 9, 18) एक से अधिक प्रकार से लिखी जा सकती हैं; ऋणात्मक संख्याएँ लें तो हर संख्या लिखी जा सकती है ($7 = -6 + \dots + 7$) और $0 = -1 + 0 + 1$ ।
- ▶ 4 क्रमागत संख्याओं के बीच चिह्न: 3, 4, 5, 6 के बीच '+' या '-' लगाने पर 8 व्यंजक बनते हैं: $3+4+5+6 = 18$, $3+4+5-6 = 6$, $3+4-5+6 = 8$, $3+4-5-6 = -4$, $3-4+5+6 = 10$, $3-4+5-6 = -2$, $3-4-5+6 = 0$, $3-4-5-6 = -12$ । सभी सम हैं; किसी भी आरंभिक संख्या n के लिए मान $4n+6$, $2n$, $2n+2$, $-2n-4$, $2n+4$, -2 , 0 , $-2n-6$ हैं - इसलिए -2 और 0 हमेशा आते हैं।

2. समता - हर चिह्न-चयन की समता एक-सी क्यों

- ▶ समता (parity) = संख्या सम है या विषम (-2 , -4 जैसी ऋणात्मक संख्याएँ भी सम हैं)। किन्हीं भी चार संख्याओं a, b, c, d के लिए $a \pm b \pm c \pm d$ के आठों मान एक ही समता के होते हैं (4 क्रमागत संख्याओं पर जाँचा - सब सम)।
- ▶ व्याख्या 1: एक चिह्न बदलने से मान $2 \times$ (वह संख्या) से बदलता है, जैसे $(a + b - c - d) - (a - b - c - d) = 2b$ - सम संख्या; जिन दो संख्याओं का अंतर सम हो उनकी समता एक-सी होती है। - को + करने पर भी परिवर्तन $2c$ या $2d$ है। एक व्यंजक से चिह्न बदलकर बाकी 7 मिलते हैं, इसलिए आठों की समता एक-सी।
- ▶ व्याख्या 2: विषम $\pm$ विषम = सम; सम $\pm$ सम = सम; विषम $\pm$ सम = विषम। इसलिए $a + b$ और $a - b$ की समता एक-सी; c जोड़ने/घटाने पर भी बराबर; अतः सभी $a \pm b \pm c \pm d$ एक-से।
- ▶ व्याख्या 3: टोकन मॉडल - चिह्न बदलने पर b धनात्मक टोकन की जगह b ऋणात्मक टोकन, यानी $2b$ का परिवर्तन। यह विचार केवल 4 संख्याओं तक सीमित नहीं - किसी भी संख्या में काम करता है।

3. ब्रेकिंग ईवन - व्यंजकों की समता

- ▶ नियम: सम + सम, सम - सम, विषम + विषम, विषम - विषम = सम; सम + विषम, सम - विषम = विषम; जिस गुणनफल में कोई गुणनखंड सम हो वह सम; विषम $\times$ विषम = विषम; $(\text{विषम})^n$ विषम।

- **बीजगणित:** व्यंजक सदा सम है यदि 2 उसका गुणनखंड हो, जैसे $4m + 2q = 2(2m + q)$; $2a + 2b$; $2u - 4v$; $13k - 5k = 8k$; $4k \times 3j$ । सदा सम नहीं: $3g + 5h$ (g, h की समता एक-सी हो तभी सम), $6m - 3n$ (n विषम हो तो विषम), $x^2 + 2$ ($x = 3$ पर 11), $b^2 + 1$ ($b = 2$ पर 5)।

4. जोड़ी से चार के गुणज

सम संख्याएँ दो प्रकार की हैं: 4 के गुणज ($4p$, शेषफल 0) और $4p + 2$ (शेषफल 2)। $4p + 4q = 4(p + q) - 4$ का गुणज; $(4p + 2) + (4q + 2) = 4(p + q + 1) - 4$ का गुणज (दोनों 2 मिलकर 4); $4p + (4q + 2) = 4(p + q) + 2$ - शेषफल 2, 4 का गुणज नहीं। इसलिए दो सम संख्याओं का योग 4 का गुणज तभी है जब दोनों 4 के गुणज हों या दोनों न हों। (उदाहरण: $12 + 16 = 28$; $6 + 10 = 16$; $8 + 6 = 14$ ।)

5. सदा, कभी-कभी या कभी नहीं सत्य?

#	कथन	निर्णय व कारण
1	यदि 8 दो संख्याओं को भाग दे तो उनके योग को भी देगा	सदा - $8a + 8b = 8(a + b)$; अंतर के लिए भी
2	यदि 8 किसी संख्या को भाग दे तो वह उसके योग वाली किन्हीं दो संख्याओं को भी देगा	कभी-कभी - $72 = 48 + 24$ (हाँ) पर $72 = 50 + 22$ (नहीं)
3	7 से विभाज्य संख्या के सभी गुणज 7 से विभाज्य	सदा - $(7j) \times m = 7(jm)$
4	12 से विभाज्य हो तो 12 के सभी गुणनखंडों से भी	सदा - $12m = 2 \times 6m = 3 \times 4m \dots$
5	7 से विभाज्य हो तो 7 के किसी भी गुणज से विभाज्य	कभी-कभी - 42, 14 से विभाज्य पर 28 से नहीं; $7k \div 7m$ तभी जब m, k का गुणनखंड हो
6	9 और 4 दोनों से विभाज्य $\Rightarrow$ 36 से	सदा - $\text{LCM}(9, 4) = 36$
7	6 और 4 दोनों से विभाज्य $\Rightarrow$ 24 से	कभी-कभी - $\text{LCM}(6, 4) = 12$, 24 नहीं; 12 दोनों से विभाज्य पर 24 से नहीं; 24 है
8	विषम + सम = 6 का गुणज	कभी नहीं - 6 के गुणज सम; विषम + सम विषम ($2n + 2m + 1 = 6j$ से सम = विषम)

सामान्य नियम: यदि a, M और N को भाग दे तो $a, M + N$ और $M - N$ को भी भाग देगा; यदि A, k से विभाज्य हो तो A के सभी गुणज और k के सभी गुणनखंड A को भाग देते हैं; यदि A, k और m दोनों से विभाज्य हो तो $A, \text{LCM}(k, m)$ से विभाज्य है।

6. क्या शेष रहता है?

5 से भाग देने पर शेषफल 3 वाली संख्याएँ: $3, 8, 13, 18, 23, \dots = 5k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), या $5k - 2$ ($k \geq 1$) - '5 के गुणज से 3 अधिक' या '5 के गुणज से 2 कम'। विकल्पों (i) $3k + 5$, (ii) $3k$

– 5, (iii) $3k/5$, (iv) $5k + 3$, (v) $5k - 2$, (vi) $5k - 3$ में केवल (iv) और (v) सही हैं ((vi) से 2, 7, 12 ... शेषफल 2)। शेषफल जुड़ते-घटते हैं: $661 = 7q + 3$ और $4779 = 7p + 5$ से $4779 + 661 = 7(p + q + 1) + 1$ (शेषफल 1) और $4779 - 661 = 7(p - q) + 2$ (शेषफल 2)।

7. विभाज्यता के नियम और वे क्यों काम करते हैं

- ▶ **सामान्य रूप:** संख्या $\dots dcba = \dots + 1000d + 100c + 10b + a$ ($a =$ इकाई अंक)। **10:** इकाई को छोड़ हर स्थानीय मान 10 का गुणज, इसलिए 10 से विभाज्य $\Leftrightarrow a = 0$ । **5:** $\Leftrightarrow a = 0$ या 5। **2:** $\Leftrightarrow a$ सम। **4:** 100, 4 का गुणज है, इसलिए $\Leftrightarrow$ अंतिम दो अंकों से बनी संख्या $(10b + a)$ 4 से विभाज्य। **8:** 1000, 8 का गुणज है, इसलिए $\Leftrightarrow$ अंतिम तीन अंकों से बनी संख्या 8 से विभाज्य।
- ▶ **9:** $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$... इसलिए हर स्थानीय मान 9 का गुणज + 1। $7309 = 7(999 + 1) + 3(99 + 1) + 0(9 + 1) + 9 = (9 \text{ का गुणज}) + (7 + 3 + 0 + 9)$ । **संख्या 9 से विभाज्य $\Leftrightarrow$ अंकों का योग 9 से विभाज्य**, और 9 से भाग देने पर शेषफल = अंकों का योग (एक अंक बचने तक अंक जोड़ते रहो = डिजिटल रूट; 9 का अर्थ शेषफल 0)। उदाहरण: $427 \rightarrow 4 + 2 + 7 = 13 \rightarrow$ शेषफल 4। $7309 \rightarrow 19 \rightarrow 10 \rightarrow 1$ ।
- ▶ **3:** 10, 100, 1000 ... सब 3 से भाग देने पर शेषफल 1 देते हैं (क्योंकि 9, 99, 999 ... से 1 अधिक), इसलिए 3 से विभाज्य $\Leftrightarrow$ अंकों का योग 3 से विभाज्य (9 का हर गुणज 3 का गुणज है, पर 15, 33, 87 3 के गुणज हैं 9 के नहीं)। 9 वाले चारों कथन – (i), (ii), (iii), (iv) – सब सही हैं क्योंकि नियम 'यदि और केवल यदि' है ((iii), (iv) क्रमशः (ii), (i) के प्रतिधनात्मक कथन हैं)।
- ▶ **11:** इकाई $1 = 11 \times 0 + 1$ (1 अधिक), दहाई $10 = 11 - 1$ (1 कम), सैकड़ा $100 = 99 + 1$ (1 अधिक), हज़ार $1000 = 1001 - 1$ (1 कम) ... बारी-बारी 1 अधिक / 1 कम। **नियम:** (इकाई, सैकड़ा, दस-हज़ार ... स्थान के अंकों का योग) – (दहाई, हज़ार, ... स्थान के अंकों का योग) = अंतर; 11 से विभाज्य $\Leftrightarrow$ अंतर 0 या 11 का गुणज; अन्यथा अंतर (ऋणात्मक हो तो 11 जोड़कर) शेषफल है। उदाहरण $328105: (5 + 1 + 2) - (0 + 8 + 3) = 8 - 11 = -3$, शेषफल 8। समान विधि: इकाई अंक से + लेकर बारी-बारी चिह्न: $5 - 0 + 1 - 8 + 2 - 3 = -3$ ।
- ▶ **6 और 24:** 6 से विभाज्यता = 2 और 3 से विभाज्य (2 और 3 का कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड नहीं)। 24 के लिए 3 और 8 जाँचो (4 और 6 नहीं): 12, 4 और 6 दोनों से विभाज्य है पर 24 से नहीं – क्योंकि 4×6 में गुणनखंड 2 उभयनिष्ठ है ($24 = 2^3 \times 3$, $4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$, $\text{LCM}(4, 6) = 12$)। गुणनखंड-युग्म तभी काम करता है जब वे सह-अभाज्य हों (कोई अभाज्य उभयनिष्ठ न हो)।

8. डिजिटल रूट

- ▶ **डिजिटल रूट** = एक अंक बचने तक अंक जोड़ते रहना ($489710 \rightarrow 29 \rightarrow 11 \rightarrow 2$)। यह 9 से भाग का शेषफल है (9 से विभाज्य हो तो 9)। क्रमागत संख्याओं के डिजिटल रूट 1, 2, ..., 9, 1, 2, ... दोहराते हैं। 3 के गुणज: 3, 6, 9 दोहराते; 4 के गुणज: 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9; 6 के गुणज: 6, 3, 9; 6 के गुणज से 1 अधिक (7, 13, 19, ...): 7, 4, 1 दोहराते। 11 जोड़ने पर रूट हर बार 2

बढ़ता है (मॉड 9)। आर्यभट्ट द्वितीय (लगभग 950 ई., महासिद्धान्त) ने इसे गणनाओं की जाँच में प्रयोग किया।

9. अंकों का भेस - क्रिप्टेरिथम

हर अक्षर = एक अंक, अलग अक्षर = अलग अंक, किसी संख्या का पहला अंक कभी 0 नहीं।

विधि: पहले इकाई का स्तंभ देखो (गुणनफल किन अंकों पर समाप्त हो सकता है?), फिर आकार (2-अंकीय $\times$ 1-अंकीय उत्तर 2-अंकीय ही रहे, इसलिए $13 \times 8 = 104$ बहुत बड़ा), समता, हासिल और विभाज्यता का प्रयोग करो। हमेशा मान रखकर जाँचो और सभी हल खोजो।

महत्वपूर्ण शब्द (शब्दावली)

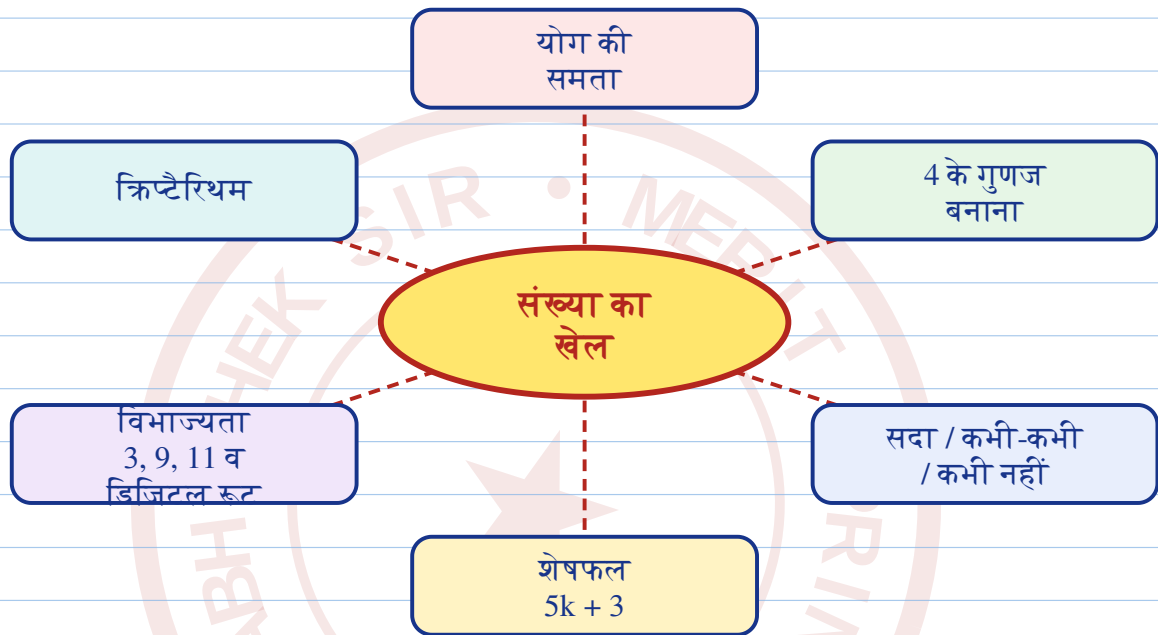
शब्द	अर्थ / परिभाषा
समता	संख्या सम है या विषम।
क्रमागत संख्याएँ	एक के बाद एक आने वाली संख्याएँ: $n, n + 1, n + 2 \dots$
गुणनखंड / गुणज	a, b को पूरा भाग दे तो a गुणनखंड और b, a का गुणज।
विभाज्य	शेषफल 0 आता है।
शेषफल	पूरे-पूरे भाग देने के बाद बचा भाग।
लघुत्तम समापवर्त्य	दोनों संख्याओं से विभाज्य सबसे छोटी संख्या।
सह-अभाज्य	जिनका कोई उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखंड न हो।
अंकों का योग	संख्या के अंकों का योग।
डिजिटल रूट	बार-बार अंक जोड़ने पर मिला एक अंक।
अनुमान	ऐसा कथन जो सत्य माना जाए पर सिद्ध न हो।
प्रति-उदाहरण	एक उदाहरण जो कथन को गलत सिद्ध करे।
क्रिप्टेरिथम	ऐसी पहेली जिसमें अक्षर अंकों को दर्शाते हैं।

त्वरित पुनरावृत्ति व सूत्र

- ▶ $\text{सम} \pm \text{सम} = \text{सम}$; $\text{विषम} \pm \text{विषम} = \text{सम}$; $\text{विषम} \pm \text{सम} = \text{विषम}$ । $a \pm b \pm c \pm \dots$ में चिह्न बदलने से समता नहीं बदलती (परिवर्तन = $2 \times \text{संख्या}$)।
- ▶ शेषफल रूप: ' n से भाग देने पर शेषफल r ' = $nk + r$ (या $nk - (n - r)$)। शेषफल जोड़ो/घटाओ: $(nk + r_1) \pm (nm + r_2)$ ।
- ▶ यदि $a \mid M$ और $a \mid N$ तो $a \mid (M \pm N)$; A, k से विभाज्य तो k के सब गुणनखंडों से; k और m से विभाज्य $\Rightarrow \text{LCM}(k, m)$ से।
- ▶ परीक्षण: $2 \rightarrow$ अंतिम अंक सम; $5 \rightarrow 0$ या 5 ; $10 \rightarrow 0$; $4 \rightarrow$ अंतिम 2 अंक; $8 \rightarrow$ अंतिम 3 अंक; $3 \rightarrow$ अंकों का योग; $9 \rightarrow$ अंकों का योग; $11 \rightarrow$ बारी-बारी का योग (इकाई +)।

- ▶ $6 = 2 \text{ व } 3$; $12 = 3 \text{ व } 4$; $24 = 3 \text{ व } 8$; $36 = 4 \text{ व } 9$; $44 = 4 \text{ व } 11$; $18 = 2 \text{ व } 9$ (केवल सह-अभाज्य युग्म)।
- ▶ डिजिटल रूट = 9 से शेषफल (विभाज्य हो तो 9)। $(n + 10)$ का रूट = रूट(n) + 1; $(n + 11)$ का रूट = रूट(n) + 2 (मॉड 9)।
- ▶ 2 क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल 2 का गुणज; 3 का $\rightarrow 6$; 4 का $\rightarrow 24$; 5 का $\rightarrow 120$ ।

चित्र, तालिकाएँ और फ्लोचार्ट

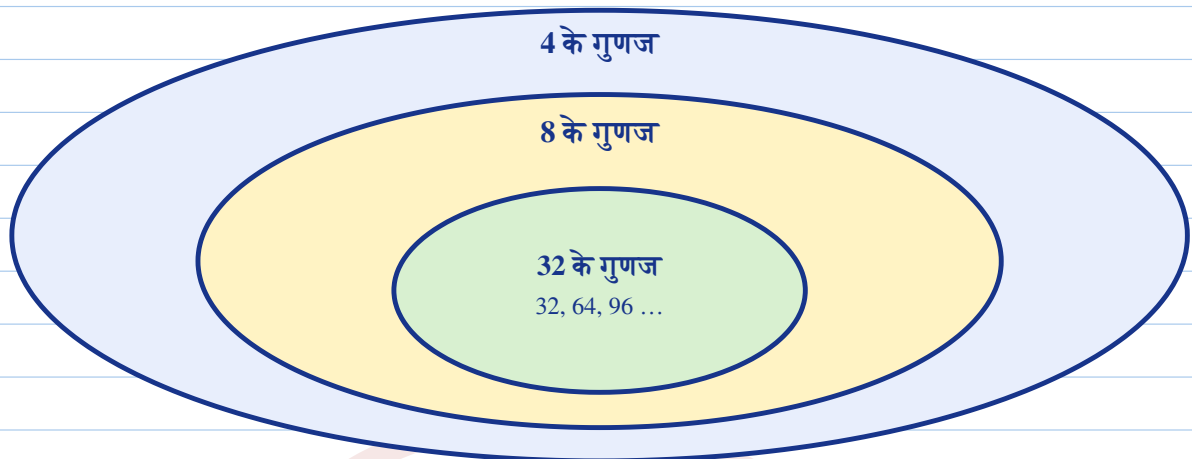


अध्याय 5 का अवधारणा-मानचित्र

तालिका : 3, 4, 5, 6 पर आठ $\pm$ व्यंजक

व्यंजक	मान	समता
$3 + 4 + 5 + 6$	18	सम
$3 + 4 + 5 - 6$	6	सम
$3 + 4 - 5 + 6$	8	सम
$3 + 4 - 5 - 6$	-4	सम
$3 - 4 + 5 + 6$	10	सम
$3 - 4 + 5 - 6$	-2	सम
$3 - 4 - 5 + 6$	0	सम
$3 - 4 - 5 - 6$	-12	सम

वेन आरेख : 32 के गुणज $\subset$ 8 के गुणज $\subset$ 4 के गुणज



एक के भीतर एक समुच्चय – Figure it Out प्र16 का सही चित्र (आरेख iv)

तालिका : नियम क्यों काम करते हैं (स्थानीय मान)

स्थान	मान	9 से शेष	11 से शेष
इकाई	1	1	1 (1 अधिक)
दहाई	10	1	-1 (1 कम)
सैकड़ा	100	1	1 (1 अधिक)
हज़ार	1000	1	-1 (1 कम)
दस-हज़ार	10000	1	1 (1 अधिक)

फ्लोचार्ट : क्या संख्या 24 से विभाज्य है ?



पाठ्यपुस्तक के हल (सभी प्रश्न)

गणित चर्चा (पृ.113-115) – क्रमागत संख्याओं के योग (अंशु के प्रश्न) और चार क्रमागत संख्याओं पर आठ $\pm$ व्यंजक।

उत्तर : क्रमागत योग : हर विषम संख्या $2k + 1 = k + (k + 1)$; 2 की घातें 2 या अधिक क्रमागत प्राकृत संख्याओं के योग से कभी नहीं बनतीं, बाकी बन सकती हैं ($15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + \dots + 5$, यानी 15 तीन प्रकार से); ऋणात्मक संख्याओं के साथ हर संख्या और 0 बन सकती है ($0 = -1 + 0 + 1$)। चार क्रमागत संख्याएँ 3, 4, 5, 6: मान 18, 6, 8, -4, 10, -2, 0, -12; 5, 6, 7, 8 के लिए: 26, 10, 12, -4, 14, -2, 0, -16। अवलोकन : सब सम हैं और हर आरंभिक n के लिए - 2 और 0 आते हैं ($n, n + 1, n + 2, n + 3$ से $4n + 6, 2n, 2n + 2, -2n - 4, 2n + 4, -2, 0, -2n -$

6)। किन्हीं चार संख्याओं a, b, c, d के लिए आठों $a \pm b \pm c \pm d$ की समता एक-सी है (व्याख्या 1-3), और यह किसी भी संख्या में पदों के लिए सही है।

ब्रेकिंग ईवन (पृ.115) – कौन-से अंकगणितीय व्यंजक सम हैं? $43 + 37, 672 - 348, 4 \times 347 \times 3, 708 - 477, 809 + 214, 119 \times 303, 543 - 479, 513^3$ । कौन-से बीजीय व्यंजक सदा सम हैं? $2a + 2b, 3g + 5h, 4m + 2n, 2u - 4v, 13k - 5k, 6m - 3n, x^2 + 2, b^2 + 1, 4k \times 3j$ । अपने भी लिखो।

उत्तर: अंकगणितीय: $43 + 37$ (विषम + विषम) सम; $672 - 348$ (सम - सम) सम; $4 \times 347 \times 3$ (गुणनखंड 4) सम; $708 - 477$ (सम - विषम) विषम; $809 + 214$ (विषम + सम) विषम; 119×303 (विषम $\times$ विषम) विषम; $543 - 479$ (विषम - विषम) सम; 513^3 (विषम $\times$ विषम $\times$ विषम) विषम। बीजीय: $2a + 2b = 2(a + b)$ सदा सम; $3g + 5h$ - सदा नहीं ($g = 1, h = 2$ पर 13); $4m + 2n = 2(2m + n)$ सदा सम; $2u - 4v = 2(u - 2v)$ सदा सम; $13k - 5k = 8k$ सदा सम; $6m - 3n$ - सदा नहीं ($m = 1, n = 1$ पर 3); $x^2 + 2$ - सदा नहीं ($x = 3$ पर 11, $x = 6$ पर 38); $b^2 + 1$ - सदा नहीं ($b = 2$ पर 5, $b = 3$ पर 10); $4k \times 3j = 12kj$ सदा सम। अपने उदाहरण: $2n, 6p + 10q, 8a - 14b, n(n + 1)$ ।

पृ.116-118 – दो सम संख्याओं का योग 4 का गुणज कब होता है? $4p$ और $(4q + 2)$ के लिए व्याख्या और उदाहरण लिखो। सदा-कभी-कभी-कभी नहीं कथन 1: 'घटाव के लिए जाँचो कि सत्य है या नहीं'।

उत्तर: दो सम संख्याएँ: दोनों 4 के गुणज $\rightarrow 4p + 4q = 4(p + q)$, 4 का गुणज ($12 + 16 = 28$)। दोनों $4p + 2$ रूप की $\rightarrow 4(p + q + 1)$, 4 का गुणज ($6 + 10 = 16, 22 + 6 = 28$)। एक-एक $\rightarrow 4p + (4q + 2) = 4(p + q) + 2$, शेषफल 2, 4 का गुणज नहीं ($8 + 6 = 14; 4 + 10 = 14$); यह सम + विषम = विषम जैसा है। घटाव के साथ कथन 1: $8a - 8b = 8(a - b)$ फिर 8 का गुणज ($56 - 16 = 40 = 8 \times 5$) - सत्य।

सदा, कभी-कभी या कभी नहीं (पृ.118-121) – कथन 6 और 7 (9 व 4 से विभाज्य $\Rightarrow 36; 6$ व 4 से $\Rightarrow 24$); कथन 8 (विषम + सम = 6 का गुणज)। क्या शेष रहता है: 5 से भाग देने पर शेषफल 3 वाली संख्याएँ और उन्हें दर्शाने वाले व्यंजक खोजो।

उत्तर: 6: सदा सत्य - LCM(9, 4) = 36 और संख्या LCM से विभाज्य है। 7: कभी-कभी सत्य - LCM(6, 4) = 12, इसलिए 12, 6 और 4 दोनों से विभाज्य है पर 24 से नहीं, जबकि 24 है। 8: कभी नहीं सत्य - $2n + (2m + 1) = 6j$ से $2(n + m) = 6j - 1$, सम = विषम, असंभव। 5 से भाग पर शेषफल 3: 3, 8, 13, 18, 23 ...; व्यंजक: (iv) $5k + 3$ ($k = 0, 1, 2 \dots$) और (v) $5k - 2$ ($k \geq 1$) - दोनों 3, 8, 13, 18, 23 देते हैं। अन्य गलत: (i) $3k + 5 \rightarrow 5, 8, 11 \dots$, (ii) $3k - 5 \rightarrow -2, 1, 4 \dots$, (iii) $3k/5$ सामान्यतः पूर्ण संख्या नहीं, (vi) $5k - 3 \rightarrow 2, 7, 12 \dots$ (शेषफल 2)।

पृष्ठ 122, Figure it Out प्र1-प्र2 - (1) चार क्रमागत संख्याओं का योग 34 है; वे ज्ञात करो। (2) p पाँच क्रमागत संख्याओं में सबसे बड़ी है; बाकी चार बताओ।

उत्तर: प्र1: संख्याएँ $n, n + 1, n + 2, n + 3$: $4n + 6 = 34 \rightarrow 4n = 28 \rightarrow n = 7$, अतः 7, 8, 9, 10 (योग 34)। प्र2: सबसे बड़ी p वाली पाँच क्रमागत संख्याएँ $p - 4, p - 3, p - 2, p - 1, p$ ।

पृष्ठ 122 प्र3 - सदा / कभी-कभी / कभी नहीं सत्य (उदाहरण सहित व्याख्या, बीजगणित से सिद्ध):
(i) दो सम संख्याओं का योग 3 का गुणज; (ii) 18 से विभाज्य नहीं $\Rightarrow$ 9 से भी नहीं; (iii) दो संख्याएँ 6 से विभाज्य नहीं $\Rightarrow$ योग भी नहीं; (iv) 6 का गुणज + 9 का गुणज 3 का गुणज; (v) 6 का गुणज + 3 का गुणज 9 का गुणज।

उत्तर: (i) कभी-कभी - $2 + 4 = 6$ और $4 + 8 = 12$ 3 के गुणज हैं, पर $2 + 6 = 8$ और $6 + 8 = 14$ नहीं ($2a + 2b = 2(a + b)$, 3 का गुणज तभी जब 3, $a + b$ को भाग दे)। (ii) कभी-कभी - 30, 18 और 9 दोनों से विभाज्य नहीं, पर 27, 18 से विभाज्य नहीं फिर भी 9 से है। (iii) कभी-कभी - $9 + 11 = 20$ (6 से विभाज्य नहीं) पर $8 + 10 = 18$, 6 से विभाज्य है। (iv) सदा - $6x + 9y = 3(2x + 3y)$ । (v) कभी-कभी - $18 + 9 = 27$, 9 का गुणज है पर $12 + 9 = 21$ नहीं ($6x + 3y = 3(2x + y)$, 9 का गुणज तभी जब 3, $2x + y$ को भाग दे)।

पृष्ठ 122 प्र4-प्र6 - (4) ऐसी संख्याएँ जो 3 और 4 दोनों से भाग देने पर शेषफल 2 दें; बीजीय व्यंजक। (5) कंकड़ों की पहेली (3 के समूह में शेषफल 1, विषम, 5 के समूह में शेषफल 1, 7 से पूर्ण विभाज्य, 100 से कम)। (6) तथागत: 6 से भाग देने पर शेषफल 2 वाली किन्हीं तीन संख्याओं का योग सदा 6 का गुणज।

उत्तर: प्र4: $x - 2$, 3 और 4 दोनों का गुणज होना चाहिए, यानी $LCM = 12$ का, अतः $x = 12n + 2$: 2, 14, 26, 38, 50 ... प्र5: 3 और 5 पर शेषफल 1 और विषम (2 पर शेषफल 1): 3, 2, 5 पर शेषफल 1 $\rightarrow$ संख्या = $30k + 1$ ($LCM = 30$): 31, 61, 91 (< 100); केवल $91 = 7 \times 13$ सात से विभाज्य $\rightarrow$ 91 कंकड़। प्र6: $(6a + 2) + (6b + 2) + (6c + 2) = 6a + 6b + 6c + 6 = 6(a + b + c + 1)$ - 6 का गुणज। हाँ, तथागत सही है।

पृष्ठ 122-123 प्र7-प्र8 - (7) 7 से भाग देने पर 661 का शेषफल 3 और 4779 का 5 है; $4779 + 661$ और $4779 - 661$ के शेषफल ज्ञात करो (बीजगणित व चित्र से)। (8) ऐसी संख्या जो 3 से भाग पर शेषफल 2, 4 से भाग पर 3, 5 से भाग पर 4 दे; सबसे छोटी और कारण।

उत्तर: प्र7: $4779 = 7p + 5$, $661 = 7q + 3$. (i) योग = $7p + 7q + 8 = 7(p + q + 1) + 1 \rightarrow$ शेषफल 1 (चित्र: $5 + 3 = 8$ बचे मनकों से 7 का एक और समूह बनता है और 1 बचता है)। (ii) अंतर = $7(p - q) + 2 \rightarrow$ शेषफल 2 ($5 - 3 = 2$ मनके बचे)। (जाँच: $4779 + 661 = 5440 = 7 \times 777 + 1$; $4779 - 661 = 4118 = 7 \times 588 + 2$)। प्र8: हर शेषफल अपने भाजक से 1 कम है, इसलिए संख्या + 1, 3, 4 और 5 से विभाज्य है, यानी $LCM = 60$ से। संख्याएँ $60k - 1$: 59, 119, 179 ... सबसे छोटी 59, क्योंकि 60, 3, 4, 5 का सबसे छोटा धनात्मक उभयनिष्ठ गुणज है।

पृष्ठ 123-126 – 2, 4, 5, 8 की विभाज्यता; 9 की (999, 909, 900, 90, 990 में से कौन; 99 बनाम 109; 427 का शेषफल); अंकों के योग वाले चार कथन। Figure it Out पृ.126: (1) क्या 9 से विभाज्य? 123, 405, 8888, 93547, 358095; (2) बिना विषम अंक वाला 9 का सबसे छोटा गुणज; (3) 6000 के सबसे निकट 9 का गुणज; (4) 4300 और 4400 के बीच 9 के कितने गुणज?

उत्तर: नियम क्यों काम करते हैं: 5 – इकाई को छोड़ हर स्थानीय मान 10 का, अतः 5 का गुणज है, इसलिए केवल इकाई अंक (0 या 5) मायने रखता है; 2 – इकाई अंक सम; 4 – 100, 4 का गुणज है, इसलिए अंतिम दो अंक तय करते हैं; 8 – 1000, 8 का गुणज है, इसलिए अंतिम तीन अंक तय करते हैं। 999, 909, 900, 90, 990 सब 9 से विभाज्य (केवल 0 और 9 अंक, हर पद 9 का गुणज); 99, 9 से विभाज्य है पर 109 नहीं (इकाई अंक 9 निर्णय नहीं कर सकता)। $427 \rightarrow 4 + 2 + 7 = 13 \rightarrow$ शेषफल 4। चारों कथन (i)–(iv) सब सही (नियम 'यदि और केवल यदि')। Figure it Out: (1) अंकों के योग 6, 9, 32, 28, 30 $\rightarrow$ केवल 405 9 से विभाज्य। (2) अंक सम हों; अंक-योग 9 का गुणज और सम $\rightarrow$ कम से कम 18; दो अंकों से अधिकतम 16, इसलिए योग 18 वाले तीन अंक, सबसे छोटी = 288। (3) $6000 \div 9 = 666$ शेष 6; $9 \times 667 = 6003$ (3 दूर) और $9 \times 666 = 5994$ (6 दूर) $\rightarrow$ 6003। (4) 4302 से 4392 तक 9 के गुणज: $(4392 - 4302) \div 9 + 1 = 11$ ।

पृष्ठ 126-129 – 3 और 11 से विभाज्यता। गणित चर्चा: क्या 462, 11 से विभाज्य है? यदि अंतर 11 या 11 का गुणज हो तो शेषफल क्या? 11 से विभाज्यता: (i) 158 (ii) 841 (iii) 481 (iv) 5529 (v) 90904 (vi) 857076।

उत्तर: 3 से: 10, 100, 1000 ... को 3 से भाग देने पर शेषफल 1, इसलिए संख्या का शेषफल उसके अंक-योग के बराबर – 3 से विभाज्य $\Leftrightarrow$ अंक-योग 3 से विभाज्य। 11 से: 462 – इकाई 2, दहाई 6, सैकड़ा 4: $(2 + 4) - 6 = 0 \rightarrow$ 11 से विभाज्य ($462 = 11 \times 42$)। यदि अंतर 0, 11 या 11 का गुणज हो तो शेषफल 0 (विभाज्य)। (इकाई अंक से + लेकर बारी-बारी चिह्न): (i) $8 - 5 + 1 = 4 \rightarrow$ शेषफल 4; (ii) $1 - 4 + 8 = 5 \rightarrow$ शेषफल 5; (iii) $1 - 8 + 4 = -3 \rightarrow$ शेषफल $11 - 3 = 8$; (iv) $9 - 2 + 5 - 5 = 7 \rightarrow$ शेषफल 7; (v) $4 - 0 + 9 - 0 + 9 = 22 \rightarrow$ 11 से विभाज्य; (vi) $6 - 7 + 0 - 7 + 5 - 8 = -11 \rightarrow$ 11 से विभाज्य।

पृष्ठ 129 – 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11 से विभाज्यता की तालिका (हाँ/नहीं) भरो: 128, 990, 1586, 275, 6686, 639210, 429714, 2856, 3060, 406839। साथ ही 6 और 24 (पृ.129-130)।

उत्तर: संख्या: 2/3/4/5/6/8/9/10/11 – 128: हाँ नहीं हाँ नहीं नहीं हाँ नहीं नहीं नहीं (पुस्तक की नमूना पंक्ति में 4 के लिए 'नहीं' छपा है पर $128 = 4 \times 32$); 990: हाँ हाँ नहीं हाँ हाँ नहीं हाँ हाँ; 1586: हाँ नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं; 275: नहीं नहीं नहीं हाँ नहीं नहीं नहीं नहीं हाँ; 6686: हाँ नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं; 639210: हाँ हाँ नहीं हाँ हाँ नहीं नहीं हाँ हाँ; 429714: हाँ हाँ नहीं नहीं हाँ नहीं हाँ नहीं नहीं; 2856: हाँ हाँ हाँ नहीं हाँ हाँ नहीं नहीं नहीं; 3060: हाँ हाँ हाँ हाँ हाँ नहीं हाँ हाँ नहीं; 406839: नहीं हाँ नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं नहीं। शीघ्र विधि: 2, 4, 5, 8, 10 के लिए अंतिम अंक(ों); 3 और 9 के लिए अंक-

योग; $6 = (2 \text{ और } 3)$; 11 के लिए बारी-बारी का योग। 6 से: 38 (केवल 2) नहीं, 225 (केवल 3) नहीं, 186 (2 और 3) हाँ, 64 (केवल 2) नहीं – वास्तविक भाग से मेल। 24 से: 3 और 8 जाँचो, 4 और 6 नहीं, क्योंकि 12, 4 और 6 दोनों से विभाज्य है पर 24 से नहीं ($4 = 2^2$, $6 = 2 \times 3$ में 2 उभयनिष्ठ, $LCM = 12$; $24 = 2^3 \times 3$ के लिए 3 और $2^3 = 8$ चाहिए)।

पृष्ठ 130-131 – डिजिटल रूट: 600 और 700 के बीच किन संख्याओं का रूट (i) 5 (ii) 7 (iii) 3 है? 12 क्रमागत संख्याओं के; 3, 4, 6 के क्रमागत गुणजों के; 6 के गुणज से 1 अधिक संख्याओं के डिजिटल रूट; पहली 'सबसे छोटे विषम अंकों से बना'।

उत्तर: डिजिटल रूट = 9 से भाग का शेषफल (विभाज्य हो तो 9)। (i) रूट 5 (अंक-योग 5 या 14): 608, 617, 626, 635, 644, 653, 662, 671, 680, 689, 698। (ii) रूट 7 (योग 7 या 16): 601, 610, 619, 628, 637, 646, 655, 664, 673, 682, 691। (iii) रूट 3 (योग 3 या 12): 606, 615, 624, 633, 642, 651, 660, 669, 678, 687, 696। 12 क्रमागत संख्याएँ (जैसे 20-31): 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 1, 2, 3, 4 – रूट 1 से 9 घूमकर दोहराते हैं। 3 के गुणज: 3, 6, 9, 3, 6, 9 ...; 4 के: 4, 8, 3, 7, 2, 6, 1, 5, 9, 4, 8, 3 ...; 6 के: 6, 3, 9, 6, 3, 9 ...; 6 के गुणज से 1 अधिक (7, 13, 19, 25 ...): 7, 4, 1, 7, 4, 1 ... (हर $+k$ पर रूट में k जुड़ता है, मॉड 9)। पहली: सब अंक सबसे छोटा विषम अंक 1; अंकों की संख्या, योग और रूट सब 9 (सबसे बड़ा विषम एक-अंकीय) $\rightarrow 111, 111, 111$ (नौ 1) = 11, 11, 11, 111 = ग्यारह करोड़ ग्यारह लाख ग्यारह हजार एक सौ ग्यारह।

पृष्ठ 131 Figure it Out प्र1-प्र4 (डिजिटल रूट) – (1) 8-अंकीय संख्या का रूट 5 है; उससे 10 अधिक का रूट? (2) बार-बार 11 जोड़ो; रूट क्या होंगे? (3) $9a + 36b + 13$ का रूट। (4) अनुमान: संख्या की समता और रूट; रूट और 3 या 9 से भाग का शेषफल।

उत्तर: प्र1: 10 जोड़ने से मॉड 9 शेषफल 1 बढ़ता है ($10 = 9 + 1$), इसलिए रूट 6 (जैसे $40000001 \rightarrow 5$; $40000011 \rightarrow 6$)। प्र2: 10 से शुरू: 10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98, 109, 120 ... रूट 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8, 1, 3 ... – हर $+11$ पर रूट में 2 जुड़ता है ($11 \equiv 2$ मॉड 9); सभी नौ रूट आते हैं और पैटर्न हर 9 चरण पर दोहराता है। प्र3: $9a + 36b + 13 = 9(a + 4b + 1) + 4 \rightarrow 9$ का गुणज $+4 \rightarrow$ रूट 4। प्र4: (i) कोई निश्चित संबंध नहीं – 12 (रूट 3), 13 (रूट 4), 14 (रूट 5): संख्या और रूट की समता मिल भी सकती है, नहीं भी। (ii) रूट 1, 4, 7 $\rightarrow 3$ से भाग पर शेषफल 1; रूट 2, 5, 8 $\rightarrow$ शेषफल 2; रूट 3, 6, 9 $\rightarrow$ शेषफल 0। रूट 9 $\rightarrow 9$ से भाग पर शेषफल 0; रूट 9 से कम $\rightarrow 9$ से भाग का शेषफल रूट के बराबर।

पृष्ठ 131-132 (5.3 अंकों का भेस) – हल करो: (i) $A1 + 1B = B0$ (ii) $AB + 37 = 6A$ (iii) $ON + ON + ON = PO$ (iv) $QR + QR + QR = PRR$ (v) $PQ \times 8 = RS$ (vi) $GH \times H = 9K$ (vii) $BYE \times 6 = RAY$ (अंशु का तर्क)।

उत्तर: (i) $10A + 1 + 10 + B = 10B \rightarrow 10A + 11 = 9B$: $A = 7, B = 9 \rightarrow 71 + 19 = 90$ । (ii) $10A + B + 37 = 60 + A \rightarrow 9A + B = 23$: $A = 2, B = 5 \rightarrow 25 + 37 = 62$ । (iii) $3 \times ON = PO$: हल $17 \times 3 = 51$ ($O = 1, N = 7, P = 5$); $24 \times 3 = 72$ ($O = 2, N = 4, P = 7$); 31×3

$= 93$ ($O = 3, N = 1, P = 9$) – उत्तर-कुंजी में केवल अंतिम है। (iv) $3 \times QR = PRR: 85 \times 3 = 255$ ($Q = 8, R = 5, P = 2$) – एकमात्र हल (इकाई: $3R$ का अंतिम अंक $R \rightarrow R = 0$ या 5 ; $R = 0$ पर $PRR = P00$ और $3Q = 10P$ असंभव, अतः $R = 5$)। (v) $PQ \times 8 = RS: PQ \leq 12$ ($13 \times 8 = 104$ तीन अंकों का) और $PQ \geq 12$ ($10, 11$ में अंक दोहराते हैं) $\rightarrow 12 \times 8 = 96$ ($P = 1, Q = 2, R = 9, S = 6$)। (vi) $GH \times H = 9K$: केवल $24 \times 4 = 96$ ठीक बैठता है ($G = 2, H = 4, K = 6$): $12 \times 8, 46 \times 2, 47 \times 2, 31 \times 3$ में H गुणक नहीं है; 11×9 में अंक दोहराता है; $16 \times 6 = 96$ में $K = H = 6$ (दो अक्षर, एक अंक)। (vii) $BYE \times 6 = RAY: B = 1$ ($B \geq 2$ पर गुणनफल 4-अंकीय); $Y \leq 6$ और सम ($Y = 0, 2, 4, 6$); जाँचने पर $105 \times 6 = 630$ ($B = 1, Y = 0, E = 5, R = 6, A = 3$) – एकमात्र हल।

पृष्ठ 132 – हल करो: (i) $UT \times 3 = PUT$ (ii) $AB \times 5 = BC$ (iii) $L2N \times 2 = 2NP$ (iv) $XY \times 4 = ZX$ (v) $PP \times QQ = PRP$ (vi) $JK \times 6 = KKK$ ।

उत्तर: (i) $50 \times 3 = 150$ ($U = 5, T = 0, P = 1$)। (ii) $19 \times 5 = 95$ ($A = 1, B = 9, C = 5$)। (iii) $125 \times 2 = 250$ ($L = 1, N = 5, P = 0$) – $124 \times 2 = 248$ ($L = 1, N = 4, P = 8$) भी सभी नियमों पर खरा है। (iv) $23 \times 4 = 92$ ($X = 2, Y = 3, Z = 9$)। (v) $22 \times 11 = 242$ ($P = 2, Q = 1, R = 4$) – $33 \times 11 = 363$ ($P = 3, R = 6$) और $44 \times 11 = 484$ ($P = 4, R = 8$) भी ठीक हैं। (vi) $74 \times 6 = 444$ ($J = 7, K = 4$)। (सब कंप्यूटर-खोज से जाँचे; उत्तर-कुंजी में (iii) और (v) के लिए केवल एक हल है।)

पृष्ठ 132 Figure it Out प्र1-प्र4 – (1) $31z5$, 9 का गुणज है; z ज्ञात करो और दो उत्तर क्यों समझाओ। (2) स्नेहल: 12 से भाग पर शेषफल 8 वाली संख्या और 12 के गुणज से 4 कम संख्या का योग सदा 8 का गुणज। (3) 3 के दो गुणजों का योग 6 का गुणज कब? (4) श्रीलता: 9 के गुणज के अंक उलटने पर भी वह 9 का गुणज रहता है।

उत्तर: प्र1: $3 + 1 + z + 5 = 9 + z$, 9 का गुणज होना चाहिए, इसलिए $z = 0$ या 9 (3105 और 3195); दो उत्तर क्योंकि अंक-योग 9 या 18 हो सकता है, दोनों 9 के गुणज। प्र2: $a = 12n + 8, b = 12m - 4 \rightarrow a + b = 12(n + m) + 4 = 4(3k + 1), k = n + m$ । यह 8 का गुणज तभी जब $3k + 1$ सम हो, यानी k विषम ($k = 1: 16$ हाँ; $k = 2: 28$ नहीं)। अतः दावा सदा सत्य नहीं (कभी-कभी सत्य)। प्र3: $3m + 3n = 3(m + n)$, 6 का गुणज $\Leftrightarrow m + n$ सम $\Leftrightarrow m, n$ की समता एक-सी, यानी दोनों 6 के गुणज (सम m, n) या दोनों 3 के विषम गुणज ($3 + 9 = 12$); जब एक 3 का विषम गुणज और दूसरा सम गुणज हो तो नहीं ($3 + 6 = 9$)। प्र4: (i) सत्य – उलटने पर वही अंक रहते हैं, अंक-योग नहीं बदलता और 9 का गुणज बना रहता है ($4572 \rightarrow 2754: 18$)। (ii) हाँ – अंकों का कोई भी पुनर्क्रम अंक-योग नहीं बदलता, इसलिए हर फेर-बदल 9 का गुणज रहता है।

पृष्ठ 132-133 Figure it Out प्र5-प्र8 – (5) $48a23b$, 18 का गुणज है: युग्म (a, b)। (6) $3p7q8$, 44 से विभाज्य: युग्म (p, q)। (7) तीन क्रमागत संख्याएँ: क्रम से 2, 3, 4 के गुणज; कितनी बार?

(8) 45,000 और 47,000 के बीच 36 के पाँच गुणज ।

उत्तर: प्र5: 18 का गुणज = 2 और 9 से विभाज्य; b सम; अंक-योग $17 + a + b$, 9 का गुणज (18 या 27)। $b = 0 \rightarrow a = 1$; $b = 2 \rightarrow a = 8$; $b = 4 \rightarrow a + 21 = 27 \rightarrow a = 6$; $b = 6 \rightarrow a + 23 = 27 \rightarrow a = 4$; $b = 8 \rightarrow a + 25 = 27 \rightarrow a = 2$ । युग्म (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8) (जैसे $481230 \div 18 = 26735$)। प्र6: $44 = 4 \times 11$ । q8, 4 से विभाज्य: $q = 0, 2, 4, 6, 8$; 11 के लिए: $(8 + 7 + 3) - (p + q) = 18 - (p + q)$ का मान 0 या $\pm 11 \rightarrow p + q = 7$ ($p + q = 18$ केवल $p = q = 9$ पर, पर q सम होना चाहिए, इसलिए नहीं)। युग्म: (p, q) = (7, 0), (5, 2), (3, 4), (1, 6) (जैसे $37048 = 44 \times 842$)। प्र7: n, n + 1, n + 2 जिसमें $2 \mid n$, $3 \mid (n + 1)$, $4 \mid (n + 2)$: 2, 3, 4; अगली 14, 15, 16, फिर 26, 27, 28 – पैटर्न हर 12 बाद दोहराता है (2, 3, 4 का LCM)। प्र8: 36 के गुणज 4 और 9 से विभाज्य: 45036, 45072, 45108, 45144, 45180 (हर बार 36 जोड़ो; पहली 36×1251)।

पृष्ठ 133 Figure it Out प्र9-प्र13 – (9) 5 क्रमागत सम संख्याओं की बीच वाली $5p$ है; बाकी ।

(10) 15 से विभाज्य 6-अंकीय संख्या जिसका उलटा 6 से विभाज्य हो । (11) दीपक: 11 के कुछ गुणज दोगुने करने पर भी 11 के गुणज रहते हैं, कुछ नहीं । (12) सदा/कभी-कभी/कभी नहीं: (i) 6 के गुणज और 3 के गुणज का गुणनफल 9 का गुणज; (ii) तीन क्रमागत सम संख्याओं का योग 6 से विभाज्य; (iii) abcdef 6 का गुणज $\Rightarrow$ badcef 6 का गुणज; (iv) $8(7b - 3) - 4(11b + 1)$ 12 का गुणज । (13) तीन संख्याओं का योग 3 से विभाज्य कब ?

उत्तर: प्र9: क्रमागत सम संख्याओं में 2 का अंतर: $5p - 4, 5p - 2, 5p, 5p + 2, 5p + 4$ । प्र10: 15 से विभाज्य $\rightarrow 3$ और 5 से $\rightarrow$ अंतिम अंक 0 या 5; 0 होता तो उलटी संख्या 0 से शुरू (6-अंकीय नहीं), इसलिए अंतिम अंक 5; उलटी संख्या सम होनी चाहिए, इसलिए पहला अंक $a \in \{2, 4, 6, 8\}$ (उलटी का अंतिम अंक a); अंक-योग 3 का गुणज: जैसे 200025 (अंक-योग 9; उलटी 520002 सम और अंक-योग 9 $\rightarrow$ 6 से विभाज्य)। प्र11: दीपक गलत है – यदि $n = 11k$ तो $2n = 22k = 11(2k)$ सदा 11 का गुणज। प्र12: (i) सदा $- 6x \times 3y = 18xy = 9(2xy)$ । (ii) सदा $-(2n - 2) + 2n + (2n + 2) = 6n$ । (iii) सदा – जोड़ों में अदला-बदली ($ab \rightarrow ba, cd \rightarrow dc$) से अंक-योग (अतः 3 से विभाज्यता) और इकाई अंक f (अतः सम होना) नहीं बदलते। (iv) कभी नहीं $- 8(7b - 3) - 4(11b + 1) = 56b - 24 - 44b - 4 = 12b - 28 = 12(b - 3) + 8$: 12 से भाग पर शेषफल 8। प्र13: तीन संख्याओं का योग 3 से विभाज्य तब जब 3 से भाग के उनके शेषफल सब बराबर (0, 0, 0 या 1, 1, 1 या 2, 2, 2) हों या सब अलग (0, 1, 2 किसी भी क्रम में) – ठीक तब जब शेषफलों का योग 0, 3 या 6 हो। अन्य स्थितियाँ (जैसे 0, 0, 1 या 1, 1, 2) विभाज्य नहीं।

पृष्ठ 133-134 Figure it Out प्र14-प्र16 – (14) क्या 2, 3, 4, 5 क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल सदा 2, 6, ... का गुणज है? (15) क्रिप्टेरिथम (i) $EF \times E = GGG$ (ii) $WOW \times 5 = MEOW$ । (16) 4, 8, 32 के गुणजों को कौन-सा वेन आरेख दर्शाता है? साथ ही नवकंकरी खेल (पृ.135)।

उत्तर: प्र14: 2 क्रमागत: एक सम $\rightarrow$ गुणनफल 2 का गुणज। 3 क्रमागत: एक 3 का गुणज और कम से कम एक सम $\rightarrow$ 6 का गुणज (सदा)। 4 क्रमागत: दो सम (उनमें एक 4 का गुणज) और एक 3 का गुणज $\rightarrow 4 \times 2 \times 3 = 24$ का गुणज। 5 क्रमागत: 4-क्रमागत के तर्क से 24 और एक 5 का गुणज भी आता है $\rightarrow 24 \times 5 = 120$ का गुणज। (उदाहरण: $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60 = 6 \times 10$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$; $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$)। प्र15: (i) $37 \times 3 = 111$ ($E = 3, F = 7, G = 1$; $GGG = 111 \times G$, और $111 = 3 \times 37$)। (ii) $575 \times 5 = 2875$ ($W = 5, O = 7, M = 2, E = 8$)। प्र16: 32 का हर गुणज 8 का गुणज और 8 का हर गुणज 4 का गुणज – एक-के-भीतर-एक वृत्त, 32 भीतर, 8 बीच में, 4 बाहर $\rightarrow$ आरेख (iv) ((iii) में नाम उलटे लगे हैं)। नवकंकरी (नाइन मेन्स मॉरिस) दो खिलाड़ियों का खेल है – हल करने को प्रश्न नहीं।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 1 अंक

1. 489710 का डिजिटल रूट क्या है? (1)

उत्तर: $4 + 8 + 9 + 7 + 1 + 0 = 29 \rightarrow 2 + 9 = 11 \rightarrow 1 + 1 = 2$ ।

2. 9 से विभाज्यता का नियम लिखो। (1)

उत्तर: संख्या 9 से विभाज्य है यदि और केवल यदि उसके अंकों का योग 9 से विभाज्य हो।

3. 427 को 9 से भाग देने पर शेषफल क्या है? (1)

उत्तर: $4 + 2 + 7 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$ । शेषफल 4।

4. क्या 462, 11 से विभाज्य है? (1)

उत्तर: हाँ: $(2 + 4) - 6 = 0$ ।

5. 5 से भाग देने पर शेषफल 3 देने वाली संख्याओं का सामान्य रूप लिखो। (1)

उत्तर: $5k + 3$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)।

6. क्या दो सम संख्याओं का योग सदा सम होता है? (1)

उत्तर: हाँ – सम + सम = सम ($2a + 2b = 2(a + b)$)।

7. 9 के किसी भी गुणज का डिजिटल रूट क्या होता है? (1)

उत्तर: 9।

8. यदि $31z5$, 9 से विभाज्य है तो z का एक मान लिखो। (1)

उत्तर: $3 + 1 + z + 5 = 9 + z$, अतः $z = 0$ (या 9)।

9. 3, 4, 5 से भाग देने पर क्रमशः शेषफल 2, 3, 4 देने वाली सबसे छोटी संख्या? (1)

उत्तर: 59 (LCM 60 से 1 कम)।

10. क्या 12, 24 से विभाज्य है? क्या वह 4 और 6 दोनों से विभाज्य है? (1)

उत्तर: 12, 24 से विभाज्य नहीं पर 4 और 6 दोनों से विभाज्य है।

11. तीन क्रमागत पूर्णांकों का गुणनफल सदा किस संख्या का गुणज होता है? (1)

उत्तर: 6।

12. क्या $a \pm b \pm c \pm d$ के सभी व्यंजकों की समता एक-सी होती है? (1)

उत्तर: हाँ – चिह्न बदलने से मान सम संख्या (उस संख्या का दुगुना) से बदलता है।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 3 अंक

1. दिखाओ कि $4m + 2q$ सदा सम है पर $x^2 + 2$ नहीं। (3)

उत्तर: $4m + 2q = 2(2m + q)$ में गुणनखंड 2 है, इसलिए सभी पूर्णांक m, q के लिए सम है (जैसे $m = 4, q = -9$ पर -2)। $x^2 + 2$: x सम हो तो x^2 सम, x विषम हो तो x^2 विषम; इसलिए $x = 6$ पर 38 (सम) पर $x = 3$ पर 11 (विषम) – सदा सम नहीं।

2. 7309 को 9 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात करो और अंक-योग विधि का कारण बताओ। (3)

उत्तर: $7 + 3 + 0 + 9 = 19 \rightarrow 1 + 9 = 10 \rightarrow 1 + 0 = 1$, शेषफल 1। कारण: $7309 = 7(999 + 1) + 3(99 + 1) + 0(9 + 1) + 9 = (9 \text{ का गुणज}) + (7 + 3 + 0 + 9)$, क्योंकि 10, 100, 1000 प्रत्येक 9 के गुणज से 1 अधिक हैं, इसलिए जाँचने को केवल अंक-योग बचता है।

3. बारी-बारी के योग से 857076 की 11 से विभाज्यता जाँचो। (3)

उत्तर: इकाई अंक से '+' लेकर: $6 - 7 + 0 - 7 + 5 - 8 = -11$, जो 11 का गुणज है, इसलिए 857076, 11 से विभाज्य है ($857076 = 11 \times 77916$)।

4. यदि $31z5$, 9 का गुणज है तो z ज्ञात करो और दो उत्तर क्यों हैं समझाओ। (3)

उत्तर: अंक-योग $= 3 + 1 + z + 5 = 9 + z$, 9 का गुणज होना चाहिए, इसलिए $9 + z = 9$ या $18 \rightarrow z = 0$ या 9 (3105 और 3195, दोनों 9 से विभाज्य)। दो उत्तर क्योंकि अंक-योग 9 और 18 दोनों 9 के गुणज हैं और z , 0 से 9 तक हो सकता है।

5. क्रिप्टेरिथम $AB \times 5 = BC$ हल करो और तर्क दो। (3)

उत्तर: $AB \times 5$ दो-अंकीय है इसलिए $AB \leq 19$; AB , 10 से 19 के बीच: $A = 1 \mid 5 \times (10 + B) = 50 + 5B = 10B + C \rightarrow 50 = 5B + C \mid B = 9$ पर $C = 5$ ($B = 8$ पर $C = 10$ असंभव)। अतः $19 \times 5 = 95$: $A = 1, B = 9, C = 5$ ।

बोर्ड-पैटर्न प्रश्न – 5 अंक

1. बीजगणित से सिद्ध करो: (a) यदि 8 दो संख्याओं को भाग दे तो उनके योग और अंतर को भी देता है; (b) 'यदि 8 किसी संख्या को भाग दे तो वह उसके योग वाली किन्हीं दो संख्याओं को भी देगा' केवल कभी-कभी सत्य है। (5)

उत्तर: (a) संख्याएँ $8a$ और $8b$: $8a + 8b = 8(a + b)$ और $8a - 8b = 8(a - b)$ – दोनों 8 के गुणज ($8 + 16 = 24, 56 - 16 = 40$)। सामान्यतः यदि $a \mid M$ और $a \mid N$ तो $a \mid (M \pm N)$ । (b) $72 = 8 \times 9 = 48 + 24$, और 48, 24 8 के गुणज हैं – सही; पर $72 = 50 + 22$ में न 50 न 22 8 का गुणज – गलत। कथन कुछ विभाजनों के लिए ही सही है, इसलिए कभी-कभी सत्य।

2. स्थानीय मान से 11 की विभाज्यता का नियम निकालो और 90904 तथा 481 की जाँच करो (शेषफल बताओ)। (5)

उत्तर: इकाई $1 = 11 \times 0 + 1$ (11 के गुणज से 1 अधिक), दहाई $10 = 11 - 1$ (1 कम), सैकड़ा $100 = 99 + 1$ (1 अधिक), हज़ार $1000 = 1001 - 1$ (1 कम) ... बारी-बारी। इसलिए संख्या को 11 से भाग देने पर शेषफल = (इकाई, सैकड़ा, ... स्थान के अंकों का योग) - (दहाई, हज़ार, ... स्थान के अंकों का योग) (ऋणात्मक हो तो 11 जोड़ो)। $90904 : (4 + 9 + 9) - (0 + 0) = 22 \rightarrow 11$ से विभाज्य ($90904 = 11 \times 8264$)। $481 : (1 + 4) - 8 = -3 \rightarrow$ शेषफल $11 - 3 = 8$ ($481 = 11 \times 43 + 8$)।

3. यदि $48a23b$, 18 का गुणज है तो तर्क सहित सभी संभव युग्म (a, b) ज्ञात करो। (5)

उत्तर: $18 = 2 \times 9$ (सह-अभाज्य), इसलिए संख्या सम हो और अंक-योग 9 का गुणज हो। सम: $b \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ । अंक-योग $= 4 + 8 + a + 2 + 3 + b = 17 + a + b$, 18 या 27 होना चाहिए (36 बहुत बड़ा)। $b = 0: 17 + a = 18 \rightarrow a = 1$ । $b = 2: 19 + a = 27 \rightarrow a = 8$ । $b = 4: 21 + a = 27 \rightarrow a = 6$ । $b = 6: 23 + a = 27 \rightarrow a = 4$ । $b = 8: 25 + a = 27 \rightarrow a = 2$ । युग्म (a, b): (1, 0), (8, 2), (6, 4), (4, 6), (2, 8)।